حلول الكامل

توجيهي علمي

2025
2026
الفصل الثاني

الوحدة الرابعة

إعداد: أ.ميّ عمار حوّاري

إهـــــداء

إلى صاحبةُ القلبِ الأحنّ،

والأثر الأعمق،

إلى من كان حضورها فرقًا،

وكلماتها أثرًا لا يزول،

من غرست بداخلي حلمًا لا يزال يكبر،

ملهمتي وقدوتي... نجمتي اللامعة،

معلمتي الغالية **رولا بطة**، حفظكِ الله ورعاكِ دائمًا

أ. ميّ عمار حوّاري

مقدمة

إيماناً منا بضرورة توفير أفضل المصادر التعليمية لطلبتنا في مرحلة الثانوية العامة، يسّر فريق موقع قطرة التعليمي تقديم الإجابات النموذجية لـ "كراسة الكامل" (تصنيف أسئلة السنوات السابقة).

تأتي هذه الحلول ضمن إطار جهودنا المستمرة في موقع قطرة التعليمي، الذي تأسس برؤية طموحة تهدف إلى تزويد طلاب التوجيهي بتعليم عالي الجودة، لا سيما في مادة الرياضيات، مستخدمين أحدث الأساليب والوسائل التعليمية العالمية.

وقد تم إعداد هذه الكراسة خصيصاً لطلاب الفرع العلمي، لتتضمن حلولاً مفصلة وشرحاً وافياً لكل الأسئلة، انطلاقاً من إيماننا بأن التعلم الرقمي يمنح الطالب مرونة الوصول إلى المعرفة في أي وقت ومن أي مكان.

وإننا في موقع قطرة التعليمي، نؤمن بأن وراء كل إنجاز عظيم جنوداً مجهولين؛ لذا نتقدم بأسمى آيات الشكر والتقدير للمعلّمة الفاضلة **ميّ عمار حوّاري**، عضو فريقنا المتميز، التي سخرت وقتها وجهدها وخبرتها العميقة في إعداد هذه الحلول بدقة وإتقان. إن خبرتها الواسعة تجلت في أسلوب الشرح المبسط والواضح الذي يضع مصلحة الطالب وتفوقه الأكاديمي في المقام الأول؛ فجزيل الشكر لها، ونسأل الله أن يجعل هذا العمل في ميزان حسناتها.

أتمنى أن تكون هذه الكراسة عونًا لكم في رحلتكم نحو النجاح، وأن تساهم في تحقيق التفوق والتميز الذي تسعون إليه.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح الدائم.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/kamel4

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath

نصائح مهمة لكيفية دراسة الرياضيات؟

عزيزي الطالب/ عزيزتي الطالبة، إليك بعض النصائح التي ستساعدك على التفوق في دراستك لهذه المادة وتحقيق أفضل النتائج:

1. **إخلاص النية لله.**
2. **التوكل على الله** بالأخذ بجميع أسباب التفوق، والدعاء والإلحاح فيه فهو من أعظم أسلحة المسلم.
3. **فهم الأساسيات أولًا:** تأكد من أنك تفهم الأساسيات بشكل جيد. ولضمان التمكن من الأساسيات فقد وفرنا دورة مجانية عبر موقع قطرة التعليمي.
4. **التدريب المستمر باستخدام الورقة والقلم:** الحل المتكرر هو الطريق إلى الإتقان، حل المسائل بانتظام وبشكل يومي سيعزز من فهمك ويساعدك على استيعاب المفاهيم بشكل أعمق.
5. **افهم المسألة قبل الحل:** لا تتسرع في حل المسألة دون فهم كامل لمتطلباتها، خذ وقتك في قراءة السؤال جيدًا، وفهم المطلوب قبل الشروع في الحل، التسرع قد يؤدي إلى أخطاء غير ضرورية.
6. **حل المسائل بطريقة منظمة:** نظم خطوات الحل بطريقة واضحة ومنهجية، تدوين الخطوات بتسلسل منطقي يساعدك على متابعة الحل والتعرف على أي خطأ قد يحدث بسهولة، هذا الأسلوب يعزز أيضًا من فرصك في الحصول على درجات كاملة.
7. **راجع بانتظام:** خصص وقتًا لمراجعة ما تعلمته بانتظام، ولا تترك الأمور تتراكم حتى اقتراب موعد الامتحانات، المراجعة المستمرة تسهل تذكر المعلومات وتجعلك أكثر استعدادًا للامتحان.
8. **لا تخجل من طلب المساعدة:** إذا واجهت صعوبة في فهم مفهوم معين أو في حل مسألة ما، لا تتردد في طلب المساعدة من معلمك أو زملائك، الحوار والتفاعل مع الآخرين قد يفتح لك آفاقًا جديدة لفهم المادة.
9. **حافظ على هدوئك وثقتك بنفسك:** التوتر قد يؤثر سلبًا على أدائك، حافظ على هدوءك وثقتك بنفسك أثناء الدراسة وفي الامتحانات، تذكر أن النجاح في الرياضيات يعتمد على الاستمرارية والعمل الجاد، وليس على الحفظ فقط.

10. **استعد للامتحانات بالتحضير المبكر:** لا تنتظر حتى اللحظة الأخيرة، ابدأ في التحضير للامتحانات قبل وقت كافٍ، وضع خطة دراسية تغطي جميع الوحدات بشكل متوازن، قم بحل أسئلة الامتحانات السابقة المرفقة في هذه الكراسة، وتأكد من مراجعة الحلول بعد الانتهاء.

11. **قم بتحليل الأخطاء:** عند ارتكاب خطأ في حل مسألة، لا تتجاهله. بدلاً من ذلك، عد إليه وحاول فهم سبب الخطأ وكيف يمكنك تجنبه في المستقبل، التعلم من الأخطاء يُعد أحد أفضل الطرق لتطوير مهاراتك الرياضية.

12. **اجعل لك دفتراً خاصاً لتدوين كل ما يتم دراسته واحرص على تدوين الملاحظات المهمة:** أثناء حل المسائل أو مشاهدة الفيديوهات، احرص على تدوين كل شيء لأنه سيكون من الصعب مشاهدة الفيديوهات في يوم واحد مثل يوم الامتحان، وكتابة الملاحظات المهمة تساعدك على تنظيم أفكارك وتذكر النقاط المهمة عند المراجعة لاحقًا.

نتمنى لك التوفيق والنجاح في رحلتك الدراسية، ونتطلع لأن تكون هذه الكراسة عونًا لك في تحقيق أهدافك في مادة الرياضيات. تذكر أن كل مجهود تبذله اليوم سيثمر في المستقبل.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

الدرس الأول والثاني | التكامل غير المحدود وقواعده

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2011/ إذا كان م(س)، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س) فإن $(3هـ - م)'(س) =$

أ/ $ق'(س)$ ب/ $2ق'(س)$ جـ/ $ق(س)$ د/ $2ق(س)$

الحل/ م(س)، هـ(س) اقترانين أصليين لـ ق(س) ⟸ $م'(س) = هـ'(س) = ق(س)$ "بشرط متصل"

المطلوب/ $(3هـ - م)'(س) = 3هـ'(س) - م'(س)$

$= 3ق(س) - ق(س) = 2ق(س)$ د

• 2011/ $\int \frac{هـ^{س+1}}{هـ^{س-1}} دس =$

أ/ $\frac{هـ^3}{3} + جـ$ ب/ $-س + جـ$ جـ/ $لو_هـ (هـ)^{س-1} + جـ$ د/ $هـ^2 س + جـ$

الحل/ $\int \frac{هـ^{س+1}}{هـ^{س-1}} دس = \int هـ^{(س+1)-(س-1)} دس$

تذكر/ $\frac{أ^ن}{أ^م} = أ^{ن-م}$

$= \int هـ^{س+1-س+1} دس = \int هـ^2 دس = هـ^2 س + جـ$ د

ثابت

• 2016 إكمال/ ليكن $ق(2) = 3$، $ق'(س) = 2س$ فإن ق(3) يساوي

أ/ 10 ب/ 9 جـ/ 8 د/ 6

الحل/ $ق'(س) = 2س$ نأخذ التكامل للطرفين

$\int ق'(س) دس = \int (2س) دس$

$ق(س) = س^2 + جـ$ ⟸ $ق(2) = 2^2 + جـ$ ⟸ $3 = 4 + جـ$ ⟸ $-1 = جـ$

⟸ $ق(س) = س^2 - 1$

$ق(3) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$ جـ

• 2018 دور أول/ $\int هـ^{(قا^2 س - ظا^2 س)} دس =$

أ/ $هـ^س + جـ$ ب/ $\frac{1}{هـ} س + جـ$ جـ/ $هـ س + جـ$ د/ $هـ^{-س} + جـ$

الحل/ $قا^2 س = ظا^2 س + 1$ ⟸ $قا^2 س - ظا^2 س = 1$

⟸ $\int هـ^{(قا^2 س - ظا^2 س)} دس = \int هـ^1 دس = هـ س + جـ$ جـ

• 2018 دور ثاني/ $\int ظا س دس$

أ/ $-لو_هـ |جا س| + جـ$ ب/ $-لو_هـ |جتا س| + جـ$ جـ/ $لو_هـ |جا س| + جـ$ د/ $-ظا س قا س + جـ$

الحل/ $\int$ ظتاس دس $= \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ دس = لو|جاس| + جـ "لاحظ البسط = مشتقة المقام"

جـ

• 2018 دور ثاني/ $\int$ س^5 $(6 - \frac{1}{\text{س}})^5$ دس

أ/ $\frac{(6\text{س}-1)^6}{6}$ + جـ ب/ $\frac{(6\text{س}-1)^6}{36}$ + جـ جـ/ $\frac{(6\text{س}-1)^6}{30}$ + جـ د/ $(6\text{س}-1)^6$ + جـ

الحل/ $\int$ س^5 $(6 - \frac{1}{\text{س}})^5$ دس $= \int$ س^5 $\left(\frac{6\text{س}-1}{\text{س}}\right)^5$ دس $= \int$ س^5 $\frac{(6\text{س}-1)^5}{\text{س}^5}$ دس

توحيد مقامات

$= \int (6\text{س}-1)^5$ دس $= \frac{(6\text{س}-1)^6}{6} \times \frac{1}{6}$ + جـ $= \frac{(6\text{س}-1)^6}{36}$ + جـ ب

• 2019 دور أول/ ما قيمة $\int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}$ دس

أ/ ظاس + جـ ب/ -ظاس + جـ جـ/ ظتاس + جـ د/ -ظتاس + جـ

الحل/ $\int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}$ دس $= \int$ قا^{2}س دس = ظاس + جـ أ

• 2019 دور أول/ جد $\int \frac{3\text{س}}{2\sqrt{\text{س}}}$ دس

س ≥ 0

أ/ $\frac{3}{\sqrt{\text{س}}}$ + جـ ب/ 2س$\sqrt{\text{س}}$ + جـ جـ/ س$\sqrt{\text{س}}$ + جـ د/ س$^2\sqrt{\text{س}}$ + جـ

الحل/ $\int \frac{3}{2} \times \frac{\text{س}^1}{\text{س}^{\frac{1}{2}}}$ دس $= \int \frac{3}{2}$ س$^{1-\frac{1}{2}}$ دس $= \int \frac{3}{2}$ س$^{\frac{1}{2}}$ دس $= \frac{3}{2} \times \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}+1}}{(\frac{1}{2}+1)}$ + جـ

$= \frac{3}{2} \times \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ + جـ $= \frac{3}{2} \times \frac{2}{3}$ س$^{\frac{3}{2}}$ + جـ = س$^{\frac{3}{2}}$ + جـ $= \sqrt{\text{س}^3}$ + جـ

قلب

$= \sqrt{\text{س}^2 \times \text{س}}$ + جـ $= \sqrt{\text{س}^2} \times \sqrt{\text{س}}$ + جـ = |س|$\sqrt{\text{س}}$ + جـ = س$\sqrt{\text{س}}$ + جـ

س ≥ 0

جـ

• 2019 دور أول/ إذا كان $\int$ ق(س) دس = أس^3 - 3س ، ق(س) متصل وكان ق(2) - ق(1) = 18

• ما قيمة ق(1)

أ/ 3 ب/ 6 جـ/ 9 د/ 21

الحل/ $\int$ ق(س) دس = أس^3 - 3س باشتقاق الطرفين

$\left(\int \text{ق(س) دس} = \text{أس}^3 - 3\text{س}\right)'$

ق(س) = 3أس^2 - 3 ⇐ ق(2) = 3أ(2)^2 - 3 = 12أ - 3

ق(1) = 3أ(1)^2 - 3 ⇐ ق(1) = 3أ - 3

⇐ ق(2) - ق(1) = 18 ⇐ (12أ - 3) - (3أ - 3) = 18 ⇐ 12أ $\cancel{-3}$ - 3أ $\cancel{+3}$ = 18

٩أ/٩ = ١٨/٩ ⇐ أ = ٢

ق(١) = ٣أ − ٣ ⇐ ق(١) = ٣×٢ − ٣ ⇐ ق(١) = ٦ − ٣ = ٣   أ

• 2019 دورثاني / إذا كان م(س)، ﻫ(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س) وكان ق(٢) = ٩، قَ(٢) = ٤، ما قيمة (٥م − ٣ﻫ)′(٢)

أ/ −٨   ب/ صفر   جـ/ ٨   د/ ١٨

الحل/ م(س)، ﻫ(س) اقترانين أصليين لـ ق(س) ⇐ مَ(س) = ﻫَ(س) = ق(س)

(٥م − ٣ﻫ)′(س) = ٥مَ(س) − ٣ﻫَ(س) = ٥ق(س) − ٣ق(س) = ٢ق(س)

(٥م − ٣ﻫ)′(٢) = ٢ق(٢) = ٢×٩ = ١٨   د

• 2019 دورثاني / جد ∫ جاس قاس دس

أ/ لوﻫ|جاس| + جـ   ب/ − لوﻫ|جتاس| + جـ   جـ/ لوﻫ|جتاس| + جـ   د/ − لوﻫ|جاس| + جـ

الحل/ ∫ جاس قاس دس = ∫ جاس × (١/جتاس) دس = ∫ (جاس/جتاس) دس

= − ∫ (−جاس/جتاس) دس = − لوﻫ|جتاس| + جـ   ب   «لاحظ أن البسط = مشتقة المقام»

• 2019 دورثاني / إذا كان ق(س) اقتران متصلاً على مجاله وكان ∫ ق(س) دس = س³ − لوﻫ س + جـ ما قيمة قَ(١)

أ/ ٧   ب/ ٥   جـ/ ٢   د/ −٢

الحل/ ∫ ق(س) دس = س³ − لوﻫ س + جـ باشتقاق الطرفين

(∫ ق(س) دس)′ = (س³ − لوﻫ س + جـ)′

ق(س) = ٣س² − ١/س ⇐ قَ(س) = ٦س + ١/س² ⇐ قَ(١) = ٦ + ١ = ٧   أ

• 2019 دورثاني / اذا كان قَ(س) − ﻫ^س = ٢ وكان ق(١) = ﻫ ما قيمة ق(٠)

أ/ صفر   ب/ −٢   جـ/ −١   د/ ١

الحل/ قَ(س) − ﻫ^س = ٢ ⇐ قَ(س) = ٢ + ﻫ^س   نأخذ التكامل للطرفين

∫ قَ(س) دس = ∫ (٢ + ﻫ^س) دس

ق(س) = ٢س + ﻫ^س + جـ

ق(١) = ٢ + ﻫ + جـ ⇐ ﻫ = ٢ + ﻫ + جـ ⇐ جـ = −٢

⇐ ق(س) = ﻫ^س + ٢س − ٢

ق(٠) = ﻫ^٠ + ٢×٠ − ٢ = ١ − ٢ = −١   جـ

" كلّ الشكر والتقدير للأستاذ: مُحمّد عزمي القطراوي "

• 2019 دور ثاني / ما قيمة $\int (\text{لوهـ}\ \text{هـ}^{2})\ \text{دس}$

أ/ $٢\text{س}+\text{جـ}$ ب/ $\text{هـ}^{٢\text{س}}+\text{جـ}$ جـ/ $\text{هـ}^{2}+\text{جـ}$ د/ $\text{هـ}\text{س}+\text{جـ}$

الحل/

$\text{لوهـ}\ \text{هـ}^{2} = ٢\ \text{لوهـ}\ \text{هـ} = ٢$

$\Leftarrow \int \text{لوهـ}\ \text{هـ}^{2}\ \text{دس} = \int ٢\ \text{دس} = ٢\text{س}+\text{جـ}$ أ

• 2019 دور ثالث / إذا كان $\int \text{ق}(\text{س})\text{دس} = \text{س}^{2} - \text{أ}\ \text{جتا}(\frac{1}{2}\text{س})$ وكان $\text{ق}(\pi)=٣\pi$ ما قيمة الثابت أ

أ/ ٦π ب/ -٢π جـ/ $\frac{\pi}{2}$ د/ ٢π

الحل/

$\int \text{ق}(\text{س})\text{دس} = \text{س}^{2} - \text{أ}\ \text{جتا}(\frac{1}{2}\text{س})$ باشتقاق الطرفين

$\left(\int \text{ق}(\text{س})\text{دس}\right)' = \left(\text{س}^{2} - \text{أ}\ \text{جتا}(\frac{1}{2}\text{س})\right)'$

$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} - \text{أ} \times -\text{جا}(\frac{1}{2}\text{س}) \times \frac{1}{2}$

$\text{ق}(\pi) = ٢\pi + \frac{\text{أ}}{2}\text{جا}(\frac{\pi}{2}) \Leftarrow ٣\pi = ٢\pi + \frac{\text{أ}}{2} \Leftarrow \pi = \frac{\text{أ}}{2} \Leftarrow ٢\pi = \text{أ}$ د

• 2019 دور ثالث / ما قيمة $\int \left(\frac{\text{هـ}^{\text{س}+2}}{\text{هـ}^{\text{س}+1}}\right) \text{دس}$

أ/ $\text{هـ}^{\text{س}+1}+\text{جـ}$ ب/ $\text{س}+\text{جـ}$ جـ/ $\text{هـ}\text{س}+\text{جـ}$ د/ $\text{هـ}^{2}\text{س}+\text{جـ}$

الحل/

$\int \left(\frac{\text{هـ}^{\text{س}+2}}{\text{هـ}^{\text{س}+1}}\right) \text{دس} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{2}}{\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{1}} \text{دس} = \int \text{هـ}\ \text{دس} = \text{هـ}\text{س}+\text{جـ}$ جـ

