

## Problème

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et on considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par les égalités suivantes:

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \text{ et } f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1.$$

### Partie 1 : étude de $f$ .

- 1) a) Écrire la matrice  $M$  de  $f$  dans  $\mathcal{B}$ .
- b) Déterminer la dimension de  $\text{Im } f$  puis celle de  $\text{Ker } f$ .
- c) Donner alors une base de  $\text{Ker } f$ , puis en déduire une valeur propre de  $f$  ainsi que le sous-espace propre associé.
- d) Déterminer les autres valeurs propres de  $f$  ainsi que les sous-espaces propres associés.
- e) En déduire que  $f$  est diagonalisable.

2) On pose  $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Justifier sans calcul que  $P$  est inversible, puis déterminer la matrice  $D$  diagonale telle que :  $M = PDP^{-1}$ .
- b) Calculer  $PQ$  puis en déduire  $P^{-1}$ .
- c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $j$ , on a :  $M^j = PD^j P^{-1}$ .
- d) Écrire, pour tout entier naturel  $j$  non nul, la première colonne de la matrice  $M^j$ . Vérifier que ce résultat reste valable si  $j = 0$ .