BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

Session 2023

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.

Le sujet comporte 8 pages, numérotées de 1/8 à 8/8.

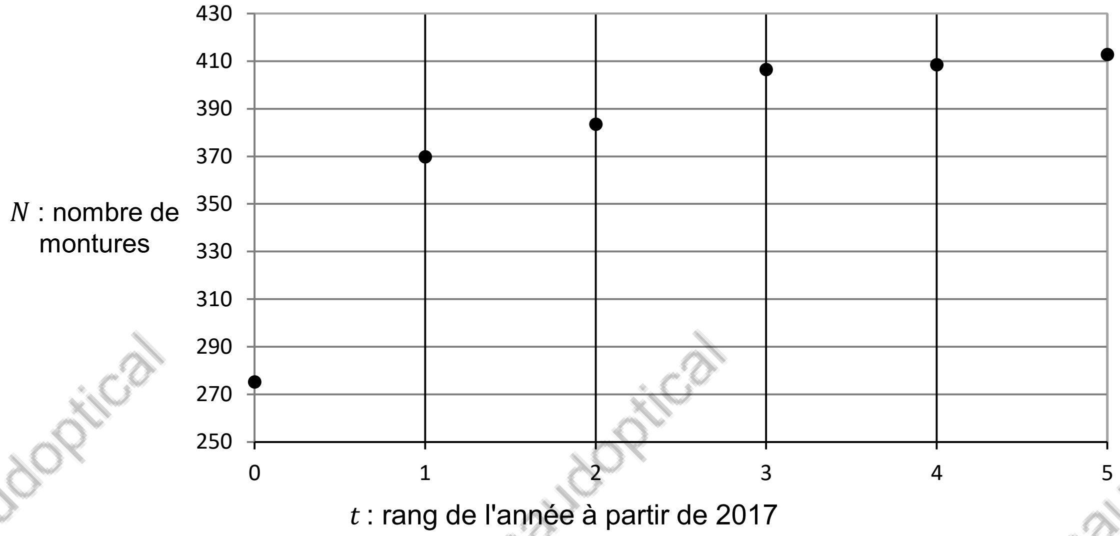
EXERCICE 1 (10 points)

On s'intéresse à une entreprise qui commercialise des montures de lunettes.

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A – Étude d'une série statistique.

Le graphique ci-dessous représente l'évolution des ventes d'un modèle de monture de lunettes depuis l'année 2017.



1. Expliquer pourquoi un ajustement affine de N en t n'est pas pertinent.

2. On effectue le changement de variable $z = \ln(415 - N)$.
On obtient alors le tableau suivant :

Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022
t	0	1	2	3	4	5
z	4,94	3,81	3,45	2,14	1,86	0,77

a. À l'aide de la calculatrice, donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(t\,;\,z)$. Arrondir à 10^{-3}.

b. Un ajustement affine de z en t est-il pertinent ? Justifier.

3. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite de régression linéaire de z en t, selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = at + b$.
Les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-2}.