• 2019 دور ثالث / إذا كان $\text{قَ}(\text{س}) = ٢\text{س}+٥$ ما قيمة $\text{ق}(٢) - \text{ق}(-٢)$

أ/ صفر ب/ ٨ جـ/ ٢٠ د/ ٢٨

الحل/

$\text{قَ}(\text{س}) = ٢\text{س}+٥$ بأخذ التكامل للطرفين

$\int \text{قَ}(\text{س})\text{دس} = \int (٢\text{س}+٥)\ \text{دس}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{2}+٥\text{س}+\text{جـ}$

$\text{ق}(٢) = ٢^{2}+٥(٢)+\text{جـ} = ٤+١٠+\text{جـ} = ١٤+\text{جـ}$

$\text{ق}(-٢) = (-٢)^{2}+٥(-٢)+\text{جـ} = ٤-١٠+\text{جـ} = -٦+\text{جـ}$

$\text{ق}(٢)-\text{ق}(-٢) = (١٤+\text{جـ}) - (-٦+\text{جـ}) = ١٤+\cancel{\text{جـ}}+٦-\cancel{\text{جـ}} = ١٤+٦ = ٢٠$ جـ

• 2020 دور أول / إذا كان $\int \frac{1}{\text{س}} \times \text{ل}(\text{س})\ \text{دس} = \text{س}+\text{جـ}$ ، $\text{س} \neq ٠$ ما قاعدة الاقتران ل(س)

أ/ س ب/ س^{2} جـ/ ١ د/ صفر

الحل/

$\int \frac{\text{ل}(\text{س})}{\text{س}}\text{دس} = \text{س}+\text{جـ}$ نشتق الطرفين

$\left(\int \frac{\text{ل}(\text{س})}{\text{س}}\text{دس} = \text{س}+\text{جـ}\right)' \Leftarrow \frac{\text{ل}(\text{س})}{\text{س}} = ١ \Leftarrow \text{ل}(\text{س}) = \text{س}$ أ

• 2020 دور أول/ ما ناتج $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س-١}}\, دس$ حيث هـ العدد النيبري:

أ/ $هـ^{س} + جـ$ ب/ $لو_{هـ} هـ^{س-١} + جـ$ جـ/ $\frac{هـ^{٢}}{٢} + جـ$ د/ $هـ س + جـ$

الحل/

$$\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س-١}}\, دس = \int \frac{\cancel{هـ^{س}}}{\cancel{هـ^{س}} \times هـ^{-١}}\, دس = \int \frac{١}{هـ^{-١}}\, دس = \int هـ\, دس = هـ س + جـ$$ د

• 2020 دور أول/ إذا كان $ق(س) = \frac{د}{دس}(١ - \sqrt{س})$ فأي مما الآتية تمثل $\int ق(س)\, دس$

أ/ $-\frac{١}{٢}\sqrt{س} + جـ$ ب/ $س - \sqrt{س} + جـ$ جـ/ $-\sqrt{س} + جـ$ د/ $س - \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

الحل/

$ق(س) = \frac{د}{دس}(١ - \sqrt{س})$ بأخذ التكامل للطرفين

$$\int ق(س)\, دس = \int \frac{د}{دس}(١ - \sqrt{س})\, دس \Leftarrow \int ق(س)\, دس = ١ - \sqrt{س} + جـ ،$$

$$\Leftarrow \int ق(س)\, دس = -\sqrt{س} + جـ$$ جـ

لاحظ $١ + جـ = جـ$
ثابت + ثابت = ثابت.

• 2020 دور أول/ ليكن الاقتران م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) المتصل على ح فإذا كان
$\int س^{٢} ق(س)\, دس = ٣م(س) + ٢س^{٢} + جـ$ ، ما قيمة ق(١)

أ/ −٢ ب/ ٥ جـ/ ٧ د/ $\frac{٧}{٢}$

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ ق $\Leftarrow$ مَ(س) = ق(س)

$\int س^{٢} ق(س)\, دس = ٣م(س) + ٢س^{٢} + جـ$ باشتقاق الطرفين

$$\left(\int س^{٢} ق(س)\, دس\right)' = \left(٣م(س) + ٢س^{٢} + جـ\right)'$$

$$س^{٢} ق(س) = ٣مَ(س) + ٢ \times ٢س \Leftarrow س^{٢} ق(س) = ٣ق(س) + ٤س$$

$$(١)^{٢} ق(١) = ٣ق(١) + ٤ \times ١$$

$$\Leftarrow ق(١) = ٣ق(١) + ٤ \Leftarrow \frac{-٤}{٢} = \frac{٢ق(١)}{٢} \Leftarrow ق(١) = -٢$$ أ

• 2020 دور ثاني/ إذا علمت أن $\int \frac{هـ(س)}{هـ(س) + ق(س)}\, دس = ٢س + جـ$ ما ناتج $\int \frac{ق(س)}{هـ(س) + ق(س)}\, دس$

أ/ $٣س + جـ$ ب/ $٢س + جـ$ جـ/ $-س + جـ$ د/ $س^{٢} + جـ$

الحل/ طريقة (١):

$\int \frac{هـ(س)}{هـ(س) + ق(س)}\, دس = ٢س + جـ$ " إضافة وطرح ق(س) في البسط "

$$\Leftarrow \int \frac{(هـ(س) + ق(س)) - ق(س)}{(هـ(س) + ق(س))}\, دس = ٢س + جـ$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{هـ(س) + ق(س)}}{هـ(س) + ق(س)} + \frac{-ق(س)}{هـ(س) + ق(س)}\, دس = ٢س + جـ$$

$\Leftarrow \int ١\, دس - \int \frac{ق(س)}{هـ(س)+ق(س)}\, دس = ٢س + جـ$

$\Leftarrow س - \int \frac{ق(س)}{هـ(س)+ق(س)}\, دس = ٢س + جـ \Leftarrow س - ٢س - جـ = \int \frac{ق(س)}{ق(س)+هـ(س)}\, دس$

$\Leftarrow -س - \underbrace{جـ}_{مجرد\ ثابت} = \int \frac{ق(س)}{ق(س)+هـ(س)}\, دس \Leftarrow \int \frac{ق(س)}{ق(س)+هـ(س)}\, دس = -س + جـ$ جـ

طريقة (٢): $\int \frac{هـ(س)}{هـ(س)+ق(س)}\, دس = ٢س + جـ$ نشتق الطرفين.

$\left(\int \frac{هـ(س)}{هـ(س)+ق(س)}\, دس\right)' = (٢س + جـ)'$

$\frac{هـ(س)}{هـ(س)+ق(س)} = ٢ \Leftarrow هـ(س) = ٢هـ(س) + ٢ق(س)$

$-هـ(س) = ٢ق(س) \Leftarrow هـ(س) = -٢ق(س)$

المطلوب/ $\int \frac{ق(س)}{هـ(س)+ق(س)}\, دس = \int \frac{ق(س)}{-٢ق(س)+ق(س)}\, دس = \int \frac{\cancel{ق(س)}}{-\cancel{ق(س)}}\, دس$

$= \int -١\, دس = -س + جـ$

• 2020 دور ثاني/ إذا كان م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س)، ما العبارة الصحيحة مما يلي:

أ/ $ق(س) = م(س)$ ب/ $قَ(س) = م(س)$ جـ/ $قَ(س) = مَ(س)$ د/ $ق(س) = مَ(س)$

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) $\Leftarrow مَ(س) = ق(س)$، ق متصل.   د

• 2020 دور ثاني / ما ناتج $\int \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١}\, دس$

أ/ $\frac{-٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$ ب/ $\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$ جـ/ $\frac{-٣}{٢} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$ د/ $\frac{٣}{٢} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

الحل/ $\int \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١} = \int \left(\frac{\sqrt{س} \times \sqrt{س} - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١}\right) دس$ بإخراج $\sqrt{س}$ عامل مشترك

$= \int \frac{\sqrt{س}\,(\sqrt{س} - ١)}{(\sqrt{س} - ١)}\, دس = \int \sqrt{س}\, دس = \int س^{\frac{١}{٢}}\, دس = \frac{س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + جـ$

$= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$ ب

مقلوبة

• 2020 دورة ثاني / إذا كان $قَ(س) = ٣ق(س)$ ، $ق(س) > ٠$ ، ما الاقتران الذي يمثل $ق(س)$

أ/ $جـ هـ^{٣س}$ ب/ $هـ^{٣س} + جـ$ جـ/ $لو_{هـ}(ق(س)) + جـ$ د/ $لو_{هـ}(ق(س)) - ٣س)$

الحل/ $قَ(س) = ٣ق(س)$

$$\Leftarrow \frac{قَ(س)}{ق(س)} = ٣$$ بأخذ التكامل للطرفين

$$\int \frac{قَ(س)}{ق(س)} دس = \int ٣ \, دس \Leftarrow لو_{هـ}|ق(س)| = ٣س + جـ$$

$$\Leftarrow لو_{هـ}(ق(س)) = ٣س + جـ \text{ ، } ق(س) > ٠$$

بتحويلها للصورة الأسية / $هـ^{٣س+جـ} = ق(س) \Leftarrow هـ^{٣س} \times هـ^{جـ} = ق(س)$

ثابت ← نفرضه ثابت جديد

$$\Leftarrow هـ^{٣س} \times جـ = ق(س)$$ أ

• 2020 دورة ثاني / ما ناتج $\int (\frac{٤}{س} - هـ^{-س}) دس$

أ/ $٤لو_{هـ}|س| - هـ^{-س} + جـ$ ب/ $٤لو_{هـ}|س| + هـ^{-س} + جـ$ جـ/ $٤لو_{هـ}|س| - هـ^{س} + جـ$

د/ $٤لو_{هـ}|س| + هـ^{س} + جـ$

الحل/

$$\int \frac{٤}{س} - هـ^{-س} دس = ٤لو_{هـ}|س| - \frac{هـ^{-س}}{-١} + جـ = ٤لو_{هـ}|س| + هـ^{-س} + جـ$$ ب

• 2020 دورة ثاني / ما ناتج $\int (قا^{٤}س - ظا^{٤}س) دس$

أ/ $-٢ظاس + س + جـ$ ب/ $٢ظاس + قا^{٣}س + جـ$ جـ/ $ظا^{٤}س - قا^{٣}س + جـ$

د/ $٢ظاس - س + جـ$

الحل/

$$\int (\underbrace{قا^{٤}س - ظا^{٤}س}_{\text{فرق مربعين}}) دس = \int (قا^{٢}س - ظا^{٢}س)(قا^{٢}س + ظا^{٢}س) دس$$

$$= \int ١ \times (قا^{٢}س + قا^{٢}س - ١) دس = \int ٢قا^{٢}س - ١ \, دس = ٢ظاس - س + جـ$$ د

• 2020 دورة ثالث / ما ناتج $\int (جتا^{٤}س - جا^{٤}س) دس$

أ/ $جتا(٢س) + جـ$ ب/ $\frac{١}{٢}جا(٢س) + جـ$ جـ/ $-\frac{١}{٢}جا(٢س) + جـ$ د/ $\frac{١}{٢}جتا(٢س) + جـ$

الحل/

$$\int (\underbrace{جتا^{٤}س - جا^{٤}س}_{\text{فرق مربعين}}) دس = \int (جتا^{٢}س - جا^{٢}س)(جتا^{٢}س + جا^{٢}س) دس = \int جتا(٢س) \times ١ \, دس$$

$$= \int جتا(٢س) دس = \frac{١}{٢}جا(٢س) + جـ$$ ب

• 2020 دور ثالث / إذا كان $\int (٢س-١)\,ق(س)\,دس = س^٣ + س^٢ - ٣س + جـ$ وكان الاقتران ق(س) متصلاً ما قيمة قَ(٣)

أ/ ١٫٦ ب/ ٫٨ جـ/ ٥ د/ ٦

الحل/ $\int (٢س-١)\,ق(س)\,دس = س^٣ + س^٢ - ٣س + جـ$ باشتقاق الطرفين

$$\left[\int (٢س-١)\,ق(س)\,دس = س^٣ + س^٢ - ٣س + جـ\right]'$$

$$(٢س-١)\,ق(س) = ٣س^٢ + ٢س - ٣$$

$$ق(س) = \frac{٣س^٢ + ٢س - ٣}{٢س - ١}$$

$$قَ(س) = \frac{(٢س-١)(٦س+٢) - (٣س^٢+٢س-٣)(٢)}{(٢س-١)^٢}$$

$$قَ(٣) = \frac{(٢\times٣-١)(٦\times٣+٢) - ٢(٣(٣)^٢+٢\times٣-٣)}{(٢\times٣-١)^٢} = \frac{٥\times٢٠ - ٢\times٣٠}{(٥)^٢}$$

$$\Leftarrow قَ(٣) = \frac{١٠٠ - ٦٠}{٢٥} = \frac{٤٠}{٢٥} = \frac{٨}{٥} = ١٫٦ \qquad أ$$

• 2020 دور ثالث / ما ناتج $\int قا^٢(\frac{\pi}{٤})\,دس$

أ/ $\frac{١}{٤}ظا(\frac{\pi}{٤}) + جـ$ ب/ $٢س + جـ$ جـ/ $\frac{٤}{\pi}ظا(\frac{\pi}{٤}س) + جـ$ د/ ٢

الحل/

$$\int قا^٢(\frac{\pi}{٤})\,دس = \int (\sqrt{٢})^٢\,دس = \int ٢\,دس = ٢س + جـ \qquad ب$$

• 2020 دور ثاني / إذا كان $\int قَ(س)\,دس = جا^٢س - أ\,جتاس + ١$ وكان $قَ(\frac{\pi}{٤}) = ٠$ ، ما قيمة الثابت أ

أ/ $\sqrt{٢}$ ب/ $-\sqrt{٢}$ جـ/ $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ د/ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

الحل/ $\int قَ(س)\,دس = جا^٢س - أ\,جتاس + ١$ نشتق الطرفين

$$\left(\int قَ(س)\,دس\right)' = \left(جا^٢س - أ\,جتاس + ١\right)'$$

$$قَ(س) = ٢جاس\,جتاس + أ\,جاس$$

$$قَ(س) = جا(٢س) + أ\,جاس$$

$$قَ(\frac{\pi}{٤}) = جا(\frac{\pi}{٢}) + أ\,جا(\frac{\pi}{٤}) \Leftarrow ٠ = ١ + \frac{١}{\sqrt{٢}}أ \Leftarrow -١ = \frac{أ}{\sqrt{٢}}$$

$$\Leftarrow -\sqrt{٢} = أ \qquad ب$$

• 2021 دور ثاني / اذا كان الاقتران م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران $ق(س) = \frac{١}{س-٣}$ ، $س \neq ٣$

ما هو الاقتران م(س) من الآتية :

أ/ $-لو_{هـ}|س-٣|$ ب/ $\frac{١}{(س-٣)}$ ، جـ/ $لو_{هـ}|س-٣|$ د/ $\frac{-١}{(س-٣)^٢}$

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) ⇐ م′(س) = ق(س) نأخذ التكامل للطرفين

$$\int \text{م}'(\text{س})\, \text{دس} = \int \text{ق}(\text{س})\, \text{دس}$$

$$\text{م}(\text{س}) = \int \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = \int \frac{1}{\text{س}-3}\, \text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{م}(\text{س}) = -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-3| + \text{جـ}$$ أ

• 2021 دور أول/ ما قيمة $\int (2\text{س}-4)^5\, \text{دس}$

أ/ $\frac{(2\text{س}-4)^6}{6} + \text{جـ}$ ب/ $\frac{(2\text{س}-4)^6}{12} + \text{جـ}$ جـ/ $10(2\text{س}-4)^4 + \text{جـ}$

د/ $\frac{(2\text{س}-4)^5}{11} + \text{جـ}$

الحل/ $\int (2\text{س}-4)^5\, \text{دس} = \frac{(2\text{س}-4)^6}{6} \times \frac{1}{2} + \text{جـ} = \frac{(2\text{س}-4)^6}{12} + \text{جـ}$ ب

• 2021 دور أول/ إذا كان الاقتران م(س) هو اقتران أصلي للاقتران ق(س) المتصل في مجاله حيث $\int \left(\text{ق}(\text{س}) + \frac{\text{ل}^3-12}{(\text{س}-1)^2}\right) \text{دس} = \text{م}(\text{س}) + \frac{4}{\text{س}-1}$ ، ما قيمة الثابت ل

أ/ −٨ ب/ −٢ جـ/ ٢ د/ ٨

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) ⇐ م′(س) = ق(س)

$$\int \text{ق}(\text{س}) + \frac{\text{ل}^3-12}{(\text{س}-1)^2}\, \text{دس} = \text{م}(\text{س}) + \frac{4}{\text{س}-1}$$ نشتق الطرفين.

$$\left[\int \left(\text{ق}(\text{س}) + \frac{\text{ل}^3-12}{(\text{س}-1)^2}\right) \text{دس}\right]' = \left(\text{م}(\text{س}) + \frac{4}{\text{س}-1}\right)'$$

$$\text{ق}(\text{س}) + \frac{\text{ل}^3-12}{(\text{س}-1)^2} = \text{م}'(\text{س}) - \frac{4}{(\text{س}-1)^2}$$

م′(س) = ق(س)

$$\Leftarrow \frac{\text{ل}^3-12}{(\text{س}-1)^2} = \frac{-4}{(\text{س}-1)^2} \Leftarrow \text{ل}^3-12 = -4 \Leftarrow \sqrt[3]{\text{ل}^3} = \sqrt[3]{8} \Leftarrow \text{ل} = 2$$ جـ

• 2021 دور ثاني/ أي من الآتية يساوي $\int 5(1-\text{س})(1+\text{س})(1+\text{س}^2)\, \text{دس}$

أ/ $5\text{س} - \text{س}^5 + \text{جـ}$ ب/ $\text{س} - \frac{1}{5}\text{س}^5 + \text{جـ}$ جـ/ $1 - \text{س}^4 + \text{جـ}$ د/ $5\text{س} + \frac{5}{3}\text{س}^3 + \text{جـ}$

الحل/

$$\int (5)\underbrace{(1-\text{س})(1+\text{س})}_{\text{فرق مربعين}}(1+\text{س}^2)\, \text{دس} = \int 5\underbrace{(1-\text{س}^2)(1+\text{س}^2)}_{\text{فرق مربعين}}\, \text{دس}$$

$$= \int 5(1-\text{س}^4)\, \text{دس} = 5\left(\text{س} - \frac{1}{5}\text{س}^5\right) + \text{جـ} = 5\text{س} - \text{س}^5 + \text{جـ}$$ أ

• 2021 دور ثالث / إذا كان ق(س) = ٢س ، ل(س) = ٣س^2 ما قيمة ∫ ق(س) × ل(س) دس

أ/ ٦س^3 + جـ   ب/ س^6 + جـ   جـ/ $\frac{س^6}{٦}$ + جـ   د/ $\frac{٣}{٢}$ س^4 + جـ

الحل/

∫ ق(س) × ل(س) دس = ∫ ٢س × ٣س^2 دس = ∫ ٦س^3 دس = $\frac{٦}{٤}$ س^4 + جـ

= $\frac{٣}{٢}$ س^4 + جـ   د

* انتبه : ∫ ق(س) × ل(س) دس ≠ ∫ ق(س) دس × ∫ ل(س) دس .

