

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt$ si $x > 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1) a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in [0, x], \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}$.

b) Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.

2) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire : $f'(x) = -\frac{4}{x^3} g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.

b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g . En déduire que f est décroissante sur \mathbb{R}_+ .

3) a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\frac{t}{e^t + 1} \leq 1$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.