SUJET 2023 - Mathématiques
@maudoptical

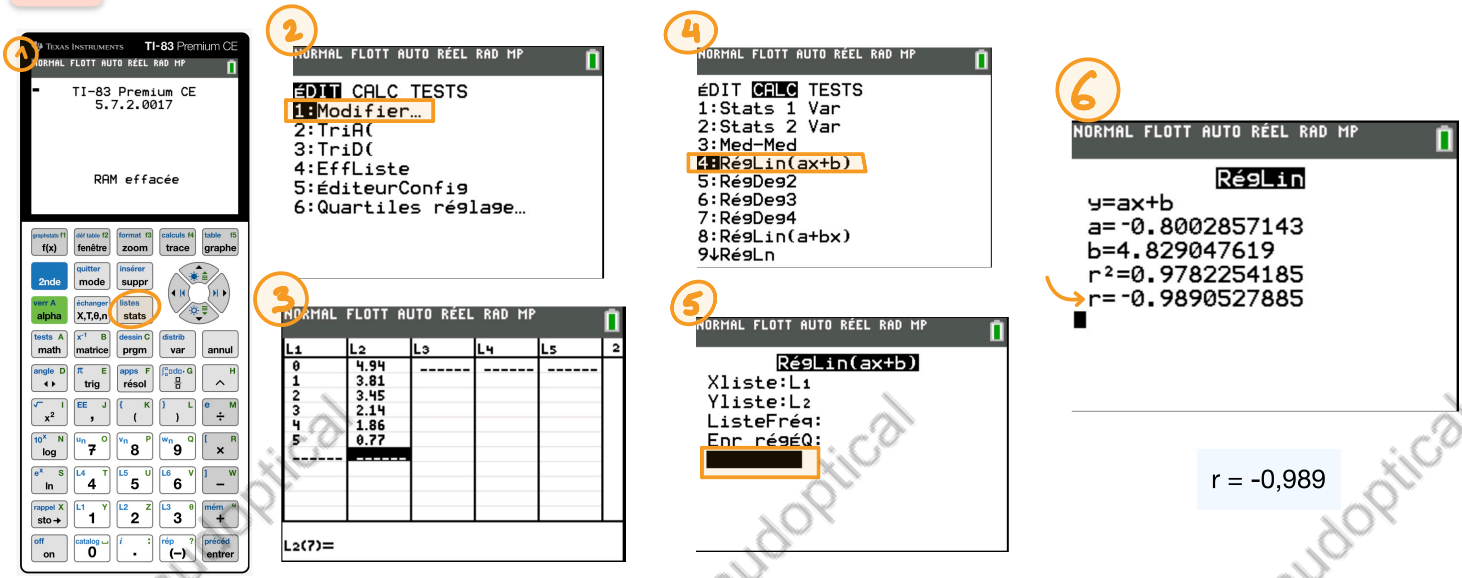
Exercice 1

PARTIE A - Étude d'une série statistique

1) Un ajustement affine de N en t n'est pas pertinent car les points du graphique ne sont pas linéaire

2)a)

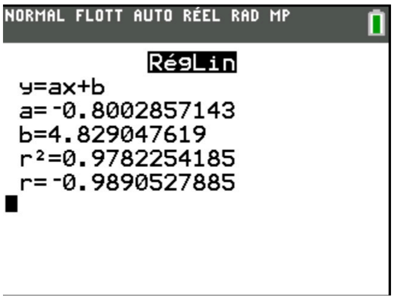
<u>À l'aide de la calculatrice, nous trouvons :</u>



r = -0,989

2)b) Un ajustement affine de z en t est pertinent car le coefficient linéaire de la série (t ; z) est proche de 1 en valeur absolue

3) **<u>À l'aide de la calculatrice, nous trouvons :</u>** z = at + b



z = -0,80 t + 4,83

4)

$z = \ln(415 - N) = -0{,}80\,t + 4{,}83$

$e^{\ln(415 - N)} = e^{-0{,}80\,t + 4{,}83}$

$415 - N = e^{-0{,}80\,t + 4{,}83}$

$N = 415 - e^{-0{,}80\,t + 4{,}83}$

$N = 415 - e^{4{,}83} \times e^{-0{,}80\,t}$

<u>On a :</u> $C = e^{4{,}83} = 125$

$N = 415 - C \times e^{-0{,}80\,t}$

donc --> $N = 415 - 125\,e^{-0{,}8t}$

$N = 415 - Ce^{-0{,}8t}$

4. En déduire une expression de N à l'aide de t sous la forme :

$$N = 415 - Ce^{-0,8t},$$

où C est une constante que l'on déterminera, à l'unité près.

5. On suppose que l'évolution constatée se poursuit.
Quel sera le nombre de montures vendues en 2023 ?

Partie B – Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 5y' + 4y = 1660,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, et où y' est sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0) : 5y' + 4y = 0.$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$f(t) = ke^{-\frac{b}{a}t}$

2. Soit c un nombre réel. On considère la fonction constante g, définie par $g(t) = c$.
Déterminer c pour que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle (E), qui vérifie la condition initiale $f(0) = 290$.

