Exercice 3

Dans cet exercice, la lettre n désigne un entier naturel.
On dispose d'une urne contenant au départ n boules blanches et $(n+2)$ boules noires. On dispose également d'une réserve infinie de boules blanches et de boules noires.
Pour tout entier naturel j, on dit que l'urne est dans l'état j lorsqu'elle contient j boules blanches et $(j+2)$ boules noires. Au départ, l'urne est donc dans l'état n.

On réalise une succession d'épreuves, chaque épreuve se déroulant selon le protocole suivant :
Pour tout entier naturel j non nul, si l'urne est dans l'état j, on extrait une boule au hasard de l'urne.

- Si l'on obtient une boule blanche, alors cette boule n'est pas remise dans l'urne et on enlève de plus une boule noire de l'urne, l'urne est alors dans l'état $(j-1)$.
- Si l'on obtient une boule noire, alors cette boule est remise dans l'urne et on remet en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne, l'urne est alors dans l'état $(j+1)$.

1) Dans cette question, on suppose que $n = 1$ (l'urne contient donc une boule blanche et 3 boules noires) et on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la première épreuve et X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la deuxième épreuve.
On admet que X_1 et X_2 sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

a) Donner la loi de X_1.
b) Utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_2.

On revient au cas général (n est donc un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1) et on décide que les tirages s'arrêtent dès que l'urne ne contient plus de boules blanches.
Pour tout j de $\mathbb{N}$, on note alors E_j l'événement : « l'urne est dans l'état j initialement et les tirages s'arrêtent au bout d'un temps fini ». On pose $e_j = P(E_j)$ et l'on a bien sûr $e_0 = 1$.

2) Montrer, en considérant les deux résultats possibles du premier tirage (c'est-à-dire au début du jeu lorsque l'urne est dans l'état n) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = \frac{n}{2n+2} e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} e_{n+1}.$$

3) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, e_n \geq e_{n+1}$.
b) En déduire que la suite (e_n) est convergente.

On admet pour la suite que $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n = 0$.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = (n+1)e_n$.
a) Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$, écrire u_{n+1} en fonction de u_n et u_{n-1}.
b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et e_1.
c) Montrer enfin que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = (2e_1 - 1)\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}$.

Déterminer la valeur de e_1, puis en déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de e_n en fonction de n.