• 2021 دور ثالث / ما ناتج ∫ $\frac{١}{جتا^2 س}$ دس

أ/ ظاس + جـ   ب/ قاس + جـ   جـ/ ظا^{2}س + جـ   د/ −ظتاس + جـ

الحل/ ∫ $\frac{١}{جتا^2 س}$ دس = ∫ قا^{2}س دس = ظاس + جـ   أ

• 2022 دور أول / ما ناتج ∫ $\frac{١}{١ + هـ^{س}}$ دس حيث هـ العدد النيبري

أ/ لوهـ|هـ^{س} + ١| + جـ   ب/ لوهـ|هـ$^{-س}$ + ١| + جـ   جـ/ هـ^{س} + س + جـ   د/ لوهـ|هـ^{س} + ١| + جـ

الحل/

∫ $\frac{١}{١ + هـ^{س}}$ دس = ∫ $\frac{١}{١ + \frac{١}{هـ^{س}}}$ دس = ∫ $\frac{١}{\frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س}}}$ دس = ∫ $\frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$ دس

توحيد مقامات

= لوهـ|هـ^{س} + ١| + جـ   أ   "لاحظ البسط = مشتقة المقام"

• 2022 دور أول / ما ناتج ∫ جاس قتا^{2}س دس

أ/ قاس + جـ   ب/ ظاس + جـ   جـ/ قا^{2}س + جـ   د/ قا^{3}س + جـ

الحل/ ∫ جاس قا^{2}س دس = ∫ جاس × $\frac{١}{جتا^2 س}$ دس = ∫ $\frac{جاس}{جتاس}$ × $\frac{١}{جتاس}$ دس

= ∫ ظاس قاس دس = قاس + جـ   أ

• 2023 دور أول / ما ناتج ∫ (هـ^2 + $\frac{١}{جتا^2 س}$) دس ، حيث هـ العدد النيبري

أ/ $\frac{هـ^3}{٣}$ + ظاس + جـ   ب/ هـ^{2}س − ظاس + جـ   جـ/ هـ^{2}س + ظاس + جـ   د/ هـ^{2}س + ظتاس + جـ

الحل/ ∫ هـ^2 + قا^{2}س دس = هـ^2 × س + ظاس + جـ   جـ

.. إنّما النصر صبر ساعة ..

• 2023 دور أول / إذا كان ∫(ق(س) جاس) دس = − ق(س) جتاس + ∫(٣س^٢ جتاس) دس
ما قاعدة الاقتران ق(س) حيث س ∈]$\frac{\pi}{2}$ ، π[

أ) ٣س^٢ ب) س^٣ + جـ جـ) −٣س^٢ د) −س^٣ + جـ

الحل/ ∫ق(س) جاس دس = − ق(س) جتاس + ∫٣س^٢ جتاس دس نشتق

ق(س) جاس = (− ق(س) × − جاس) + جتاس × − ق′(س) + ٣س^٢ جتاس

ق(س) جاس = ق(س) جاس − ق′(س) جتاس + ٣س^٢ جتاس

ق′(س) جتاس / جتاس = ٣س^٢ جتاس / جتاس ⟸ ق′(س) = ٣س^٢ ، جتاس ≠ ∴

⟸ ق′(س) = ٣س^٢ ⟸ ∫ق′(س) دس = ∫٣س^٢ دس ⟸ ق(س) = س^٣ + جـ ب

• 2023 دور ثاني / أي من الاقترانات التالية يمثل اقترانًا أصليًا للاقتران ق(س) = $\frac{1}{س}$ + جا(٢س) ، س > ٠:

أ) لوهـ س + $\frac{جا(٢س)}{٢}$ ب) س^{−٢} + ٢جا(٢س) جـ) س^{−٢} + ٢جتا(٢س) د) لوهـ س − $\frac{جتا(٢س)}{٢}$

الحل/ لإيجاد الاقتران الأصلي لـ ق(س) نكامل ق(س)

⟸ م(س) = ∫ق(س) دس = ∫($\frac{1}{س}$ + جا(٢س)) دس

⟸ م(س) = لوهـ|س| + $\frac{1}{٢}$ جتا(٢س) + جـ

م(س) = لوهـ(س) − $\frac{1}{٢}$ جتا(٢س) + جـ " س > ٠ " د

• 2023 دور ثاني / ما ناتج ∫(٣س − ٢)^٢ − قاس ظاس دس

أ) $\frac{(٣س-٢)^٣}{٩}$ − قاس + جـ ب) $\frac{(٣س-٢)^٣}{٩}$ + قاس + جـ

جـ) $\frac{(٣س-٢)^٣}{٣}$ − قاس + جـ د) $\frac{(٣س-٢)^٣}{٣}$ + قاس + جـ

الحل/ ∫(٣س − ٢)^٢ دس − ∫قاس ظاس دس

= $\frac{(٣س-٢)^٣}{٣}$ × $\frac{1}{٣}$ − قاس + جـ = $\frac{(٣س-٢)^٣}{٩}$ − قاس + جـ أ

• 2023 دور ثالث / إذا كان م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س) المتصل على مجاله وكان ق(١) = ٣ ، م(س) = $\frac{٢}{٣}$س^٣ + أس + ٥ جد قيمة الثابت أ

أ) −٣ ب) −١ جـ) ١ د) ٣

الحل/ م′(س) = ق(س) ⟸ م′(س) = ٢س^٢ + أ

ق(س) = ٢س^٢ + أ

ق(١) = ٢ + أ ⟸ ٣ = ٢ + أ ⟸ أ = ١ جـ

• 2024 دور أول/ إذا كان الاقتران م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران المتصل على مجاله وكان
5 م(س) $-$ ∫ ق(س) ءس $=$ ∫ س ءس ، ما قيمة ق(٤)

أ/ ٢ ب/ ٤ جـ/ ١ د/ صفر

الحل/ 5م(س) $-$ ∫ ق(س) ءس $=$ ∫ س ءس نشتق

5م$'$(س) $-$ ق(س) $=$ س وبما أن م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) المتصل ⇐ م$'$(س) $=$ ق(س)

5ق(س) $-$ ق(س) $=$ س

4ق(س) $=$ س ⇐ $\frac{4}{4}$ق(٤) $=$ $\frac{4}{4}$ ⇐ ق(٤) $=$ ١ جـ

• 2024 دور ثاني/ ما قيمة ∫ قاس(قاس + ظاس) ءس

أ/ قاس + جـ ب/ قاس + س + جـ جـ/ قاس + ظاس + جـ د/ ظاس + جـ

الحل/

∫ قاس(قاس + ظاس) ءس $=$ ∫ قا^{2}س + قاس ظاس ءس $=$ ظاس + قاس + جـ جـ

• 2024 دور ثالث/ إذا كان الاقتران م(س) $=$ ٢(٤س $-$ ٥) هو الاقتران الأصلي للاقتران المتصل ق(س)
وكان ق(س) $-$ ٣م(س) $=$ س ق(س) ، أي من الاقترانات التالية تمثل الاقتران ق(س)

أ/ $-$ ٨س + ١٠ ب/ $-$ ٨س $-$ ١٠ جـ/ ١٢س + ١٠ د/ ١٢س $-$ ١٠

الحل/ م$'$(س) $=$ ق(س) ⇐ م$'$(س) $=$ ٤ $=$ ق(س)

* ق(س) $-$ ٣م(س) $=$ س ق(س)

ق(س) $-$ ٣(٤س $-$ ٥) $=$ س(٤) ⇐ ق(س) $=$ ٤س + ٣(٤س $-$ ٥)

ق(س) $=$ ٤س + ٨س $-$ ١٠ ⇐ ق(س) $=$ ١٢س $-$ ١٠ د

• 2024 دور ثالث/ جد ∫ $\frac{هـ^{س+٢}}{هـ^س}$ ءس

أ/ هـ^س + جـ ب/ $\frac{هـ^٣}{٣}$ + جـ جـ/ هـ^{٢}س + جـ د/ هـس + جـ

الحل/

∫ $\frac{هـ^{س+٢}}{هـ^س}$ ءس $=$ ∫ $\frac{\cancel{هـ^س} \times هـ^٢}{\cancel{هـ^س}}$ ءس $=$ ∫ هـ^٢ ءس $=$ هـ^{٢}س + جـ جـ

• 2025 دور أول/ ما الاقتران الأصلي للاقتران ق(س) $=$ $\frac{١ - جتا^٢س - هـ^{٢س}}{هـ^س - جاس}$

أ/ جتاس + هـ^س + جـ ب/ جتاس $-$ هـ^س + جـ جـ/ $-$ جتاس $-$ هـ^س + جـ د/ $-$ جتاس + هـ^س + جـ

الحل/ ق(س) $=$ $\frac{(١ - جتا^٢س) - هـ^{٢س}}{هـ^س - جاس}$ $=$ $\frac{جا^٢س - هـ^{٢س}}{هـ^س - جاس}$ $=$ $\frac{\cancel{(جاس - هـ^س)}^{-1}(جاس + هـ^س)}{\cancel{(هـ^س - جاس)}}$

فرق مربعين

⇐ ق(س) $=$ $-$ جاس $-$ هـ^س

الاقتران الأصلي م(س) = $\int$ ق(س) دس = $\int$ - جاس - هـ^س دس = قتاس - هـ^س + جـ **ب**

• 2025 دور أول / ما مجموع الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) = ٣

أ/ اقترانات منحنياتها مستقيمات متعامدة
ب/ اقترانات منحنياتها مستقيمات متوازية
جـ/ اقترانات منحنياتها مستقيمات متقاطعة
د/ اقترانات منحنياتها مستقيمات متطابقة.

الحل/ م(س) = $\int$ ق(س) دس ⟸ م(س) = $\int$ ٣ دس = ٣س + جـ

الاقتران الأصلي م(س) = ٣س − ١ ، ٣س − ٥ ، ٣س ، ٣س + ٧ ⟵ لاحظ أن م(س) مستقيمات متوازية ميلها = ٣

⟸ **ب/ اقترانات منحنياتها مستقيمات متوازية.**

• 2025 دور أول / ما قيمة $\int \frac{1}{\text{جاس}}$ دس

أ/ لو_هـ |قتاس| + جـ
ب/ قتاس ظتاس + جـ
جـ/ −لو_هـ |قتاس + ظتاس| + جـ
د/ ظتا²س + جـ

الحل/ $\int \frac{1}{\text{جاس}}$ دس = $\int$ قتاس دس = $\int \frac{\text{قتاس} \times (\text{قتاس} + \text{ظتاس})}{(\text{قتاس} + \text{ظتاس})}$ دس

= $\int \frac{\text{قتا}^2\text{س} + \text{قتاس ظتاس}}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}$ دس = **−لو_هـ |قتاس + ظتاس| + جـ** **جـ**

• 2025 دور ثاني / إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س) وكان ل(س) = م(س) − هـ(س) فماذا يمثل $\int$ س ل(س) دس

أ/ اقتران خطي
ب/ اقتران تربيعي
جـ/ اقتران ثابت
د/ اقتران تكعيبي

الحل/ م(س) − هـ(س) = جـ "حاصل طرح اقترانين أصليين لنفس الاقتران ثابت"

⟸ ل(س) = م(س) − هـ(س) = جـ

$\int$ س ل(س) دس = $\int$ جـ س دس = $\frac{\text{جـ}}{2}$ س² + جـ ⟵ **اقتران تربيعي.** **ب**

• 2025 دور ثاني / ما قيمة $\int \frac{د}{دس}\left(\frac{\text{جاس جتاس}}{\text{جا(٢س)}}\right)$ دس

أ/ $\frac{1}{2}$
ب/ جـ
جـ/ $\frac{1}{2}$ + جـ
د/ صفر

الحل/ $\frac{\text{جاس جتاس}}{\text{جا(٢س)}} = \frac{\cancel{\text{جاس جتاس}}}{2\,\cancel{\text{جاس جتاس}}} = \frac{1}{2}$

$\int \frac{ص}{س}\left(\frac{1}{2}\right) دس = \int دس ؛ = س \times س + جـ = جـ$ $\boxed{ب}$

• 2025 دورثاني / ماقيمة $\int \frac{س+2}{س+3} دس$

أ/ $\text{لو}_هـ|س+3|+جـ$ ب/ $س-\text{لو}_هـ|س+3|+جـ$ جـ/ $1-\text{لو}_هـ|س+1|+جـ$ د/ $-1+\text{لو}_هـ|س+1|+جـ$

الحل/ $\int \frac{س+2}{س+3} دس = \int \frac{س+2+1-1}{س+3} دس = \int \frac{(س+3)-1}{س+3} دس$

$= \int \frac{س+3}{س+3} - \frac{1}{س+3} دس = \int 1 - \frac{1}{س+3} دس = س - \text{لو}_هـ|س+3|+جـ$ $\boxed{ب}$

• 2025 دورثاني / ماقيمة $\int \frac{1+جاس}{جتا^2 س} دس$

أ/ $ظا(2س)+جـ$ ب/ $ظاس + قاس + جـ$ جـ/ $ظاس+قاس+جـ$ د/ $ظاس قاس+جـ$

الحل/ $\int \frac{1+جاس}{جتا^2س} دس = \int \left(\frac{1}{جتا^2س} + \frac{جاس}{جتا^2س}\right) دس = \int \left(قا^2س + \frac{جاس}{جتاس} \times \frac{1}{جتاس}\right) دس$

$= \int (قا^2س + قاس ظاس) دس = ظاس + قاس + جـ$ جـ

• 2025 دورثاني / إذا كان الاقتران $ق(س)$ كثير حدود حيث $ق(س) = 3س - 2$ ماقيمة $ق(3) - ق(-1)$

أ/ 8 ب/ 4 جـ/ صفر د/ 2

الحل/ $\int ق(س) دس = \int (3س-2) دس$

$ق(س) = \frac{3}{2}س^2 - 2س + جـ$

$ق(3) = \frac{3}{2}(3)^2 - 2\times3 + جـ \Leftarrow \frac{27}{2} - 6 + جـ = ق(3)$

$ق(-1) = \frac{3}{2}(-1)^2 - 2\times-1 + جـ \Leftarrow \frac{3}{2} + 2 + جـ = ق(-1)$

$\Leftarrow ق(3) - ق(-1) = \left(\frac{27}{2} - 6 + جـ\right) - \left(\frac{3}{2} + 2 + جـ\right) = \frac{27}{2} - 6 + \cancel{جـ} - \frac{3}{2} - 2 - \cancel{جـ}$

$= \left(\frac{27}{2} - \frac{3}{2}\right) + (-6-2) = \frac{24}{2} - 8 = 12 - 8 = 4$

$\Leftarrow ق(3) - ق(-1) = 4$ ب

• 2025 دورثالث / ماقيمة $\frac{د}{دس} \int \frac{جاس جتاس}{س جا(2س)} دس$ ، $س \neq 0$:

أ/ $\frac{1}{2س}$ ب/ $\frac{1}{2}\text{لو}_هـ|س| + جـ$ جـ/ صفر د/ $\frac{1}{س} + جـ$

الحل/ $\frac{د}{دس} \int \frac{جاس جتاس}{س جا(2س)} دس = \frac{جاس جتاس}{س \times 2 جاس جتاس} = \frac{1}{2س}$

أ

• تجريبي جنوب الخليل / 2024 إذا كان $\int (ق(س) + لو_هـ س)\, دس = ل هـ^{س^2} - 6$ ، ق(1) = 6هـ فما قيمة الثابت ل

أ/ صفر ب/ 2 جـ/ 3 د/ 6

الحل/ $\int (ق(س) + لو_هـ س)\, دس = ل هـ^{س^2} - 6$ نشتق الطرفين

$ق(س) + لو_هـ س = ل هـ^{س^2} \times 2س \Big|_{س=1}$

$ق(1) + لو_هـ 1 = ل \times هـ \times 2 \times 1 \Leftarrow 6هـ + 0 = 2هـ ل \Leftarrow \frac{6هـ}{2هـ} = \frac{2هـ ل}{2هـ} \Leftarrow \boxed{ل = 3}$ جـ

• جنوب نابلس / 2024 إذا كان $\int (ق(س) + 2س)\, دس = هـ^{جا(2س)} + لو_هـ(5س+1) + جـ$ ما قيمة ق(0)

أ/ 6 ب/ 7 جـ/ 2 د/ 3

الحل/ $\int (ق(س) + 2س)\, دس = هـ^{جا(2س)} + لو_هـ(5س+1) + جـ$ نشتق الطرفين

$ق(س) + 2س = هـ^{جا(2س)} \times جتا(2س) \times 2 + \frac{5}{5س+1} \Big|_{س=0}$

$ق(0) + \cancel{2 \times 0} = هـ^{جا(0)} \times جتا(0) \times 2 + \frac{5}{\cancel{5 \times 0} + 1}$

$ق(0) = هـ^0 \times 1 \times 2 + 5 \Leftarrow ق(0) = 1 \times 2 + 5 \Leftarrow \boxed{ق(0) = 7}$ ب

• طولكرم / 2024 إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين مختلفين للاقتران المتصل ق(س) فإن $\int لو_هـ هـ^{(م(س) - هـ(س))} دس$ يمثل اقتران :

أ/ خطي ب/ ثابت جـ/ تربيعي د/ لوغاريتمي

الحل/ م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين لـ ق(س) ⇐ م(س) - هـ(س) = جـ

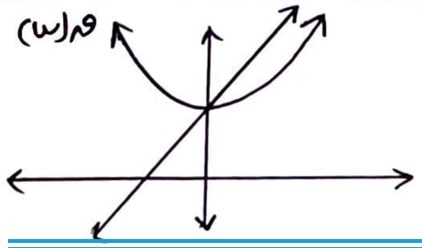
⇐ $\int لو_هـ هـ^{جـ} دس = \int جـ\, دس = جـ س + جـ_1$ "اقتران خطي" أ "