5)

en 2023 --> $t = 6$
car en 2022 --> $t = 5$

Donc : $N = 415 - 125\, e^{-0,8 \times 6} \simeq 414$

Le nombre de montures vendues en 2023 sera de 414.

PARTIE B - Résolution d'une équation différentielle

1)

$$y = k\, e^{\frac{-bt}{a}} \quad k \in \mathbb{R}$$

(E) : $5y' + 4y = 1660$

$\Leftrightarrow \quad y = k\, e^{\frac{-4t}{5}}$

$\Leftrightarrow \quad y = k\, e^{-0,8t} \quad k \in \mathbb{R}$

2)

$g(t) = c$

$g(t)$ est dérivable en tant que constante

$g'(t) = 0$

La fonction $g(t)$ est une solution différentielle de (E) si et seulement si : $5 \times g'(t) + 4 \times g(t) = 1660$

$\Leftrightarrow \quad 5 \times 0 + 4 \times c = 1660$

$\Leftrightarrow \quad 4c = 1660$

$\Leftrightarrow \quad c = \frac{1660}{4}$

$\Leftrightarrow \quad c = 415$

3)

Solution Générale de (E) = Solution Générale de (E0) + Solution particulière de (E)

$= k\, e^{-0,8t} + 415 \quad k \in \mathbb{R}$

4)

$f(0) = 290$

$\Leftrightarrow \quad k\, e^{0} + 415 = 290$

$\Leftrightarrow \quad k + 415 = 290$

$\Leftrightarrow \quad k = 290 - 415$

$\Leftrightarrow \quad k = -125$

$f(t) = -125\, e^{-0,8t} + 415 \quad k \in \mathbb{R}$

Partie C – Étude d'une fonction.

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 415 - 125\mathrm{e}^{-0,8t}.$$

On admet que cette fonction modélise l'évolution du nombre de montures vendues en fonction du temps :

t désigne le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2017.
$f(t)$ désigne le nombre de montures vendues.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants. Ces résultats sont admis et peuvent être utilisés dans les questions suivantes.

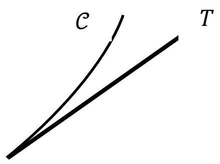
1	dérivée$(415 - 125\mathrm{e}^{-0.8t})$ $\rightarrow\ \mathbf{100\,e^{\frac{-4}{5}t}}$
2	intégrale$(415 - 125\mathrm{e}^{-0.8t}, t)$ $\rightarrow\ \mathbf{\frac{625}{4}\,e^{\frac{-4}{5}t} + 415\,t + c_1}$
3	Limite$(415 - 125\,\mathrm{e}^{-0.8t}, \infty)$ $\rightarrow\ \mathbf{415}$
4	PolynômeTaylor$(415 - 125\,\mathrm{e}^{-0.8t}, t, 0, 2)$ $\rightarrow\ \mathbf{290 + 100\,t - 40\,t^2}$

1. On sait que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.
Donner une équation de cette asymptote.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

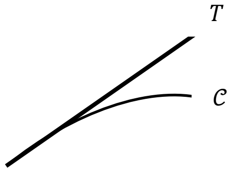
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Indiquer, sans justifier, laquelle des trois situations ci-dessous représente correctement la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente T au voisinage de zéro.



Situation 1



Situation 2

Situation 3

PARTIE C - Étude d'une fonction

1) **D'après la ligne 3 de l'annexe :**

Asymptote Horizontale d'équation y = 415

Ce qui veut dire que le nombre de montures vendues sera égal à 415 par an

2)

$f(t) = 415 - 125\,e^{-0,8t}$

$f'(t) = 100\,e^{-0,8t}$ --> **D'après la ligne 1 de l'annexe**

$100 > 0$ $\quad$ $e^{-0,8t} > 0$

La fonction est donc positive et croissante sur l'intervalle $[0 : \infty]$

3)

tangente : $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$

$y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$
$y = 100\,(x-0) + 290$
$y = 100x + 290$

