Problème

Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et indépendantes.

On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.

On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par : $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \dfrac{1}{2}$.

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$P(\,[X \leq x] \cap [Y = 1]\,) = P(X \leq x)P(Y = 1) \text{ et } P(\,[X \leq x] \cap [Y = -1]\,) = P(X \leq x)P(Y = -1).$$

On pose $Z = X\,Y$ et on admet que Z est, elle aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

1) Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

2) En utilisant le système complet d'événements $\{\ (Y = 1), (Y = -1)\ \}$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\big(F_X(x) - F_X(-x) + 1\big).$$

Partie 2 : étude de deux premiers exemples

1) On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de Z.

2) On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.

b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

Partie 3 : étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

1) a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z(x)= \begin{cases} 1-\dfrac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.

c) Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

2) a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$.

b) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.

3) a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

4) a) Déterminer $E(X)E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

5) Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.

a) On pose $Q = -\ln(1-V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

b) On pose $R = 2U-1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable aléatoire R.