• طولكرم / جد $\frac{د}{دس} \int (جتا(2س) - 2جتا^2 س)\, دس$

أ/ 1 ب/ -1 جـ/ 2 د/ صفر

الحل/ $جتا(2س) - 2جتا^2 س = \cancel{2جتا^2 س} - 1 - \cancel{2جتا^2 س} = -1$

⇐ $\cancel{\frac{د}{دس}} \int (-1)\, دس = -1$ ب ⇐ مشتقة التكامل غير المحدود = ما داخل التكامل "



• طولكرم / 2024 بالاعتماد على الشكل المجاور ، جد قيمة ق(2) حيث
هـ(س) = 3س + 5 ، قَ(س) = 2س + 2

أ/ 5 ب/ 4 جـ/ 9 د/ 13

الحل/ من الشكل $هـ(ن) = هـ(ن)$

$هـ(ن) = ٣ \times ن + ٥ = ٥ \Leftarrow هـ(ن) = ٥ = هـ(ن)$

$ق'(س) = ٢س + ٢ \Leftarrow \int ق'(س) \, دس = \int (٢س+٢) \, دس$

$ق(س) = س^٢ + ٢س + جـ$

$ق(ن) = ن^٢ + ن + جـ$

$٥ = جـ$

$\Leftarrow ق(س) = س^٢ + ٢س + ٥ \Leftarrow ق(٢) = ٢^٢ + ٢ \times ٢ + ٥ = ٤ + ٤ + ٥ = ١٣$ — د

• رام الله ٢٠٢٤/ إذا كان م = $\int جتا^٤(\frac{١}{٢}س) \, دس$ ، ن = $\int جا^٤(\frac{١}{٢}س) \, دس$ ما قيمة ن − م

أ/ جاس + جـ ب/ − جاس + جـ جـ/ جا($\frac{١}{٢}$س) + جـ د/ −٢جا($\frac{١}{٢}$س) + جـ

الحل/

$ن - م = \int جا^٤(\frac{١}{٢}س) \, دس - \int جتا^٤(\frac{١}{٢}س) \, دس = \int (جا^٤(\frac{١}{٢}س) - جتا^٤(\frac{١}{٢}س)) \, دس$

$\Leftarrow ن - م = \int (جا^٢(\frac{١}{٢}س) + جتا^٢(\frac{١}{٢}س))(جا^٢(\frac{١}{٢}س) - جتا^٢(\frac{١}{٢}س)) \, دس$ ← فرق مربعين

$ن - م = \int ١ \times - جتا(س) \, دس$

$ن - م = \int - جتا س \, دس = - جاس + جـ$ — ب

• نابلس ٢٠٢٤/ إذا كان $\int أ ق(س) \, دس = جتا^٢ س - أ ظا س + ١$ ، $ق(\frac{\pi}{٤}) = ٥$ ما قيمة الثابت أ

أ/ $\frac{١}{٧}$ ب/ $\frac{-١}{٧}$ جـ/ $\frac{٢}{٣}$ د/ $\frac{-٢}{٣}$

الحل/ $(\int أ ق(س) \, دس)' = (جتا^٢ س - أ ظا س + ١)'$

$أ ق(س) = ٢ جتا س \times - جا س - أ قا^٢ س \Leftarrow أ ق(س) = - جا(٢س) - أ قا^٢ س$

$أ ق(\frac{\pi}{٤}) = - جا(\frac{\pi}{٢}) - أ قا^٢(\frac{\pi}{٤})$

$أ \times ٥ = -١ - أ \times (\sqrt{٢})^٢ \Leftarrow ٥أ = -١ - ٢أ \Leftarrow \frac{٧أ}{٧} = \frac{-١}{٧} \Leftarrow أ = \frac{-١}{٧}$ — أ

• سلفيت ٢٠٢٤/ إذا كان م(س) اقتران أصلي للاقتران المتصل ق(س) وكان $\int (م(س) + ١) \, دس = هـ^{١-س^٢} + س + جـ$ جد ق(١)

أ/ ٢ ب/ ٤ جـ/ −٢ د/ −٤

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) المتصل $\Leftarrow م'(س) = ق(س)$

$\int (م(س) + ١) \, دس = هـ^{١-س^٢} + س + جـ$ نشتق الطرفين

$م(س) + ١ = هـ^{١-س^٢} \times -٢س + ١$ نشتق مرة أخرى

$م'(س) = هـ^{١-س^٢} \times -٢ + -٢س \times هـ^{١-س^٢} \times -٢س$

$م(١) = -٢هـ^{١-١} + ٤هـ^{١-١} \Leftarrow م(١) = -٢هـ^٠ + ٤هـ^٠ \Leftarrow م(١) = -٢ + ٤ = ٢$

$م(١) = ق(١) = ٢$ أ

• نابلس الإسلامية 2025 / اذا كان $\int (س-٣)هـ(س)\,دس = س^٣ - ٢س^٢ - ١٥س + ٧$ جد $هـَ(٢) \times هـ(٢)$

أ/ ٢٢ ب/ -٣٣ جـ/ -٢٢ د/ ٣٣

الحل/ $\int (س-٣)هـ(س)\,دس = س^٣ - ٢س^٢ - ١٥س + ٧$ نشتق الطرفين

$(س-٣)هـ(س) = ٣س^٢ - ٤س - ١٥$

$(س-٣)هـ(س) = (٣س + ٥)(س - ٣)$

$هـ(س) = ٣س + ٥ \Leftarrow هـ(٢) = ٣ \times ٢ + ٥ = ١١$

$هـَ(س) = ٣ \Leftarrow هـَ(٢) = ٣$

المطلوب/ $هـَ(٢) \times هـ(٢) = ٣ \times ١١ = ٣٣$ د

• طولكرم 2025 / اذا كان م(س)، ل(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س) وكان $\int \frac{م(س)+ل(س)}{٢س}\,دس = س^٣ + س$ جد $قَ(١)$

أ/ ٦ ب/ ١٨ جـ/ ٨ د/ ١٠

الحل/ $مَ(س) = لَ(س) = ق(س)$

$\int \frac{م(س)+ل(س)}{٢س}\,دس = س^٣ + س \Leftarrow$ باشتقاق الطرفين $\frac{م(س)+ل(س)}{٢س} = ٣س^٢ + ١$

$\Leftarrow م(س) + ل(س) = ٦س^٣ + ٢س$ نشتق مرة ثانية

$مَ(س) + لَ(س) = ١٨س^٢ + ٢ \Leftarrow ق(س) + ق(س) = ١٨س^٢ + ٢$

$\frac{٢}{٢}ق(س) = \frac{١٨}{٢}س^٢ + \frac{٢}{٢} \Leftarrow ق(س) = ٩س^٢ + ١ \Leftarrow قَ(س) = ٩ \times ٢س$

$قَ(١) = ١٨ \times ١ = ١٨$ ب

• طولكرم 2025 / جد $\int \frac{ظاس}{جا(٢س)\,قا^٢س}\,دس$

أ/ $ظاس - س + جـ$ ب/ $٢س + جـ$ جـ/ $\frac{١}{٢}س + جـ$ د/ $س + جـ$

الحل/ نبسط المقدار $\frac{ظاس}{جا(٢س)\,قا^٢س} = \left(\frac{جاس}{جتاس}\right) \div \left(٢جاس\,جتاس \times \frac{١}{جتا^٢س}\right)$

$= \frac{جاس}{جتاس} \times \frac{جتاس}{٢جاس} = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow \int \frac{١}{٢}\,دس = \frac{١}{٢}س + جـ$ جـ

• الخليل 2025 / $\int \frac{٢هـ^س}{هـ^{س+٢} - هـ^{س+١}}\,دس =$

أ/ $\frac{-2}{هـ^{س}(هـ-1)} + جـ$ ب/ $\frac{+2}{هـ^{س}(هـ-1)} + جـ$ جـ/ $\frac{2هـ^{س}}{هـ-1} + جـ$ د/ $\frac{-2هـ^{س}}{هـ-1} + جـ$

الحل/

$\int \frac{2هـ}{هـ^{س}\times هـ^{2} - هـ^{س}\times هـ} دس = \int \frac{2هـ}{هـ^{س}\times هـ(هـ-1)} دس = \frac{2}{هـ-1}\int هـ^{-س} دس$

$= \frac{2}{(هـ-1)} \times \frac{هـ^{-س}}{-1} + جـ = \frac{-2}{(هـ-1)هـ^{س}} + جـ$ أ

• بيرزيت / 2025 جد $\int \frac{س^5+6س^3+9س}{(س^2+3)^3} دس$

أ/ $2لو_{هـ}(س^2+3)+جـ$ ب/ $-2لو_{هـ}(س^2+3)+جـ$ جـ/ $\frac{1}{2}لو_{هـ}(س^2+3)+جـ$ د/ $لو_{هـ}(س^2+3)+جـ$

الحل/

$\int \frac{س^5+6س^3+9س}{(س^2+3)^3} دس = \int \frac{س(س^4+6س^2+9)}{(س^2+3)^3} دس = \int \frac{س(س^2+3)^2}{(س^2+3)^3} دس$

$= \int \frac{س}{س^2+3} دس = \frac{1}{2}\int \frac{2س}{س^2+3} دس = \frac{1}{2}لو_{هـ}(س^2+3)+جـ$ جـ

• رام الله / 2025 اذا كان الاقترانان ع(س) ، ل(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل هـ(س) وكان هـ(2) = 4 ، ق(2) = 9 ، ل(2) = -3 جد ع(2) حيث $(ع \div ل)'(2) = \frac{-9}{2}$

أ/ -2,5 ب/ -1 جـ/ 1 د/ 2,5

الحل/ $ع'(س) = ل'(س) = هـ(س)$

$\left(\frac{ع}{ل}\right)'(2) = \frac{ل(2)ع'(2) - ع(2)ل'(2)}{ل^2(2)} \Leftarrow \frac{-9}{2} = \frac{-3\times هـ(2) - ع(2)\times هـ(2)}{(-3)^2}$

$\Leftarrow \frac{-9}{2} = \frac{-3\times 4 - ع(2)\times 4}{4} \Leftarrow \frac{-9}{2} = \frac{-8 - 4ع(2)}{2\times 2} \Leftarrow -18 = -8 - 4ع(2)$

$\Leftarrow -10 = -4ع(2) \Leftarrow ع(2) = \frac{10}{4} \Leftarrow ع(2) = 2,5$ د

• القدس الشريف / 2025 جد $\int \frac{دس}{جا^2س + جتا(2س)}$

أ/ ظاس+جـ ب/ قاس+جـ جـ/ -جتاس+جـ د/ -ظتاس+جـ

الحل/

$\int \frac{دس}{جا^2س + 1 - 2جا^2س} = \int \frac{دس}{1 - جا^2س} = \int \frac{دس}{جتا^2س} = \int قا^2س\, دس = ظاس + جـ$

أ

• تكميلية 2025 / $\int \frac{ق(٢س-٣)}{س^4-س^2+1}$ دس $= \frac{س^3}{3} + س + جـ$ ، جد قَ(−١)

أ/ −٦ ب/ ٣ جـ/ −٣ د/ ٦

الحل/ $\int \frac{ق(٢س-٣)}{س^4-س^2+1}$ دس $= \frac{س^3}{3} + س + جـ$ نشتق الطرفين.

$\frac{ق(٢س-٣)}{س^4-س^2+1} = س^2+1$ ⟸ ق(٢س−٣) $= \underbrace{(س^2+1)(س^4-س^2+1)}_{\text{فرق مكعبين}}$

ق(٢س−٣) $= (س^2)^3 - (1)^3$

ق(٢س−٣) $= س^6 - 1$ نشتق

قَ(٢س−٣) × ٢ $= ٦س^5$

قَ(٢−٣) × ٢ = ٦

قَ(−١) $= \frac{6}{2} = 3$ ب

• عندما ٢س − ٣ = −١ ⟸ ٢س = ٢ ⟸ س = ١

• خارجي/ م(س)، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س)، فإن $\int (٣س^4م(س) - ٣س^4هـ(س))$ دس يمثل اقتران:

أ/ خطي ب/ تربيعي جـ/ ثابت د/ تكعيبي

الحل/ م(س) − هـ(س) = جـ

$\int (٣س^4م(س) - ٣س^4هـ(س))$ دس $= \int ٣س^4(م(س) - هـ(س))$ دس

$= \int ٣س^4 \times$ جـ دس = جـ$س^3$ + جـ ⟵ اقتران تكعيبي د

• خارجي/ ما ناتج $\int \frac{3}{س} + هـ^{-س}$ دس ، حيث هـ العدد النيبري

أ/ ٣لوهـ|س| $- هـ^{-س}$ + جـ ب/ ٣لوهـ|س| $+ هـ^{-س}$ + جـ جـ/ ٣لوهـ|س| $- هـ^{س}$ + جـ د/ لوهـ|س| $- هـ^{-س}$ + جـ

الحل/ $\int \frac{3}{س} + هـ^{-س}$ دس = ٣لوهـ|س| $+ \frac{هـ^{-س}}{-1}$ + جـ = ٣لوهـ|س| $- هـ^{-س}$ + جـ أ

• القسم الثاني| أجب عن الأسئلة التالية:

• 2008/ جد $\int (٥ظتا^2س + 1)$ دس

الحل/ $\int ٥ظتا^2س + 1$ دس $= \int ٥(قتا^2س - 1) + 1$ دس $= \int ٥قتا^2س - ٥ + ١$ دس

$= \int ٥قتا^2س - ٤$ دس = −٥ظتاس − ٤س + جـ

• 2010/ جد $\int$ (ظا^{2}س + 5) دس

الحل/

$\int$ (ظا^{2}س + 5) دس = $\int$ (قا^{2}س − 1 + 5) دس = $\int$ (قا^{2}س + 4) دس = ظاس + 4س + جـ

• 2013/ جد $\int$ ظاس (ظاس + ظتاس) دس

الحل/

$\int$ ظاس (ظاس + ظتاس) دس = $\int$ (ظا^{2}س + ظاس × ظتاس) دس

= $\int$ قا^{2}س − 1 + 1 دس = $\int$ قا^{2}س دس = ظاس + جـ

• ظاس × ظتاس = 1
• جاس × قتاس = 1
• جتاس × قاس = 1
• ظا^{2}س = قا^{2}س − 1

• 2019 دور ثالث/ إذا كان $\int$ (ق(س) + لو$_{هـ}$س) دس = أهـ$^{س^2}$ − 6 وكان ق(1) = 6هـ ، ما قيمة الثابت أ

الحل/

$\int$ (ق(س) + لو$_{هـ}$س) دس = أهـ$^{س^2}$ − 6 نشتق الطرفين

ق(س) + لو$_{هـ}$س = أهـ$^{س^2}$ × 2س

ق(1) + لو$_{هـ}$1 = أهـ × 2 ⇐ $\frac{6هـ}{2هـ} = \frac{2أهـ}{2هـ}$ ⇐ أ = 3

• 2020 دور أول/ إذا علمت أن $\int$ (ق(س) + ظتاس) دس = لو$_{هـ}$(ظاس قاس) حيث س ∈]0، $\frac{\pi}{2}$[

أثبت أن ق(س) = 2ظاس

الحل/

$\int$ ق(س) + ظتاس دس = لو$_{هـ}$ظاس + لو$_{هـ}$قاس نشتق الطرفين

ق(س) + ظتاس = $\frac{قا^2س × 1}{ظاس}$ + $\frac{\cancel{قاس} ظاس}{\cancel{قاس}}$

ق(س) + ظتاس = قا^{2}س × ظتاس + ظاس

ق(س) = قا^{2}س ظتاس − ظتاس + ظاس

ق(س) = ظتاس (قا^{2}س − 1) + ظاس

ق(س) = ظتاس × ظا^{2}س + ظاس = ظتاس × ظاس × ظاس + ظاس

ق(س) = ظاس + ظاس ⇐ ق(س) = 2ظاس #

• 2021 دور ثاني/ إذا كان $\int$ ق(س) دس = أس^2 + ب س + س لو$_{هـ}$س وكان ق(1) = 2 ، ق($\frac{1}{2}$) = 6

جد قيمة كل من الثابتين أ، ب

الحل/

$\int$ ق(س) دس = أس^2 + ب س + س لو$_{هـ}$س نشتق الطرفين

ق(س) = 2أس + ب + (س × $\frac{1}{س}$ + لو$_{هـ}$س × 1)

ق(س) = 2أس + ب + 1 + لو$_{هـ}$س

هـ(١) = ٢أ + ب + ١ + لوهـ١ ⇐ ٢ = ٢أ + ب + ١ ⇐ ١ = ٢أ + ب ← معادلة (١)

هـَ(س) = ٢أ + ١/س ⇐ هـَ(١/٢) = ٢أ + ١/(١/٢) ⇐ ٦ = ٢أ + ٢ ⇐ ٤/٢ = ٢أ/٢ ⇐ أ = ٢

نعوض (أ = ٢) في معادلة (١):

١ = ٢×٢ + ب ⇐ ١ = ٤ + ب ⇐ ب = -٣

• 2023 دور ثاني / إذا كان ∫ هـ(س) دس = ظاس - جاس + ٣ ، ما قيمة هـ(π/٤) - هـَ(π/٤)

الحل / ∫ هـ(س) دس = ظاس - جاس + ٣ نشتق الطرفين

هـ(س) = قا²س - ٢جاس جتاس

هـ(س) = قا²س - جا(٢س) ⇐ هـ(π/٤) = قا²(π/٤) - جا(π/٢) = (√٢)² - ١ = ٢ - ١ = ١

⇐ هـ(π/٤) = ١

نشتق مرة ثانية:

هـَ(س) = ٢قاس × قاس ظاس - ٢جتا(٢س)

هـَ(π/٤) = ٢قا(π/٤) × قا(π/٤) ظا(π/٤) - ٢جتا(π/٢) = ٢(√٢)²(١) - ٢×٠

⇐ هـَ(π/٤) = ٤

المطلوب / هـ(π/٤) - هـَ(π/٤) = ١ - ٤ = -٣

• 2025 دور أول / إذا كان الاقتران ل(س) = ∫ (جا²س + جتا²س)/(جتاس جاس) دس ، س ∈ [π/٦ ، π/٣]

ل(π/٤) = ٢ أثبت أن الاقتران ل(س) = لوهـ(ظاس) + ٢

الحل / ل(س) = ∫ (جا²س + جتا²س)/(جتاس جاس) دس = ∫ ($\cancel{\text{جا}^2}$س)/(جتاس $\cancel{\text{جاس}}$) + ($\cancel{\text{جتا}^2}$س)/($\cancel{\text{جتاس}}$ جاس) دس