$f(0) = 415 - 125\,e^{-0,8 \times 0}$

$f(0) = 290$

$f'(0) = 100\,e^{-0,8 \times 0}$

$f'(0) = 100$

La situation 2

PARTIE D - Étude d'une suite

1)

$U_0 = 3000$
$U_{n+1} = 0,9\,U_n + 500$

$U_1 = 0,9\,U_0 + 500$
$U_1 = 0,9 \times 3000 + 500$
$U_1 = 3200$

2)

$V_n = U_n - 5000 \quad \Leftrightarrow \quad U_n = V_n + 5000$

$V_{n+1} = U_{n+1} - 5000$

$V_{n+1} = 0,9\,U_n + 500 - 5000$

$V_{n+1} = 0,9\,U_n - 4500$

$V_{n+1} = 0,9\,(V_n + 5000) - 4500$

$V_{n+1} = 0,9\,V_n + 4500 - 4500$

$V_{n+1} = 0,9\,V_n$

Donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,9

Partie D – Étude d'une suite.

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 3000$, et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 500.$$

La suite (u_n) représente l'évolution du nombre de clients de l'entreprise.
Ainsi, u_n correspond au nombre de clients durant l'année 2017+n.

1. Vérifier que le nombre de clients lors de l'année 2018 est égal à 3200.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 5000$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}9$.

3. Exprimer, pour tout entier naturel n, le terme v_n en fonction de n.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 5000 - 2000 \times 0{,}9^n .$$

5. Déterminer le nombre de clients lors de l'année 2023.

6. On considère l'algorithme suivant :

```
n ← 1
u ← 3000
Tant que u ≤ 4000
        n ← n+1
        u ← 0,9*u +500
Fin Tant que
```

Quelle est la valeur de la variable n après l'exécution de l'algorithme ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

3)

$Vn = Vo \times q^n$

$Vn = (U0 - 5000) \times 0,9^n$

$Vn = (3000 - 5000) \times 0,9^n$

$Vn = - 2000 \times 0,9^n$

$Vn = Un - 5000$

$U0 = 3000$

$Un = U0 \times q^n$

4)

$Un = Vn + 5000$

$Un = - 2000 \times 0,9^n + 5000$

5)

<u>Pour déterminer le nombre de clients en 2023, on prendra n = 6</u>

<u>car :</u>
U0 : 2017 = 3000
U1 : 2018 = 3200
U2 : 2019 = 3380
U3 : 2020 = 3542
U4 : 2021 = 3687,8
U5 : 2022 = 3819,02
U6 : 2023 = 3937,118

$U6 = U5 \times q^6$

ou

$U6 = 0,9 \times 3819,02 + 500 = 3937,118$

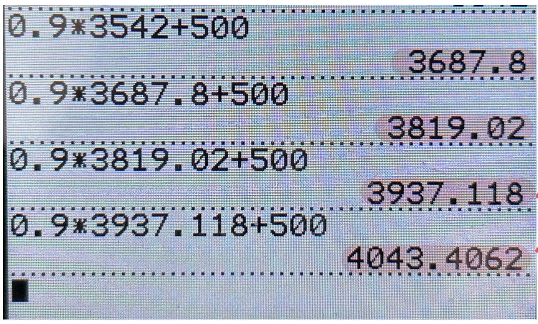
<u>En 2023, il y aura environ 3937 clients.</u>

$Un = U0 \times q^n$

6)

<u>La valeur de la variable n, après l'exécution de l'algorithme et de 7</u>

<u>car :</u>
U0 : 2017 = 3000
U1 : 2018 = 3200
U2 : 2019 = 3380
U3 : 2020 = 3542
U4 : 2021 = 3687,8
U5 : 2022 = 3819,02
U6 : 2023 = 3937,118
U7 : 2024 = 4043,4062



2021
2022
2023
2024

<u>Ce qui veut dire qu'à partir de l'année 2024, le nombre de clients de l'entreprise est supérieur à 4000</u>

EXERCICE 2 (10 points)

Une usine fabrique des verres ophtalmiques à partir de verres semi-finis.

