Exercice 1

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \le u_n < 1$.

b) Étudier les variations de la suite (u_n).

c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

2) Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = 1 - u_n$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}$.

b) Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de v_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

c) En déduire que $u_n \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.