⇐ ل(س) = ∫ جاس/جتاس + جتاس/جاس دس ⇐ ل(س) = -لوهـ|جتاس| + لوهـ|جاس| + جـ

ل(س) = لوهـ|جاس/جتاس| + جـ ⇐ ل(س) = لوهـ(ظاس) + جـ ، ظاس > ٠ في [π/٦ ، π/٣]

ل(π/٤) = لوهـ ظا(π/٤) + جـ ⇐ ٢ = لوهـ١ + جـ ⇐ جـ = ٢

⇐ ل(س) = لوهـ(ظاس) + ٢ #

• 2025 دور ثاني / إذا كان هـ(س) ، هـَ(س) اقترانين متصلين وكان ∫ هـَ(س) دس = هـ^{٣س} + جـ

جد ∫ ٨س + لوهـ(هـَ(س)/٣) دس

الحل / $\int$ ق(س) دس = $هـ^{هـ^{٢س}}$ + جـ نشتق الطرفين

ق(س) = $هـ^{هـ^{٢س}} \times هـ^{٢س} \times ٢$

$*$ لو$_{هـ}$ $\left(\frac{ق(س)}{٢}\right)$ = لو$_{هـ}$ $\left(\frac{هـ^{هـ^{٢س}} \times هـ^{٢س} \times \cancel{٢}}{\cancel{٢}}\right)$ = $\cancel{لو_{هـ}}\, هـ^{هـ^{٢س}}$ + $\cancel{لو_{هـ}}\, هـ^{٢س}$ = $هـ^{٢س}$ + ٢س

المطلوب / $\int$ (٨س + لو$_{هـ}$ $\left(\frac{ق(س)}{٢}\right)$) دس = $\int$ (٨س + $هـ^{٢س}$ + ٢س) دس = $\int$ ١٠س + $هـ^{٢س}$ + جـ

= ٥س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ $هـ^{٢س}$ + جـ

• 2025 دورة ثاني / ما قيمة $\int \frac{ظا^{٢}س + قا^{٢}س}{ظاس\ قاس}$ دس

الحل / $\int \frac{ظا^{٢}س + قا^{٢}س}{ظاس\ قاس}$ دس = $\int \left(\frac{ظا^{\cancel{٢}}س}{\cancel{ظاس}\ قاس} + \frac{قا^{\cancel{٢}}س}{ظاس\ \cancel{قاس}}\right)$ دس

= $\int \frac{ظاس}{قاس} + \frac{قاس}{ظاس}$ دس = $\int \left(\frac{جاس}{جتاس} \times جتاس + \frac{١}{جتاس} \times \frac{جتاس}{جاس}\right)$ دس

= $\int$ جاس + $\frac{١}{جاس}$ دس = $\int$ جاس دس + $\int$ قتاس دس

= $\int$ جاس دس + $\int \frac{قتاس(قتاس + ظتاس)}{(قتاس + ظتاس)}$ دس = −جتاس + $\int \left(\frac{قتا^{٢}س + قتاس\ ظتاس}{قتاس + ظتاس}\right)$ دس

= −جتاس − لو$_{هـ}$ |قتاس + ظتاس| + جـ

• تجريبي 2020 / جد $\int \frac{٥جا^{٢}س + ٥جتا^{٢}س}{٣ - ٣جتا(٢س)}$ دس

الحل / $\int \frac{٥(جا^{٢}س + جتا^{٢}س)}{٣ - ٣(١ - ٢جا^{٢}س)}$ دس = $\int \frac{٥ \times ١}{\cancel{٣} - \cancel{٣} + ٦جا^{٢}س}$ دس = $\int \frac{٥}{٦جا^{٢}س}$ دس

= $\frac{٥}{٦} \int$ قتا^{٢}س دس = $-\frac{٥}{٦}$ ظتاس + جـ

• قباطية 2024 / إذا كان م(س)، هـ(س) اقترانين أصليين مختلفين للاقتران المتصل ق(س)
وكان هـ(١) = ٤ ، م(س) − هـ(س) = ٦ ، جد قاعدة الاقتران م(س)

الحل/ م(س) و هـ(س) اقترانان أصليان لـ ق المتصل :

← م′(س) = هـ′(س) = ق(س)

← م(س) − هـ(س) = جـ ، جـ ∈ ح

* م²(س) − هـ²(س) = ٦س² ← (م(س) − هـ(س))(م(س) + هـ(س)) = ٦س²

فرق مربعين

← جـ(م(س) + هـ(س)) = ٦س² نشتق

جـ(م′(س) + هـ′(س)) = ٦ × ٢س

جـ(ق(س) + ق(س)) = ١٢س

[٢جـ ق(س) = ١٢س] ÷ ٢جـ

ق(س) = $\frac{٦}{جـ}$ س

ق(١) = $\frac{٦}{جـ}$ ← ٤ = $\frac{٦}{جـ}$ ← ق(س) = ٤س

• يطا 2024/ جد ∫ $\frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س^٥}}$ دس "تكامل بالتعويض"

الحل/ ∫ $\frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س^٤ \times س}}$ دس = ∫ $\frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س^٤} \times \sqrt{س}}$ دس = ∫ $\frac{\sqrt{س+١}}{س^٢\sqrt{س}}$ دس = ∫ $\frac{١}{س^٢}\sqrt{\frac{س+١}{س}}$ دس

= ∫ $\frac{١}{س^٢}\sqrt{١+\frac{١}{س}}$ دس

نفرض $\sqrt{١+\frac{١}{س}}$ = ص ← ١ + $\frac{١}{س}$ = ص² نشتق

$\frac{-١}{س^٢}$ دس = ٢ص دص ← $\frac{١}{س^٢}$ دس = −٢ص دص.

← ∫ $\frac{١}{س^٢}\sqrt{١+\frac{١}{س}}$ دس = ∫ −٢ص × ص دص = ∫ −٢ص² دص = $\frac{-٢}{٣}$ص³ + جـ

= $\frac{-٢}{٣}\left(\left(١+\frac{١}{س}\right)^{\frac{١}{٢}}\right)^{٣}$ + جـ = $\frac{-٢}{٣}\left(١+\frac{١}{س}\right)^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

• صيفي 2025/ جد قيمة ق($\frac{\pi}{٤}$) إذا كان

∫(ق(س) + ظا²س) دس = لوهـ|ظاس قاس| ، س ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[

الحل/

∫(ق(س) + ظا²س) دس = لوهـ|ظاس| + لوهـ|قاس| نشتق الطرفين

ق(س) + ظا²س = $\frac{قا^٢س}{ظاس}$ + $\frac{قاس ظاس}{قاس}$

ق($\frac{\pi}{٤}$) + ظا²($\frac{\pi}{٤}$) = $\frac{قا^٢(\frac{\pi}{٤})}{ظا(\frac{\pi}{٤})}$ + ظا($\frac{\pi}{٤}$)

ق($\frac{\pi}{٤}$) + ١ = $\frac{(\sqrt{٢})^٢}{١}$ + ١ ← ق($\frac{\pi}{٤}$) = ٢

• خارجي / أوجد $\int \frac{\text{جتا}^2 \text{س}}{1+\text{جا}\text{س}} \, \text{ءس}$

الحل/ $\int \frac{\text{جتا}^2 \text{س}}{1+\text{جا}\text{س}} \, \text{ءس} = \int \frac{1-\text{جا}^2 \text{س}}{1+\text{جا}\text{س}} \, \text{ءس} = \int \frac{(1-\text{جا}\text{س})\cancel{(1+\text{جا}\text{س})}}{\cancel{(1+\text{جا}\text{س})}} \, \text{ءس}$

$= \int (1-\text{جا}\text{س}) \, \text{ءس} = \text{س} + \text{جتا}\text{س} + \text{ج}$

• خارجي / أوجد $\int \text{جا}(\tfrac{1}{2}\text{س}) \, \text{جتا}(\tfrac{1}{2}\text{س}) \, \text{ءس}$

الحل/ $\int \text{جا}(\frac{\text{س}}{2}) \, \text{جتا}(\frac{\text{س}}{2}) \, \text{ءس} = \int \frac{1}{2} \text{جا}(\text{س}) \, \text{ءس}$

$= -\frac{1}{2} \text{جتا}(\text{س}) + \text{ج}$

"تذكر $\text{جا}(2\text{س}) = 2\text{جا}\text{س} \, \text{جتا}\text{س}$ ،
$\Leftarrow \text{جا}(\text{س}) = 2\text{جا}(\tfrac{1}{2}\text{س}) \, \text{جتا}(\tfrac{1}{2}\text{س})$
$\Leftarrow \frac{1}{2}\text{جا}(\text{س}) = \text{جا}(\frac{\text{س}}{2}) \, \text{جتا}(\frac{\text{س}}{2})$

• خارجي / أوجد $\int \frac{(2\text{س}-1)(\text{س}+3)}{\sqrt{\text{س}}} \, \text{ءس}$

الحل/ $\int \frac{(2\text{س}-1)(\text{س}+3)}{\sqrt{\text{س}}} \, \text{ءس} = \int \frac{2\text{س}\times\text{س} + 2\text{س}\times 3 - 1\times\text{س} - 1\times 3}{(\text{س})^{\frac{1}{2}}} \, \text{ءس}$

$= \int \frac{2\text{س}^2 + 5\text{س} - 3}{\text{س}^{\frac{1}{2}}} \, \text{ءس} = \int \left(\frac{2\text{س}^2}{\text{س}^{\frac{1}{2}}} + \frac{5\text{س}}{\text{س}^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{\text{س}^{\frac{1}{2}}} \right) \text{ءس}$

$= \int \left(2\text{س}^{2-\frac{1}{2}} + 5\text{س}^{(1-\frac{1}{2})} - 3\text{س}^{-\frac{1}{2}} \right) \text{ءس} = \int \left(2\text{س}^{\frac{3}{2}} + 5\text{س}^{\frac{1}{2}} - 3\text{س}^{-\frac{1}{2}} \right) \text{ءس}$

$= 2\frac{\text{س}^{\frac{3}{2}+1}}{(\frac{3}{2}+1)} + 5\frac{\text{س}^{(\frac{1}{2}+1)}}{(\frac{1}{2}+1)} - 3\frac{\text{س}^{(-\frac{1}{2}+1)}}{(-\frac{1}{2}+1)} + \text{ج} = 2\frac{\text{س}^{\frac{5}{2}}}{(\frac{5}{2})} + 5\frac{\text{س}^{(\frac{3}{2})}}{(\frac{3}{2})} - 3\frac{\text{س}^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})} + \text{ج}$

نقلب

$= 2\times\frac{2}{5}\text{س}^{\frac{5}{2}} + 5\times\frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} - 3\times\frac{2}{1}\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{ج}$

$= \frac{4}{5}\text{س}^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} - 6\sqrt{\text{س}} + \text{ج}$

• خارجي / أوجد $\int \frac{(\text{س}-4)}{\sqrt{\text{س}}-2} \, \text{ءس}$

الحل/ $\int \frac{(\text{س}-4)}{(\sqrt{\text{س}}-2)} \, \text{ءس}$ فرق مربعين $= \int \frac{(\cancel{\sqrt{\text{س}}-2})(\sqrt{\text{س}}+2)}{(\cancel{\sqrt{\text{س}}-2})} \, \text{ءس} = \int (\text{س}^{\frac{1}{2}} + 2) \, \text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\text{س} + \text{ج} = \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + 2\text{س} + \text{ج}$

• خارجي/ أوجد $\int \frac{س^3 - 10 س^2 + 25 س}{س^2 - 5 س} \, دس$

الحل/ $\int \frac{س^3 - 10 س^2 + 25 س}{س^2 - 5 س} \, دس = \int \frac{\cancel{س}(س^2 - 10 س + 25)}{\cancel{س}(س - 5)} \, دس = \int \frac{(س-5)^{\cancel{2}}}{\cancel{(س-5)}} \, دس$

$= \int (س - 5) \, دس = \frac{س^2}{2} - 5 س + جـ$

• خارجي/ أوجد $\int (جتاس + جاس)^2 \, دس$

الحل/ $\int (جتا^2 س + 2 جاس جتاس + جا^2 س) \, دس = \int (1 + جا(2 س)) \, دس$

$= س - \frac{1}{2} جتا(2 س) + جـ$

أسئلة للمهتمين — الدرس الأول | التكامل غير المحدود

• سؤال (١) : إذا كان $ق(س) = \int هـ^{جاس} + لو_{هـ}(أس+١)^{٣}\ دس$ ، $قً(٠) = ٧$ ما قيمة الثابت أ

أ/ ١ ب/ ٣ جـ/ −٢ د/ ٢

الحل/ $ق(س) = \int هـ^{جاس} + لو_{هـ}(أس+١)^{٣}\ دس$ نشتق الطرفين

$قَ(س) = هـ^{جاس} + لو_{هـ}(أس+١)^{٣} \Leftarrow قَ(س) = هـ^{جاس} + ٣لو_{هـ}(أس+١)$

$قً(س) = هـ^{جاس} \times جتاس + \frac{٣أ}{أس+١}$

$\Leftarrow قً(٠) = هـ^{جا(٠)} جتا(٠) + \frac{٣أ}{١+٠} \Leftarrow ٧ = هـ^{٠} \times ١ + ٣أ \Leftarrow ٧ = ١ + ٣أ \Leftarrow \frac{٦}{٣} = \frac{٣أ}{٣}$

$\Leftarrow أ = ٢$ د

• سؤال (٢) : إذا علمت أن $\int (قً(س) + قَ(س) + ق(س))\ دس = س^{٣} + ٢أس^{٢} + ٦$ وكان $قَ(١) = ٢قً(١) = ٣ق(١) = ٦$ ما قيمة الثابت أ

أ/ $\frac{١٥}{٤}$ ب/ ٢ جـ/ $\frac{٨}{٧}$ د/ $\frac{٧}{٢}$

الحل/ $قَ(١) = ٦$ ، $٢قً(١) = ٦ \Leftarrow قً(١) = ٣$ ، $٣ق(١) = ٦ \Leftarrow ق(١) = ٢$

$\int قً(س) + قَ(س) + ق(س)\ دس = س^{٣} + ٢أس^{٢} + ٦$ نشتق الطرفين

$قً(س) + قَ(س) + ق(س) = ٣س^{٢} + ٤أس$

$قً(١) + قَ(١) + ق(١) = ٣ + ٤أ$

$٦ + \cancel{٣} + ٢ = \cancel{٣} + ٤أ \Leftarrow \frac{٨}{٤} = \frac{٤أ}{٤} \Leftarrow أ = ٢$ ب

• سؤال (٣) : إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س) حيث
$م(س) = (١+أ)س^{٦} + ٢س^{٥} - ٤لس^{٣}$ ، $هـ(س) = ٢جـس^{٥} - ٨س^{٣} + ٥$ حيث أ، جـ، ل ثوابت
ما قيمة المقدار $أ + ٢جـ + ل^{٢}$

الحل/ م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين لـ ق(س) $\Leftarrow مَ(س) = هَ(س) = ق(س)$

$مَ(س) = ٦(١+أ)س^{٥} + ١٠س^{٤} + ١٢لس^{٢}$

$هَ(س) = ١٠جـس^{٤} - ٢٤س^{٢}$

$مَ(س) = هَ(س) \Leftarrow ٦(١+أ)س^{٥} + ١٠س^{٤} + ١٢لس^{٢} = ١٠جـس^{٤} - ٢٤س^{٢}$ بالمقارنة

* $٦(١+أ) = ٠ \Leftarrow ١ + أ = ٠ \Leftarrow أ = -١$
* $١٠ = ١٠جـ \Leftarrow جـ = ١$ ، $١٢ل = -٢٤ \Leftarrow ل = -٢$

المطلوب/ $أ + ٢جـ + ل^{٢} = -١ + ٢ + (-٢)^{٢} = ١ + ٤ = ٥$

• سؤال (٤): ما قيمة المقدار (أ − ب) إذا علمت أن:

$$\int \left(\frac{13\,\text{جاس} + 9\,\text{جتاس}}{3\,\text{جاس} - \text{جتاس}}\right) \text{د}س = أ\,\text{لو}_{هـ}\left|3\,\text{جاس} - \text{جتاس}\right| + ب\,س + \text{جـ}$$

الحل/ باشتقاق الطرفين

$$\frac{13\,\text{جاس} + 9\,\text{جتاس}}{3\,\text{جاس} - \text{جتاس}} = أ \times \left(\frac{3\,\text{جتاس} + \text{جاس}}{3\,\text{جاس} - \text{جتاس}}\right) + ب$$

توحيد مقامات

$$\Leftarrow \frac{13\,\text{جاس} + 9\,\text{جتاس}}{3\,\text{جاس} - \text{جتاس}} = \frac{أ(3\,\text{جتاس} + \text{جاس})}{3\,\text{جاس} - \text{جتاس}} + \frac{ب(3\,\text{جاس} - \text{جتاس})}{3\,\text{جاس} - \text{جتاس}}$$

$$\Leftarrow \frac{13\,\text{جاس} + 9\,\text{جتاس}}{3\,\text{جاس} - \text{جتاس}} = \frac{3أ\,\text{جتاس} + أ\,\text{جاس} + 3ب\,\text{جاس} - ب\,\text{جتاس}}{3\,\text{جاس} - \text{جتاس}}$$

وبما أن المقامات متساوية ⇐ البسوط متساوية:

$$13\,\text{جاس} + 9\,\text{جتاس} = 3أ\,\text{جتاس} + أ\,\text{جاس} + 3ب\,\text{جاس} - ب\,\text{جتاس}$$

$$13\,\text{جاس} + 9\,\text{جتاس} = (3أ - ب)\,\text{جتاس} + (أ + 3ب)\,\text{جاس}$$. بالمقارنة

$$أ + 3ب = 13 \quad —\ (1)$$

$$3أ - ب = 9 \quad —\ (2) \Leftarrow \times 3 \Leftarrow 9أ - 3ب = 27 \quad —\ (3)$$

$$(1) + (3) \Leftarrow 10أ = 40 \Leftarrow \boxed{أ = 4}$$ نعوضها في (1)

$$4 + 3ب = 13 \Leftarrow 3ب = 9 \Leftarrow \boxed{ب = 3}$$

$$\Leftarrow أ - ب = 4 - 3 = 1$$

أسئلة للمهتمين — الدرس الثاني: قواعد التكامل غير المحدود

• السؤال (١): جد التكاملات الآتية:

/١ $\int \frac{6}{1 - \text{جتا}(2س)}\,\text{د}س$

الحل/ طريقة (١):

$$\int \frac{6}{1 - \text{جتا}(2س)}\,\text{د}س = \int \frac{6}{1 - (1 - 2\,\text{جا}^2س)}\,\text{د}س = \int \frac{6}{2\,\text{جا}^2س}\,\text{د}س$$

$$= \int 3\,\text{قتا}^2س\,\text{د}س = -3\,\text{ظتاس} + \text{جـ}$$

طريقة (٢):

$$\int \frac{6}{1 - \text{جتا}(2س)}\,\text{د}س = \int \frac{6}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا}(2س)\right)}\,\text{د}س = \int \frac{6}{2\,\text{جا}^2س}\,\text{د}س = \int 3\,\text{قتا}^2س\,\text{د}س$$

$$= -3\,\text{ظتاس} + \text{جـ}$$

طريقة (٣): "الضرب بمرافق المقام":

$$* \int \frac{6}{1-\text{جتا}(2\text{س})}\,\text{دس} = \int \frac{6(1+\text{جتا}(2\text{س}))}{(1-\text{جتا}(2\text{س}))(1+\text{جتا}(2\text{س}))}\,\text{دس} = \int \frac{6(1+\text{جتا}(2\text{س}))}{1-\text{جتا}^2(2\text{س})}\,\text{دس}$$

$$= 6\int \frac{1+\text{جتا}(2\text{س})}{\text{جا}^2(2\text{س})}\,\text{دس} = 6\int \frac{1}{\text{جا}^2(2\text{س})} + \frac{\text{جتا}(2\text{س})}{\text{جا}(2\text{س})}\times\frac{1}{\text{جا}(2\text{س})}\,\text{دس}$$

$$= 6\int \text{قتا}^2(2\text{س}) + \text{ظتا}(2\text{س})\,\text{قتا}(2\text{س})\,\text{دس} = 6\left(-\tfrac{1}{2}\text{ظتا}(2\text{س}) - \frac{\text{قتا}(2\text{س})}{2}\right) + \text{ج}$$

$$= -3\,\text{ظتا}(2\text{س}) - 3\,\text{قتا}(2\text{س}) + \text{ج}$$

٢/ $\int \frac{5+5\,\text{ظا}^2\text{س}}{\sqrt{7}+\text{ظاس}}\,\text{دس}$

الحل/ $\int \frac{5+5\,\text{ظا}^2\text{س}}{\sqrt{7}+\text{ظاس}}\,\text{دس} = \int \frac{5(1+\text{ظا}^2\text{س})}{\sqrt{7}+\text{ظاس}}\,\text{دس} = 5\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\sqrt{7}+\text{ظاس}}\,\text{دس}$

$$= 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{7}+\text{ظاس}\right| + \text{ج}$$

٣/ $\int \frac{\text{جتاس}}{1+\text{جتاس}}\,\text{دس}$

الحل/ **طريقة (١):** $\int \frac{\text{جتاس}}{1+(2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})-1)}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتاس}}{2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})}\,\text{دس} = \int \frac{2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})-1}{2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})}\,\text{دس}$

$$= \int \frac{2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})}{2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})} - \frac{1}{2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})}\,\text{دس} = \int 1 - \tfrac{1}{2}\text{قا}^2(\tfrac{\text{س}}{2})\,\text{دس} = \text{س} - \text{ظا}(\tfrac{\text{س}}{2}) + \text{ج}$$

طريقة (٢): $\int \frac{\text{جتاس}}{1+\text{جتاس}}\,\text{دس} = \int \frac{2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})-1}{2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{جتا}(\text{س}))}\,\text{دس} = \int \frac{2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})-1}{2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})}\,\text{دس}$

$$= \int \frac{2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})}{2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})} - \frac{1}{2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})}\,\text{دس} = \int 1 - \tfrac{1}{2}\text{قا}^2(\tfrac{\text{س}}{2})\,\text{دس} = \text{س} - \text{ظا}(\tfrac{\text{س}}{2}) + \text{ج}$$

طريقة (٣): $\int \frac{\text{جتاس}}{1+\text{جتاس}}\,\text{دس} = \int \frac{1+\text{جتاس}-1}{(1+\text{جتاس})}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتاس}+1}{\text{جتاس}+1} - \frac{1}{1+\text{جتاس}}\,\text{دس}$

$$= \int 1\,\text{دس} - \int \frac{1}{(1+\text{جتاس})}\,\text{دس}$$

$ل = س - \int \frac{1}{(1+\text{قتاس})} \frac{(1-\text{قتاس})}{(1-\text{قتاس})} \, دس$

$ل = س - \int \frac{1-\text{قتاس}}{1-\text{قتا}^2س} \, دس = س - \int \frac{1-\text{قتاس}}{\text{جا}^2س} \, دس$

$\Leftarrow ل = س - \int \frac{1}{\text{جا}^2س} - \frac{\text{قتاس}}{\text{جا}^2س} \, دس = س - \int \text{قتا}^2س - \frac{\text{قتاس}}{\text{جاس}} \times \frac{1}{\text{جاس}} \, دس$

$\Leftarrow ل = س - \int \text{قتا}^2س \, دس + \int \text{ظتاس قتاس} \, دس = س + \text{ظتاس} - \text{قتاس} + ج$

١٤/ $\int \frac{1}{\sqrt{س+1} + \sqrt{س}} \, دس$

الحل/ $\int \frac{\sqrt{س+1} - \sqrt{س}}{(\sqrt{س+1}+\sqrt{س})(\sqrt{س+1}-\sqrt{س})} \, دس = \int \frac{\sqrt{س+1} - \sqrt{س}}{\cancel{س}+1-\cancel{س}} \, دس$

$= \int \sqrt{س+1} - \sqrt{س} \, دس = \int (س+1)^{\frac{1}{2}} - س^{\frac{1}{2}} \, دس = \frac{2}{3}(س+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + ج$

١٥/ $\int \sqrt{س\sqrt{س\sqrt{س}}} \, دس$

الحل/ $\sqrt{س\sqrt{س\sqrt{س}}} = \sqrt{س\sqrt{س \times س^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{س\sqrt{س^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{س\,(س^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}}$

$= \sqrt{س \times س^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{س^{\frac{7}{4}}} = (س^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = س^{\frac{7}{8}}$

$\Leftarrow \int س^{\frac{7}{8}} \, دس = \frac{8}{15} س^{\frac{15}{8}} + ج$

١٦/ $\int 4\text{جتا}^2س - 6\text{جا}^2س \, دس$

الحل/ $\int 4\text{جتا}^2س - 6(1-\text{جتا}^2س) \, دس = \int 4\text{جتا}^2س - 6 + 6\text{جتا}^2س \, دس$

$= \int 10\,\text{جتا}^2س - 6 \, دس = \int 10 \times \frac{1}{2}(1+\text{جتا}(2س)) - 6 \, دس$

$= \int 5 + 5\,\text{جتا}(2س) - 6 \, دس = \int 5\,\text{جتا}(2س) - 1 \, دس = \frac{5}{2}\text{جا}(2س) - س + ج$

١٧/ $\int 8\,\text{جا}^2(\frac{س}{2})\,\text{جتا}^2(\frac{س}{2}) \, دس$

الحل/ $\int 8\left(\text{جا}(\frac{س}{2})\text{جتا}(\frac{س}{2})\right)^2 دس = \int 8\left(\frac{1}{2}\text{جا}(س)\right)^2 دس = \int 8 \times \frac{1}{4}\text{جا}^2س \, دس$

$= \int 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا}(2س)\right) دس = \int 1 - \text{جتا}(2س) \, دس = س - \frac{1}{2}\text{جا}(2س) + ج$

• سؤال (٢):

أثبت أن $\int$ قتا^{2}س دس + $\int$ قا^{2}س دس = $\int$ قا^{2}س قتا^{2}س دس

الحل/

$\int$ قا^{2}س دس + $\int$ قتا^{2}س دس = $\int$ (قا^{2}س + قتا^{2}س) دس = $\int \left(\frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} + \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} \right)$ دس

$= \int \frac{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}}$ دس $= \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}}$ دس $= \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} \times \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}$ دس

$=$ $\int$ قتا^{2}س قا^{2}س دس #

طريقة (٢): الطرف الأيسر

$\int$ قا^{2}س قتا^{2}س دس $= \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} \times \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}}$ دس $= \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}}$ دس

$= \int \frac{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}}$ دس $= \int \left(\frac{\cancel{\text{جا}^2\text{س}}}{\cancel{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{جتا}^2\text{س}} + \frac{\cancel{\text{جتا}^2\text{س}}}{\text{جا}^2\text{س}\ \cancel{\text{جتا}^2\text{س}}} \right)$ دس

$= \int \left(\frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} + \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} \right)$ دس $=$ $\int$ قا^{2}س دس + $\int$ قتا^{2}س دس #

الدرس الثالث | تطبيقات التكامل غير المحدود

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2017/ يتحرك جسم تسارع يعطى بالعلاقة ت = (١٢ن - ٢) م/ث^2 ، اذا كانت السرعة الابتدائية ٤م/ث ، فإن سرعة الجسم عندما (ن=٣ ث) هي :

أ/ -٤٨ م/ث ب/ -٥٢ م/ث ج/ ٤٨ م/ث د/ ٥٢ م/ث

الحل/ السرعة الابتدائية = ع(٠) = ٤م/ث

ت = (١٢ن-٢) نأخذ التكامل للطرفين ⇐ ∫ت دن = ∫(١٢ن - ٢) دن

⇐ ع = ٦ن^2 - ٢ن + ج

ع(٠) = ٠ - ٠ + ج ⇐ ٤ = ج

⇐ ع(ن) = ٦ن^2 - ٢ن + ٤ ⇐ ع(٣) = ٦ × ٣^2 - ٢ × ٣ + ٤

ع(٣) = ٥٤ - ٦ + ٤ = ٥٢م/ث د

• 2017 دور ثاني/ يتحرك جسم من السكون من نقطة الأصل بتسارع ت = (٢ن+١) م/ث^2 فإن سرعة الجسم عندما (ن=٣) تساوي :

أ/ ٣م/ث ب/ ٧م/ث ج/ ٩م/ث د/ ١٢م/ث

الحل/ يتحرك جسم من السكون ⇐ ع(٠) = ٠

ت(ن) = ٢ن+١ ⇐ ∫ت دن = ∫(٢ن+١) دن ⇐ ع(ن) = ن^2 + ن + ج

ع(٠) = ٠ + ٠ + ج ⇐ ٠ = ج

ع(ن) = ن^2 + ن + ٠ ⇐ ع(٣) = ٣^2 + ٣ = ٩+٣ = ١٢م/ث د

• 2018 دور أول/ اذا كانت السرعة الابتدائية للجسم تساوي ١م/ث وكان تسارعه في أي لحظة يساوي ن م/ث^2 فإن سرعته بعد ثانيتين من بدء الحركة يساوي :

أ/ ٢م/ث ب/ ٣م/ث ج/ ٤م/ث د/ ٥م/ث

الحل/ ع(٠) = ١ ، ت(ن) = ن

∫ت دن = ∫ن دن

ع = $\frac{1}{2}$ن^2 + ج ⇐ ع(٠) = ج = ١

⇐ ع(ن) = $\frac{1}{2}$ن^2 + ١

ع(٢) = $\frac{1}{2}$(٢)^2 + ١ = ٢ + ١ = ٣م/ث ب

• 2019 دور أول/ بدأ جسم التحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل ومبتعداً عنها فإذا كانت سرعته في أي لحظة تعطى بالعلاقة ع = ٣ن^2 + ٢ن ما بعده عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة

أ/ ١٦م ب/ ١٤م ج/ ١٢م د/ ١٠م

الحل/ $ف(٠) = ٠$ " بدأ من نقطة الأصل متبعداً عنها "

$ع = ٣ن^{٢} + ٢ن \Leftarrow \int ع\, دن = \int (٣ن^{٢}+٢ن)\, دن$

$ف = ن^{٣} + ن^{٢} + جـ$

$ف(٠) = جـ \Leftarrow ٠ = جـ$

$\Leftarrow ف(ن) = ن^{٣} + ن^{٢} \Leftarrow ف(٢) = ٢^{٣} + ٢^{٢} = ٨ + ٤ = ١٢$م جـ

• 2019 دور ثاني/ بدأ جسم التحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل ومتبعدًا عنها فإذا كانت سرعته في أي لحظة تعطى بالعلاقة $ع(ن) = ٦ن + ٢$ ، ما بعده عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة

أ/ ٢٠م ب/ ٢م جـ/ ١٤م د/ ١٦م

الحل/ $ف(٠) = ٠$

$ع = ٦ن + ٢ \Leftarrow \int ع\, دن = \int (٦ن+٢)\, دن \Leftarrow ف = ٣ن^{٢} + ٢ن + جـ$

$ف(٠) = جـ \Leftarrow ٠ = جـ$

$\Leftarrow ف(ن) = ٣ن^{٢} + ٢ن$

$ف(٢) = ٣(٢)^{٢} + ٢(٢) = ١٢ + ٤ = ١٦$م د

• 2019 دور ثاني/ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي $\frac{٢س}{س^{٢}+هـ}$ ما قاعدة الاقتران ق(س) علماً أن منحناه يمر بالنقطة (٠، ٣)

أ/ لوهـ$(س^{٢}+هـ) + ٣$ ب/ لوهـ$(س^{٢}+هـ) + ٤$ جـ/ لوهـ$(س^{٢}+هـ) + ٢$ د/ لوهـ$(س^{٢}+هـ) - ٢$

الحل/ ميل المماس = $ق'(س) = \frac{٢س}{س^{٢}+هـ}$

$\int ق'(س)\, دس = \int \left(\frac{٢س}{س^{٢}+هـ}\right) دس$

$ق(س) =$ لوهـ$|س^{٢}+هـ| + جـ$ "لاحظ مشتقة المقام = البسط"

ق(س) يمر بـ (٠، ٣) $\Leftarrow ق(٠) = ٣$

$ق(٠) =$ لوهـ هـ $+ جـ \Leftarrow ٣ = ١ + جـ \Leftarrow ٢ = جـ$

* $|س^{٢}+هـ| = س^{٢}+هـ$ "موجب دائماً"

$\Leftarrow ق(س) =$ لوهـ$(س^{٢}+هـ) + ٢$ جـ

• 2020 دور أول/ رسم مماس لمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) فكان ميل العمودي على المماس عند نقطة التماس يساوي $\sqrt{١-س}$ ، ما قيمة ق(−٣) علماً بأن ق(١) = ١

أ/ ٣ ب/ ٧ جـ/ ٥ د/ −١

الحل/ ميل المماس = $\frac{-١}{\text{ميل العمودي}} = ق'(س) \Leftarrow \frac{-١}{\sqrt{١-س}} = ق'(س)$.

$\int$ ق'(س) دس $= \int \frac{-1}{\sqrt{1-س}}$ دس $\Leftarrow \int$ ق'(س) دس $= \int 2 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-س}}$ دس

ق(س) $= \int 2\left(\sqrt{1-س}\right)'$ دس $\Leftarrow$ ق(س) $= 2\sqrt{1-س} +$ جـ

ق(٠) $= 2\sqrt{1} +$ جـ

$1 = 2 +$ جـ $\Leftarrow$ جـ $= -1$

ق(س) $= 2\sqrt{1-س} - 1 \Leftarrow$ ق(-3) $= 2\sqrt{1-(-3)} - 1 = 2\sqrt{4} - 1$

ق(-3) $= 3$ أ

• 2020 دور ثاني / تحرك جسم في خط مستقيم بتسارع يعطى بالعلاقة ت = (2ن - 3) م/ث²، فإذا كانت سرعته الابتدائية 3 م/ث، ما سرعة الجسم بعد (4 ثوانٍ)

أ/ 2 م/ث ب/ 4 م/ث جـ/ 7 م/ث د/ 5 م/ث

الحل/ السرعة الابتدائية = ع(٠) = 3 م/ث

ت $= 2ن - 3 \Leftarrow \int$ ت دن $= \int (2ن - 3)$ دن

ع $= ن^2 - 3ن +$ جـ

ع(٠) $= ٠ - ٠ +$ جـ $\Leftarrow 3 =$ جـ

$\Leftarrow$ ع(ن) $= ن^2 - 3ن + 3 \Leftarrow$ ع(4) $= 4^2 - 3 \times 4 + 3$

ع(4) $= 16 - 12 + 3 = 7$ م/ث جـ

• 2022 دور أول / إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي (3س²) وكانت ق(2) = 5 ما قيمة ق(3)

أ/ -6 ب/ -3 جـ/ 24 د/ 27

الحل/ ميل المماس = ق'(س) $= \int 3س^2$ دس

ق(س) $= س^3 +$ جـ

ق(2) $= 2^3 +$ جـ $\Leftarrow 5 = 8 +$ جـ $\Leftarrow -3 =$ جـ

ق(س) $= س^3 - 3$

ق(3) $= 3^3 - 3 = 24$ جـ

• 2023 دور أول / يتحرك جسم بحيث تعطى سرعته بالعلاقة ع(ن) = جتا(2ن)، إذا كانت إزاحة الجسم ف(ن) عند بداية الحركة تساوي 4م ما قاعدة ف(ن)

أ/ ف(ن) = جا(2ن) + 4 ب/ ف(ن) = جا(2ن) - 4 جـ/ ف $= \frac{1}{2}$ جا(2ن) + 4 د/ ف $= \frac{1}{2}$ جا(2ن) - 4

الحل/ ع = جتا(2ن) $\Leftarrow \int$ ع دن $= \int$ جتا(2ن) دن $\Leftarrow$ ف $= \frac{1}{2}$ جا(2ن) + جـ

إزاحة الجسم عند بداية الحركة = 4 $\Leftarrow$ ف(٠) = 4

ف(٠) = $\frac{1}{2}$ جا(٠) + ن ⟸ ٤ = ٠ + ن ⟸ ن = ٤

⟸ ف = $\frac{1}{2}$ جا(٢ن) + ٤ **جـ**

• 2023 دورثاني / إذا كان ميل المماس عند أي نقطة على منحنى هـ(س) يساوي (٣س٢ − ٥) وكان هـ(٠) = ٣ ما قيمة هـ(١)