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Parie A. Probabilités conditionnelles.

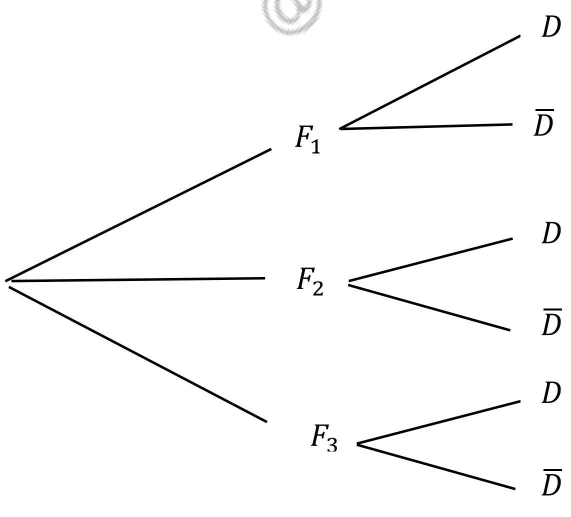
L'usine se procure des verres semi-finis auprès de trois fournisseurs différents :

- $30\ \%$ des verres semi-finis proviennent d'un premier fournisseur.
  ➔ Parmi eux, 3% sont défectueux.
- $60\ \%$ des verres semi-finis proviennent d'un deuxième fournisseur.
  ➔ Parmi eux, $4\ \%$ sont défectueux.
- $10\ \%$ des verres semi-finis proviennent d'un troisième fournisseur.
  ➔ Parmi eux, $2\ \%$ sont défectueux.

On prélève un verre semi-fini au hasard. On considère les évènements suivants :

F_1 : « le verre semi-fini provient du premier fournisseur »,
F_2 : « le verre semi-fini provient du deuxième fournisseur »,
F_3 : « le verre semi-fini provient du troisième fournisseur »,
D : « le verre semi-fini est défectueux ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Calculer la probabilité $P(F_1 \cap D)$.

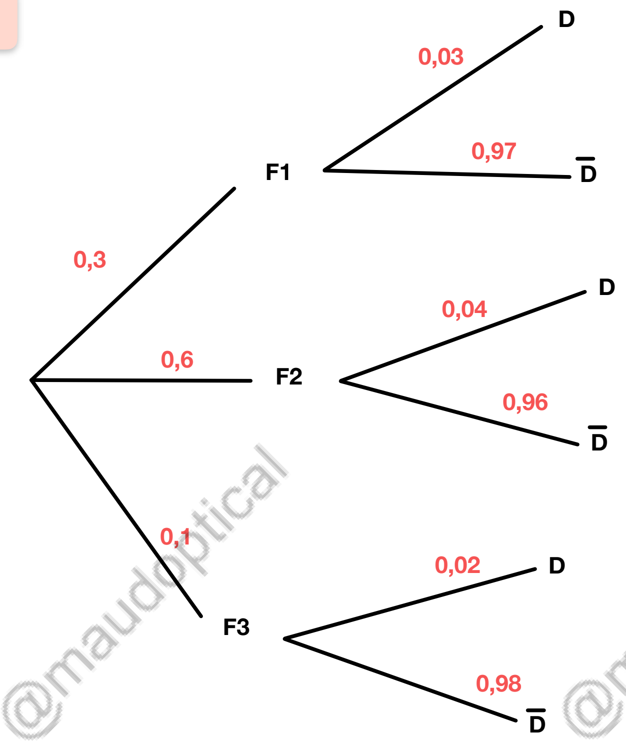
3. Montrer que la probabilité que le verre semi-fini soit défectueux est égale à $0{,}035$.