أ/ ٣ ب/ −١ جـ/ ١ د/ −٣

الحل/ ميل المماس = قَ(س) = ٣س٢ − ٥

∫ قَ(س) دس = ∫(٣س٢ − ٥) دس

هـ(س) = س٣ − ٥س + جـ

هـ(٠) = ٠ − ٠ + جـ ⟸ جـ = ٣

⟸ هـ(س) = س٣ − ٥س + ٣

هـ(١) = ١ − ٥ + ٣ = −١ **ب**

• 2025 دورثالث / إذا بدء جسم التحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل متبعدًا عنها وكانت سرعته في أي لحظة تعطى بالعلاقة ع = ٣ن٢ + ٢ن ما بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة

أ/ ٤ ب/ ٠ جـ/ ٨ د/ ١٢

الحل/ ف(٠) = ٠

ع = ٣ن٢ + ٢ن ⟸ ∫ ع دن = ∫ ٣ن٢ + ٢ن دن

ف = ن٣ + ن٢ + جـ

ف(٠) = جـ = ٠

⟸ ف = ن٣ + ن٢ ⟸ ف(٢) = ٢٣ + ٢٢ = ٨ + ٤ = ١٢ **د**

• 2025 دورثالث / إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ(س) يعطى بالعلاقة $\frac{1}{\sqrt{س}(\sqrt{س} - هـ)}$ س > هـ٢، هـ العدد النيبيري، ما قاعدة هـ(س) علمًا أن منحناه يمر بـ (هـ٢، ٤هـ)

أ/ لو_هـ($\sqrt{س}$ − هـ) ب/ ١ − هـ − ٢لو_هـ($\sqrt{س}$) جـ/ ٢لو_هـ($\sqrt{س}$ − هـ) − ١

د/ ٢لو_هـ($\sqrt{س}$ − هـ) + ١

الحل/ قَ(س) = $\frac{1}{\sqrt{س}(\sqrt{س} - هـ)}$ ⟸ ∫ قَ(س) دس = ∫ $\frac{1}{\sqrt{س}(\sqrt{س} - هـ)}$ دس

هـ(س) = ∫ $\frac{\frac{1}{\sqrt{س}}}{(\sqrt{س} - هـ)}$ دس = ٢ ∫ $\frac{\frac{1}{2\sqrt{س}}}{(\sqrt{س} - هـ)}$ دس

هـ(س) = ٢لو_هـ |$\sqrt{س}$ − هـ| + جـ

لاحظ (المقام)َ = البسط •

$ق(هـ^2) = 1 \Leftarrow 2لو_هـ|هـ^2 - هـ| + جـ = 1 \Leftarrow 2لو_هـ(هـ^2 - هـ) + جـ = 1$

$\Leftarrow 2لو_هـ هـ + جـ = 1 \Leftarrow 2 + جـ = 1 \Leftarrow جـ = -1$

$\Leftarrow ق(س) = 2لو_هـ(\sqrt{س} - هـ) - 1$ ، ملاحظة: $س > هـ^2 \Leftarrow \sqrt{س} > هـ$ ، $\sqrt{س} - هـ > 0$:

طريقة (2): $ق(س) = \int \frac{1}{\sqrt{س}(\sqrt{س} - هـ)} \, دس$ "بالتعويض"

نفرض $\sqrt{س} - هـ = ص$

$2 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{س}} دس = دص \right) \Leftarrow \frac{دس}{\sqrt{س}} = 2 دص$

$\Leftarrow \int 2 \times \frac{1}{ص} دص = 2لو_هـ|ص| + جـ = 2لو_هـ|\sqrt{س} - هـ| + جـ$ ثم نكمل بنفس الطريقة.

• جنوب نابلس / 2024 يتحرك جسم في خط مستقيم بتسارع $ت = 3ن^2 + 2$ ، اذا كانت سرعته بعد ثانيتين من بدء الحركة = 3 أمثال سرعته الابتدائية ، جد سرعة الجسم بعد مرور 4ث من بدء الحركة ، علمًا بأن المسافة بالأمتار

أ/ 73م/ث   ب/ 78م/ث   جـ/ 75م/ث   د/ 65م/ث

الحل/

$ع(2) = 3ع(0)$ " سرعته بعد 2ث = 3 أمثال سرعته الابتدائية "

$ت = 3ن^2 + 2 \Leftarrow \int ت \, دن = \int (3ن^2 + 2) \, دن$

$ع = ن^3 + 2ن + جـ$

$ع(0) = جـ$

$ع(2) = 2^3 + 2 \times 2 + جـ = 8 + 4 + جـ = 12 + جـ$

$ع(2) = 3ع(0) \Leftarrow 12 + جـ = 3جـ \Leftarrow \frac{12}{2} = \frac{2جـ}{2} \Leftarrow جـ = 6$

$\Leftarrow ع(ن) = ن^3 + 2ن + 6 \Leftarrow ع(4) = 64 + 8 + 6 = 78م/ث$ ب

• سلفيت / 2024 اذا كانت النقطة (1، 6) نقطة حرجة للاقتران كثير الحدود ق(س) وكان $ق''(س) = 3س + 1$ جد ق(2)

أ/ 7   ب/ صفر   جـ/ -7   د/ 1

الحل/ ق(س) كثير حدود له نقطة حرجة عند (٠،١) ← ق(٠) = ١ ، قَ(٠) = ٠

قً(س) = ٣س + ١ ← $\int$ قً(س) دس = $\int$ (٣س + ١) دس

قَ(س) = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + س + جـ$_{١}$

قَ(٠) = ٠ + ٠ + جـ$_{١}$ ← ٠ = جـ$_{١}$

قَ(س) = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + س

$\int$ قَ(س) دس = $\int$ ($\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + س) دس ← ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + جـ

ق(٠) = جـ

١ = جـ

ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ١

ق(٢) = $\frac{٨}{٢}$ + $\frac{٤}{٢}$ + ١ = ٤ + ٢ + ١ = ٧ P

• القسم الثاني / أجب عن الأسئلة التالية :

• ٢٠٠٧/ إذا كان قً(س) = ٦س - ٤ وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية تساوي ٥ عندما س = ١ جد معادلة منحنى ق(س)

الحل/ ق(س) له قيمة صغرى محلية عند س = ١ ← قَ(١) = ٠ لأن ق كثير حدود .

قيمتها تساوي ٥ ← ق(١) = ٥

قً(س) = ٦س - ٤ ← $\int$ قً(س) دس = $\int$ (٦س - ٤) دس

قَ(س) = ٣س^{٢} - ٤س + جـ

قَ(١) = ٣ - ٤ + جـ ← صفر = -١ + جـ ← ١ = جـ

← قَ(س) = ٣س^{٢} - ٤س + ١

$\int$ قَ(س) دس = $\int$ (٣س^{٢} - ٤س + ١) دس

ق(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} + س + جـ

ق(١) = $\cancel{١}$ - $\cancel{٢}$ + ١ + جـ ← ٥ = جـ

← ق(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} + س + ٥

• ٢٠٠٧ دراسات / يتحرك جسم بتسارع يعطى بالعلاقة ت(ن) = ١٢ن - ٢ م/ث^{٢}، إذا كانت السرعة الابتدائية ٤ م/ث والمسافة المقطوعة بعد (٣ث) هي ٢٨م فأوجد قيمة ف(٥)

الحل/ السرعة الابتدائية هي ٤ م/ث ← ع(٠) = ٤

المسافة بعد (٣ث) هي ٢٨ ← ف(٣) = ٢٨

ت = ١٢ن - ٢ ⇐ ∫ت دن = ∫(١٢ن - ٢) دن ⇐ ع = ٦ن² - ٢ن + ج₁

ع(٠) = ج₁ ⇐ ٤ = ج₁

ع = ٦ن² - ٢ن + ٤ ⇐ ∫ع دن = ∫(٦ن² - ٢ن + ٤) دن

⇐ ف = ٢ن³ - ن² + ٤ن + ج

ف(٣) = ٢(٣)³ - (٣)² + ٤(٣) + ج ⇐ ٢٨ = ٥٤ - ٩ + ١٢ + ج ⇐ ٢٨ = ٥٧ + ج

⇐ ج = -٢٩

ف = ٢ن³ - ن² + ٤ن - ٢٩

ف(٥) = ٢(٥)³ - (٥)² + ٤(٥) - ٢٩ = ٢٥٠ - ٢٥ + ٢٠ - ٢٩ = ٢١٦ متر

2008/ إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند (١، ٨) يساوي (٤) أوجد معادلة هذا المنحنى علماً بأن ق̈(س) = ١٢س - ١٠

الحل/ ميل المماس لـ ق عند (١، ٨) = ٤ ⇐ ق̀(١) = ٤ و ق(١) = ٨

ق̈(س) = ١٢س - ١٠ ⇐ ∫ق̈(س) دس = ∫(١٢س - ١٠) دس

ق̀(س) = ٦س² - ١٠س + ج₁

ق̀(١) = ٦ - ١٠ + ج₁ ⇐ ٤ = -٤ + ج₁ ⇐ ٨ = ج₁

⇐ ق̀(س) = ٦س² - ١٠س + ٨ ⇐ ∫ق̀(س) دس = ∫(٦س² - ١٠س + ٨) دس

ق(س) = ٢س³ - ٥س² + ٨س + ج

ق(١) = ٢ - ٥ + ٨ + ج ⇐ ~~٨~~ = -٣ + ~~٨~~ + ج ⇐ ج = ٣

ق(س) = ٢س³ - ٥س² + ٨س + ٣

2009/ اذا كانت سرعة جسم في اللحظة ن تعطى بالقاعدة ع(ن) = جتا(٢ن) وكان الجسم على بعد ٤م عند بدء الحركة، جد بعد هذا الجسم عندما ن = π/٤

الحل/ الجسم على بعد ٤م عند بدء الحركة ⇐ ف(٠) = ٤

ع = جتا(٢ن) ⇐ ∫ع دن = ∫جتا(٢ن) دن

ف = ½ جا(٢ن) + ج

ف(٠) = ½ جا(٠) + ج ⇐ ٤ = صفر + ج ⇐ ٤ = ج

⇐ ف = ½ جا(٢ن) + ٤

ف(π/٤) = ½ جا(π/٢) + ٤ = ½ × ١ + ٤ = ٩/٢ متر

2010/ إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند (١، ٨) يساوي ٤ وكانت ق̈(س) = ٦س - ٢ جد قاعدة ق(س)

الحل/ ميل المماس لـ ق عند (١، ٨) = ٤ ⇐ ق̀(١) = ٤ و ق(١) = ٨

ق''(س) = ١٢س − ٢ ⟸ ∫ق''(س) دس = ∫(١٢س − ٢) دس

ق'(س) = ٦س^{٢} − ٢س + ج$_{١}$

ق'(١) = ٦ − ٢ + ج$_{١}$ ⟸ ٤ = ٤ + ج$_{١}$ ⟸ ج$_{١}$ = صفر

ق'(س) = ٦س^{٢} − ٢س ⟸ ∫ق'(س) دس = ∫٦س^{٢} − ٢س دس

ق(س) = ٢س^{٣} − س^{٢} + ج

ق(١) = ٢ − ١ + ج ⟸ ٨ = ١ + ج ⟸ ٧ = ج

ق(س) = ٢س^{٣} − س^{٢} + ٧

• ٢٠١١/ يتحرك جسم تسارع يعطى بالعلاقة ت(ن) = (٦ن + ٤) م/ث^{٢} اذا كانت السرعة الابتدائية للجسيم ٥م/ث والمسافة المقطوعة بعد ثانيتين من بدء الحركة (٢٦م) ما المسافة المقطوعة بعد ٣ثواني.

الحل/ السرعة الابتدائية = ٥ ⟸ ع(٠) = ٥ م/ث

المسافة المقطوعة بعد ثانيتين من بدء الحركة = ٢٦ ⟸ ف(٢) = ٢٦ متر

ت = ٦ن + ٤ ⟸ ∫ت دن = ∫(٦ن + ٤) دن

ع = ٣ن^{٢} + ٤ن + ج

ع(٠) = ج ⟸ ٥ = ج

⟸ ع = ٣ن^{٢} + ٤ن + ٥ ⟸ ∫ع دن = ∫(٣ن^{٢} + ٤ن + ٥) دن

ف = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٥ن + ج

ف(٢) = ٨ + ٨ + ١٠ + ج ⟸ ٢٦ = ٢٦ + ج ⟸ ج = صفر

⟸ ف = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٥ن

ف(٣) = ٢٧ + ٢×٩ + ٥×٣ = ٦٠ متر

• ٢٠١٤/ أوجد معادلة المنحنى ص = ق(س) علماً بأن ق''(س) = ٢جتا(٢س) ومعادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٠،١) هي ص = س + ١

الحل/ معادلة المماس عند (٠،١) هي ص = س + ١

نقطة تماس

ص' = ١ = ق'(٠) ، ق(٠) = ١

ق''(س) = ٢جتا(٢س) ⟸ ∫ق''(س) دس = ∫٢جتا(٢س) دس

ق'(س) = $\frac{٢}{٢}$جا(٢س) + ج

ق'(٠) = جا(٠) + ج ⟸ ١ = ج

⟸ ق'(س) = جا(٢س) + ١

∫ق'(س) دس = ∫(جا(٢س) + ١) دس

ق(س) = $-\frac{١}{٢}$ جتا(٢س) + س + ج

ق(٠) = $-\frac{١}{٢}$ جتا(٠) + ج ⟸ ١ = $-\frac{١}{٢}$ + ج ⟸ ج = ١ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

$\Leftarrow$ ق(س) = $-\frac{1}{2}$ جا(٢س) + س + $\frac{3}{2}$

• 2015 / يتحرك جسم في خط مستقيم بتسارع تَ(ن) = (٣ن² + ن) م/ث²، فإذا كانت سرعته بعد ثانيتين من بدء الحركة = ٣ أمثال سرعته الابتدائية، ما سرعته بعد (٣) ثواني من بدء الحركة علماً بأن المسافة بالأمتار؟

الحل / ع(٢) = ٣ع(٠)

تَ = ٣ن² + ن $\Leftarrow$ ∫ تَ دن = ∫(٣ن² + ن) دن

ع = ن³ + $\frac{1}{2}$ن² + جـ

ع(٠) = جـ

ع(٢) = ٢³ + $\frac{2^2}{2}$ + جـ $\Leftarrow$ ع(٢) = ١٠ + جـ

وبما أن ع(٢) = ٣ع(٠) $\Leftarrow$ ١٠ + جـ = ٣جـ $\Leftarrow$ $\frac{10}{2}$ = $\frac{2}{2}$جـ $\Leftarrow$ جـ = ٥

ع(ن) = ن³ + $\frac{1}{2}$ن² + ٥

ع(٣) = ٣³ + $\frac{3^2}{2}$ + ٥ = ٢٧ + ٥ + $\frac{9}{2}$ = ٣٦,٥ متر

• 2016 / إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند (١،٥) الواقعة عليه يساوي (٤)، كانت قً(س) = ١٢س − ٨، أوجد قاعدة ق(س)

الحل / (١،٥) نقطة تماس $\Leftarrow$ ق(١) = ٥

ميل مماس ق عند (س = ١) = ٤ $\Leftarrow$ قَ(١) = ٤

قً(س) = ١٢س − ٨ $\Leftarrow$ ∫ قً(س) دس = ∫(١٢س − ٨) دس

قَ(س) = ٦س² − ٨س + جـ

قَ(١) = ٦ − ٨ + جـ١ $\Leftarrow$ ٤ = −٢ + جـ١ $\Leftarrow$ جـ١ = ٦

$\Leftarrow$ قَ(س) = ٦س² − ٨س + ٦ $\Leftarrow$ ∫ قَ(س) دس = ∫(٦س² − ٨س + ٦) دس

ق(س) = ٢س³ − ٤س² + ٦س + جـ

ق(١) = ٢ − ٤ + ٦ + جـ $\Leftarrow$ ٥ = ٤ + جـ $\Leftarrow$ ١ = جـ

$\Leftarrow$ ق(س) = ٢س³ − ٤س² + ٦س + ١

• 2019 دور أول / إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي (٩س − ٣س²) جد قاعدة ق(س) علماً بأن المستقيم س + ص = ٤ يمس منحنى الاقتران عند النقطة (١، ق(١))

الحل / (١، ق(١)) ∈ للمماس $\Leftarrow$ ١ + ق(١) = ٤ $\Leftarrow$ ق(١) = ٣

س + ص = ٤ $\Leftarrow$ صَ + ١ = ٠ $\Leftarrow$ صَ = −١ = ميل المماس

$\Leftarrow$ −١ = قَ(١)

ميل المماس لـ ق = قَ(س) = أ س − ٣ س^2

قَ(١) = أ − ٣ ⟸ −١ = أ − ٣ ⟸ أ = ٢

⟸ قَ(س) = ٢س − ٣س^2

∫ قَ(س) دس = ∫ (٢س − ٣س^2) دس

ق(س) = س^2 − س^3 + جـ

ق(١) = ١ − ١ + جـ ⟸ جـ = ٣

⟸ ق(س) = س^2 − س^3 + ٣

• 2020 دور أول / تحرك جسم في خط مستقيم من النقطة (و) مبتعداً عنها بسرعة ابتدائية مقدارها ٣م/ث فإذا كان تسارعه في أي لحظة يساوي (ن) م/ث^2 ما سرعته بعد (٥ث) من بدء الحركة وما المسافة التي قطعها خلال هذه الثواني.

الحل/ سرعته الابتدائية = ع(٠) = ٣ م/ث ، ف(٠) = ٠

ت = ن ⟸ ∫ت دن = ∫ن دن ⟸ ع = ½ن^2 + جـ

ع(٠) = جـ ⟸ ٣ = جـ

⟸ ع = ½ن^2 + ٣ ⟸ ع(٥) = ٢٥/٢ + ٣ = (٢٥ + ٦)/٢ = ٣١/٢ = ١٥٫٥ م/ث

∫ع دن = ∫(½ن^2 + ٣) دن ⟸ ف = ½ × ن^3/٣ + ٣ن + جـ

ف(٠) = جـ ⟸ ٠ = جـ

⟸ ف = ن^3/٦ + ٣ن + ٠ ⟸ ف(٥) = ١٢٥/٦ + ٣×٥ = ١٢٥/٦ + ١٥

⟸ ف(٥) = (١٢٥ + ٦×١٥)/٦ = ٢١٥/٦ م

• 2020 دور أول / إذا كان هـ^س ق(س) + هـ^س قَ(س) = جاس ما قاعدة ق(س) المار بنقطة الأصل.

الحل/ ق(س) يمر بنقطة الأصل ⟸ ق(٠) = ٠

طريقة (١): لاحظ: مشتقة ضرب

هـ^س ق(س) + هـ^س قَ(س) = جاس

(هـ^س ق(س))' = جاس "نأخذ التكامل للطرفين.