4. On sait que le verre semi-fini est défectueux.
Quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Exercice 2

PARTIE A - Probabilités Conditionnelles

1)



2) $P(F1 \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}03 = 0{,}009$

" la probabilité que le verre semi-fini provient du premier fournisseur et qu'il soit défectueux "

3)

$P(D) = (0{,}3 \times 0{,}03) + (0{,}6 \times 0{,}04) + (0{,}1 \times 0{,}02)$
$P(D) = 0{,}035$

" la probabilité que le verre semi-fini soit défectueux "

4)

$$P_D(F1) = \frac{P(F1 \cap D)}{P(D)}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P_D(F1) = \frac{0{,}009}{0{,}035}$$

$$P_D(F1) = 0{,}257$$

Partie B. Loi binomiale et loi normale.

On estime que $3{,}5\%$ des verres semi-finis du stock de l'usine sont défectueux.

On prélève un échantillon aléatoire de 200 verres semi-finis dans le stock de l'usine.

On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de verres semi-finis défectueux au sein de l'échantillon.

1. a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Donner ses paramètres.

b. Calculer la probabilité $P(6 \leq X \leq 10)$.

2. On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire X par une loi normale d'espérance 7 et l'écart type $2{,}599$.

a. Justifier la valeur de ces paramètres.

b. On considère Y une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance 7 et d'écart type $2{,}6$.

Calculer $P(5{,}5 \leq Y \leq 10{,}5)$.
Interpréter dans le contexte.

Partie C. Loi exponentielle.

On s'intéresse au standard téléphonique de l'usine.
On considère T la variable aléatoire qui, à chaque appel au standard, associe le temps d'attente, en minutes.
On admet que T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

On rappelle les formules suivantes :

Loi exponentielle	
$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$	$E(T) = \frac{1}{\lambda}$

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire T.
Interpréter dans le contexte**.**

2. On considère un appel au standard, choisi au hasard.
Déterminer la probabilité que le temps d'attente correspondant à cet appel soit compris entre 2 et 4 minutes.

PARTIE B - Loi Binomiale et Loi Normale

1)a)

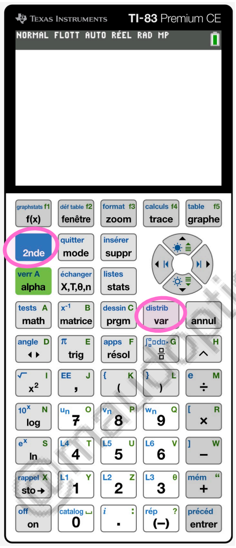
Paramètres de la loi binomiale :

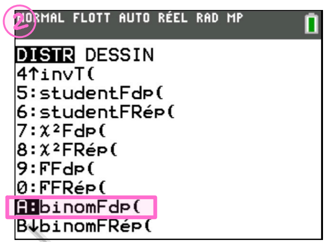
n = 200 p = 0,035
(3,5%)

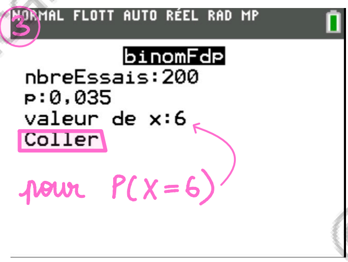
1)b)

$P(6 \leq X \leq 10) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$

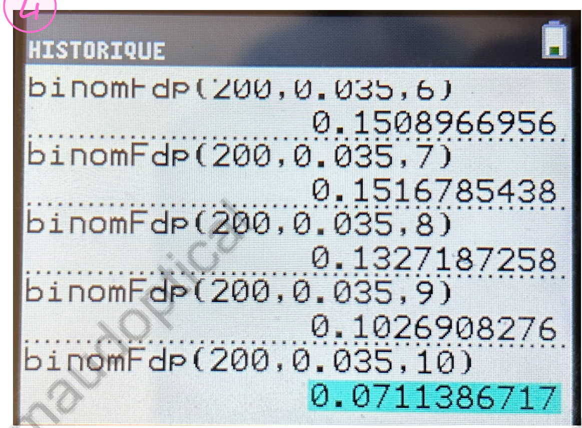
$P(6 \leq X \leq 10) = 0{,}15090 + 0{,}15168 + 0{,}13272 + 0{,}10269 + 0{,}07114 \approx 0{,}609$

1


2


3


pour P(X=6)

4


P(X=6)
P(X=7)
P(X=8)
P(X=9)
P(X=10)

2)a)

Espérance = np

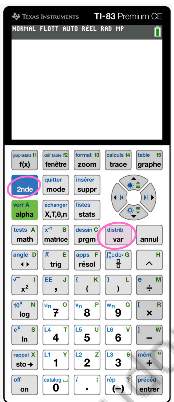
Espérance = 200 x 0,035
Espérance = 7

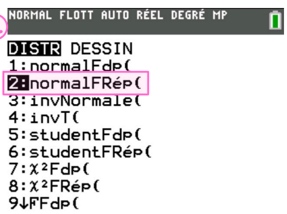
Écart type = $\sqrt{np\,(1-p)}$

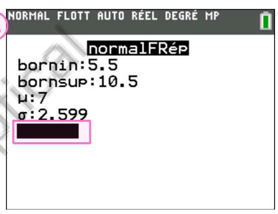
Écart type = $\sqrt{200 \times 0{,}035 \times (1-0{,}035)}$
Écart type = 2,599

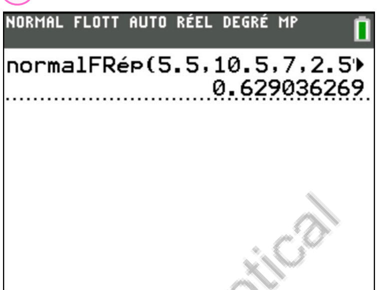
2)b)

$P(5{,}5 \leq Y \leq 10{,}5) \approx 0{,}609$

1


2


3


4


Il s'agit de la probabilité que le nombre de verres semi-finis défectueux dans l'échantillon soit compris entre 5,5 et 10,5

SUJET 2023 - Mathématiques
@maudoptical

PARTIE C - Loi Exponentielle

1)

$$E(T) = \frac{1}{0,2} = 5$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

<u>En moyenne, le temps d'attente est de 5 minutes</u>

2)

$$P(2 \leq T \leq 4) = e^{-0,2\times 2} - e^{-0,2\times 4} \approx 0,221$$

$$P(T \leq t) = 1-e^{-\lambda t}$$

PARTIE D - Estimation

1)

$$f = \frac{80}{100} = 0,8$$

2)

$$\left[f - 1,65 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + 1,65 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

$$\left[0,8 - 1,65 \sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{100}} \; ; \; 0,8 + 1,65 \sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{100}} \right]$$

[0,734 ; 0,866]

3)

$$1,65\sqrt{\frac{0,16}{n}} \leq 0,03$$

$$\sqrt{\frac{0,16}{n}} \leq \frac{0,03}{1,65}$$

$$\frac{0,16}{n} \leq \left(\frac{0,03}{1,65}\right)^2$$

$$\frac{0,16}{\left(\frac{0,03}{1,65}\right)^2} \leq n$$

$$\mathbf{n \geq 484}$$

<u>484 est la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance avec une marge d'erreur de 0,03</u>

Corrigé proposé par MaudOptical

Partie D. Estimation

L'usine souhaite estimer la proportion p de clients satisfaits d'un nouveau verre.

Sur un échantillon de 100 clients choisis au hasard, 80 d'entre eux ont déclaré être satisfaits.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion p.

2. Donner une estimation de p par un intervalle de confiance avec le coefficient de confiance de $90\ \%$.
On fournit la formule suivante :

Intervalle de confiance d'une proportion avec un coefficient de confiance de 90%
$\left[f - 1{,}65\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1{,}65\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$

3. Déterminer les entiers naturels n vérifiant l'inégalité : $1{,}65\sqrt{\frac{0{,}16}{n}} \leq 0{,}03$.

Interpréter le résultat dans le contexte.