∫(هـ^س ق(س))' دس = ∫جاس دس

هـ^س ق(س) = −جتاس + جـ

هـ^٠ ق(٠) = −جتا(٠) + جـ

١ × ٠ = −١ + جـ ⟸ جـ = ١

هـ^س ق(س) = −جتاس + ١ ⇐ ق(س) = $\frac{١ - جتاس}{هـ^س}$

طريقة (٢): هـ^س ق(س) + هـ^س ق̄(س) = جاس "بأخذ التكامل للطرفين"

∫ هـ^س ق(س) دس + ∫ هـ^س ق̄(س) دس = ∫ جاس دس ← (١)

* ∫ هـ^س ق(س) دس بالأجزاء

ق(س) = ق ، هـ^س دس = دع

ق̄(س) دس = دق ، هـ^س = ع

⇐ ∫ هـ^س ق(س) دس = هـ^س ق(س) − ∫ هـ^س ق̄(س) دس نعوضها في (١)

هـ^س ق(س) − ∫ $\cancel{\text{هـ}^\text{س} \text{ق̄(س) دس}}$ + ∫ $\cancel{\text{هـ}^\text{س} \text{ق̄(س) دس}}$ = −جتاس + جـ

هـ^س ق(س) = −جتاس + جـ ثمّ نكمل بنفس الطريقة.

• 2020 دور ثاني / إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) يعطى بالعلاقة ق̄(س) = ٢ظا^٢س + ٨جتا^٢س

أوجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٥ + \frac{\pi}{٢})$

الحل/ ميل المماس = ق̄(س) = ٢ظا^٢س + ٨جتا^٢س

∫ ق̄(س) دس = ∫ ٢ظا^٢س + ٨جتا^٢س دس

ق(س) = ∫ ٢(قا^٢س − ١) + ٨ × $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا(٢س)) دس

ق(س) = ∫ ٢قا^٢س − ٢ + ٤ + ٤جتا(٢س) دس

⇐ ق(س) = ∫ (٢قا^٢س + ٤جتا(٢س) + ٢) دس = ٢ظاس + $\frac{٤}{٢}$ جا(٢س) + ٢س + جـ

ق($\frac{\pi}{٤}$) = ٢ظا($\frac{\pi}{٤}$) + ٢جا($\frac{\pi}{٢}$) + $\frac{\pi}{٢}$ + جـ

٥ + $\cancel{\frac{\pi}{٢}}$ = ١×٢ + ٢×١ + $\cancel{\frac{\pi}{٢}}$ + جـ ⇐ جـ = ١

⇐ ق(س) = ٢ظاس + ٢جا(٢س) + ٢س + ١

• 2020 دور ثاني / تحرك جسم في خط مستقيم ابتداءً من نقطة الأصل وبسرعة ابتدائية مقدارها ٢٤م/ث فإذا كان تسارعه في أي لحظة = (−٦ن) م/ث^٢ ، أوجد إزاحته عن نقطة الأصل (و) بعد مرور (ن) ث.

الحل/ سرعة ابتدائية = ع(٠) = ٢٤م/ث ، من نقطة الأصل ⇐ ف(٠) = ٠

ت = −٦ن ⇐ ∫ ت دن = ∫ −٦ن دن

ع = −٣ن^٢ + جـ ⇐ ع(٠) = جـ ⇐ ٢٤ = جـ

ع = −٣ن^٢ + ٢٤ ⇐ ∫ ع دن = ∫ (−٣ن^٢ + ٢٤) دن

ف = −ن^٣ + ٢٤ن + جـ ⇐ ف(٠) = جـ = ٠

$\Leftarrow$ ف(ن) = $-ن^3 + 24ن$

ف(4) = $-64 + 24 \times 4 = -64 + 96 \Leftarrow$ ف(4) = 32 متر.

• 2020 دورثاني/ إذا كان م(س) اقترانًا أصليًا موجبًا للاقتران هـ(س) فإذا كان م(س) يمر بالنقطة (3، هـ) وكان هـ(س) = 2س م(س) أثبت أن م($\sqrt{8}$) = 1

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ هـ(س) المتصل $\Leftarrow$ م̀(س) = هـ(س)

م(س) موجب $\Leftarrow$ م(س) > 0 ، م يمر بـ (3، هـ) $\Leftarrow$ م(3) = هـ

هـ(س) = 2س م(س) $\Leftarrow$ م̀(س) = 2س م(س) $\Leftarrow \frac{م̀(س)}{م(س)} = 2س$

$\int \frac{م̀(س)}{م(س)}$ ءس = $\int$ 2س ءس

لوهـ|م(س)| = $س^2$ + جـ ، بما أن م(س) > 0 $\Leftarrow$ |م(س)| = م(س)

لوهـ(م(س)) = $س^2$ + جـ $\Big|_{س=3}$

لوهـ(م(3)) = 9 + جـ $\Leftarrow$ لوهـ هـ = 9 + جـ $\Leftarrow$ 1 − 9 = جـ $\Leftarrow$ −8 = جـ

$\Leftarrow$ لوهـ(م(س)) = $س^2 - 8$

لوهـ(م($\sqrt{8}$)) = $(\sqrt{8})^2 - 8 \Leftarrow$ لوهـ(م($\sqrt{8}$)) = 0 $\Leftarrow$ هـ⁰ = م($\sqrt{8}$)

1 = م($\sqrt{8}$) #

• 2020 دورثالث/ اذاكان المستقيم ص = س + 4 يمس منحنى الاقتران هـ(س) عند (س=1) وكان هـ̀̀(س) = 6س + 2 أوجد قاعدة الاقتران هـ(س)

الحل/ (1، هـ(1)) نقطة تماس $\Leftarrow$ للمماس $\Leftarrow$ هـ(1) = 1 + 4 = 5

ص = س + 4 $\Leftarrow$ ص̀ = 1 = هـ̀(1) = ميل المماس

هـ̀̀(س) = 6س + 2 $\Leftarrow \int$ هـ̀̀(س) ءس = $\int$ (6س + 2) ءس

هـ̀(س) = $3س^2$ + 2س + جـ

هـ̀(1) = 3 + 2 + جـ $\Leftarrow$ 1 = 5 + جـ $\Leftarrow$ −4 = جـ

هـ̀(س) = $3س^2$ + 2س − 4

$\int$ هـ̀(س) ءس = $\int$ ($3س^2$ + 2س − 4) ءس

هـ(س) = $س^3 + س^2$ − 4س + جـ

هـ(1) = 1 + 1 − 4 + جـ $\Leftarrow$ 5 = −2 + جـ $\Leftarrow$ 7 = جـ

$\Leftarrow$ هـ(س) = $س^3 + س^2$ − 4س + 7

.. حمى اللّه قلبكَ ما دُمتَ تحاول ..

- 2021 دور أول / إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي $\sqrt{س} + \frac{1}{\sqrt{س}}$ جد قاعدة ق(س) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(1 ، \frac{2}{3})$

الحل /

ميل المماس $= ق'(س) = \sqrt{س} + \frac{1}{\sqrt{س}} \Leftarrow \int ق'(س)\,دس = \int \left(\sqrt{س} + \frac{1}{\sqrt{س}}\right) دس$

$ق(س) = \int س^{\frac{1}{2}}\,دس + 2\int \frac{1}{2\sqrt{س}}\,دس$

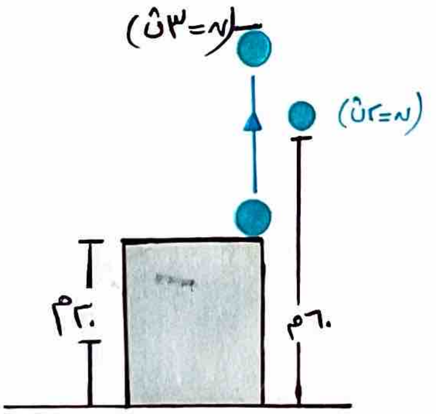
$ق(س) = \frac{س^{\frac{1}{2}+1}}{(\frac{1}{2}+1)} + 2\int (\sqrt{س})'\,دس \Leftarrow ق(س) = \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{س} + جـ$

$ق(1) = \frac{2}{3} + 2\sqrt{1} + جـ$

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + 2 + جـ \Leftarrow جـ = -2$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{2}{3}\sqrt{س^3} + 2\sqrt{س} - 2$

- 2021 دور أول / قذف جسم رأسياً إلى أعلى من حافة سطح بناية بسرعة ابتدائية قدرها (30 م/ث) فإذا كان تسارعه (-10 م/ث²) وكان ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانيتين من بدء الحركة (60 متر) ما أقصى ارتفاع يصله الجسم عن سطح الأرض



الحل / السرعة الابتدائية = ع(0) = 30 م/ث

باعتبار المستوى الصفري هو الأرض ⇐ ف(0) = ل = ارتفاع البرج

$ت = -10$

$\int ت\,دن = \int -10\,دن$

$ع = -10ن + جـ \Leftarrow ع(0) = جـ$

$جـ = 30$

$ع = -10ن + 30$

$\int ع\,دن = \int(-10ن + 30)\,دن \Leftarrow ف = -5ن^2 + 30ن + جـ$

$ف(0) = جـ = ل$

$ف = -5ن^2 + 30ن + ل$

$ف(2) = -5\times4 + 30\times2 + ل \Leftarrow 60 = 40 + ل \Leftarrow ل = 20$

* $ع = -10ن + 30 = 0$ عند أقصى ارتفاع ⇐ $-10ن = -30$ ⇐ ن = 3ث "زمن الصعود"

$ف(3) = -5\times9 + 30\times3 + 20$ عن الأرض

$= -45 + 90 + 20$

= 65 متر أقصى ارتفاع عن الأرض

ولكن .. عدني أن لا يُراوح وقتك على قارعة السفاسف !!

• 2021 دور ثاني / تحرك جسم في خط مستقيم من نقطة الأصل متبعداً عنها بسرعة ابتدائية مقدارها (٣م/ث) فإذا كان تسارعه في أي لحظة (٦ن)م/ث²، ما المسافة التي قطعها الجسم خلال ٥ ثواني من بدء الحركة

الحل/

تحرك من نقطة الأصل مُبتعداً عنها ⇐ $\text{ف}(0) = 0$

سرعته الابتدائية $= \text{ع}(0) = 3\,\text{م/ث}$

$\text{ت}(\text{ن}) = 6\text{ن} \Leftarrow \int \text{ت}\,\text{دن} = \int 6\text{ن}\,\text{دن}$

$\text{ع} = 3\text{ن}^2 + \text{جـ} \Leftarrow \text{ع}(0) = \text{جـ} \Leftarrow 3 = \text{جـ}$

$\text{ع}(\text{ن}) = 3\text{ن}^2 + 3 \Leftarrow \int \text{ع}\,\text{دن} = \text{ن}^3 + 3\text{ن} + \text{جـ}$

$\text{ف} = \text{ن}^3 + 3\text{ن} + \text{جـ}$

$\text{ف}(0) = \text{جـ} \Leftarrow 0 = \text{جـ}$

$\Leftarrow \text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^3 + 3\text{ن} \Leftarrow \text{ف}(5) = 5^3 + 3\times 5$

$\text{ف}(5) = 125 + 15 = 140$ متر

• 2021 دور ثاني / إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي (ب قا²س) جد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحناه يمر بالنقطتين $(\frac{\pi}{4}, 3)$ ، $(\frac{7\pi}{4}, -1)$

الحل/

ق(س) يمر بالنقطتين $(\frac{\pi}{4}, 3)$ ، $(\frac{7\pi}{4}, -1)$ ⇐ $\text{ق}(\frac{\pi}{4}) = 3$ ، $\text{ق}(\frac{7\pi}{4}) = -1$

ميل المماس $= \text{ق}'(\text{س}) = \text{ب قا}^2\text{س}$

$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{ب قا}^2\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ب ظاس} + \text{جـ}$

$\text{ق}(\frac{\pi}{4}) = \text{ب ظا}(\frac{\pi}{4}) + \text{جـ} \Leftarrow 3 = \text{ب} + \text{جـ}$ ← معادلة (١)

$\text{ق}(\frac{7\pi}{4}) = \text{ب ظا}(\frac{7\pi}{4}) + \text{جـ} \Leftarrow -1 = -\text{ب} + \text{جـ}$ ← معادلة (٢)

(١)+(٢) / $\frac{2}{2} = \frac{2\text{جـ}}{2} \Leftarrow \text{جـ} = 1$ نعوضها في (١)

$3 = \text{ب} + 1 \Leftarrow \text{ب} = 2$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = 2\text{ظاس} + 1$

• 2022 دور أول / إذا كان الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س ق}'(\text{س}) + \text{هـ}^{\text{س}}\text{ق}^2(\text{س})$ ، $\text{ق}(\text{س}) \neq 0$ ، $\text{ق}(-1) = -\text{هـ}$. بيّن أن $\text{ق}(\text{ب}) = \frac{\text{ب}}{\text{هـ}^{\text{ب}}}$

الحل/

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س ق}'(\text{س}) + \text{هـ}^{\text{س}}\text{ق}^2(\text{س}) \Leftarrow \text{ق}(\text{س}) - \text{س ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}\text{ق}^2(\text{س})$

$\Leftarrow \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{س ق}'(\text{س})}{\text{ق}^2(\text{س})} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \left(\frac{\text{س}}{\text{ق}(\text{س})}\right)' = \text{هـ}^{\text{س}}$ أخذ التكامل للطرفين

$\int \left(\frac{\text{س}}{\text{ق}(\text{س})}\right)' \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\frac{س}{ق(س)} = هـ^{س} + جـ \Leftarrow \frac{-1}{ق(-1)} = هـ^{-1} + جـ \Leftarrow \cancel{\frac{-1}{-هـ}} = \cancel{\frac{1}{هـ}} + جـ \Leftarrow جـ = صفر$

$\Leftarrow \frac{س}{ق(س)} = هـ^{س} \Leftarrow س = ق(س) \times هـ^{س} \Leftarrow \frac{س}{هـ^{س}} = ق(س)$

المطلوب/ $ق(ب) = \frac{ب}{هـ^{ب}}$ #

• 2022 دور أول/ يتحرك جسم في خط مستقيم مبتدئاً من نقطة الأصل (و) مبتعداً عنها بسرعة ابتدائية مقدارها (١٠م/ث) فإذا كان تسارعه في أي لحظة يساوي (أ) م/ث² فإذا توقف الجسم عن الحركة بعد (٥ ثواني) من بدء الحركة، ما المسافة التي قطعها الجسم.

الحل/ من نقطة الأصل ومبتعداً عنها ⇐ ف(٠) = ٠ ، سرعته الابتدائية = ع(٠) = ١٠ م/ث

توقف الجسم عن الحركة بعد (٥ث) ⇐ ع(٥) = صفر

$ت(ن) = أ \Leftarrow \int ت\,دن = \int أ\,دن$

$ع = أن + جـ \Leftarrow ع(٠) = جـ \Leftarrow ١٠ = جـ$

$ع = أن + ١٠ \Leftarrow ع(٥) = ٥أ + ١٠ = صفر$

$٥أ = -١٠ \Leftarrow أ = -٢$

$\Leftarrow ع = -٢ن + ١٠ \Leftarrow \int ع\,دن = \int (-٢ن + ١٠)\,دن$

$ف = -ن^{٢} + ١٠ن + جـ \Leftarrow ف(٠) = جـ = ٠$

$ف = -ن^{٢} + ١٠ن$

$ف(٥) = -٢٥ + ٥٠ = ٢٥$ متر

• 2022 دور ثاني/ إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه يُعطى بالعلاقة (أ - ١٢س²) وكانت معادلة المماس عندما (س=٠) هي (ص + ١٠س = ٨)، ما قاعدة ق(س)

الحل/ (٠، ق(٠)) نقطة تماس للمماس ⇐ $ق(٠) + ١٠ \times ٠ = ٨ \Leftarrow ق(٠) = ٨$

* $ص + ١٠س = ٨ \Leftarrow صَ + ١٠ = ٠ \Leftarrow صَ = -١٠ = قَ(٠)$ = ميل المماس.

* ميل المماس = $قَ(س) = أ - ١٢س^{٢}$

$قَ(٠) = أ \Leftarrow -١٠ = أ$

$\Leftarrow قَ(س) = -١٠ - ١٢س^{٢} \Leftarrow \int قَ(س)\,دس = \int (-١٠ - ١٢س^{٢})\,دس$

$ق(س) = -١٠س - ٤س^{٣} + جـ$

$ق(٠) = جـ \Leftarrow ٨ = جـ$

$\Leftarrow ق(س) = -١٠س - ٤س^{٣} + ٨$

• 2023 دور أول/ اذا كان $قَ(س) = ظاس + ظا^{٣}س$ ، $س \in]٠، \frac{\pi}{٢}[$ وكان $ق(\frac{\pi}{٤}) = -١$

أثبت أن $(هـ^{ق(س)+١}) = ظاس$

الحل/ ∫ق(س) دس = ∫ظاس دس + ∫ظتاس دس

هـ(س) = ∫ (جاس / جتاس) دس + ∫ (جتاس / جاس) دس

هـ(س) = -لوهـ|جتاس| + لوهـ|جاس| + ج ⟸ هـ(س) = لوهـ |جاس / جتاس| + ج

⟸ هـ(س) = لوهـ|ظاس| + ج وبما أن س ∈]٠، $\frac{\pi}{2}$[⟸ ظاس > ٠

هـ(س) = لوهـ(ظاس) + ج

هـ($\frac{\pi}{4}$) = لوهـ(ظا $\frac{\pi}{4}$) + ج ⟸ -١ = لوهـ ١ + ج ⟸ -١ = ج

⟸ هـ(س) = لوهـ(ظاس) - ١
+١ +١

هـ(س) + ١ = لوهـ(ظاس) ⟸ هـ^(هـ(س)+١) = ظاس #

• 2023 دور أول / لتكن كلاً من هـ(س)، ع(س) اقترانين موجبين وقابلين للتكامل حيث
هـَ(س) = هـ(س) - ع(س)، عَ(س) = ع(س) - هـ(س) وكان ع(٠) = ١، هـ(٠) = ٥
١/ أثبت أن (هـ+ع)(س) = ٦ ٢/ جد قاعدة الاقتران هـ(س).

الحل/
١/ هـَ(س) = هـ(س) - ع(س) ـــ (١)
عَ(س) = ع(س) - هـ(س) ـــ (٢)

بالجمع (١)+(٢)/ هـَ(س) + عَ(س) = هـ(س) - ع(س) + ع(س) - هـ(س)

هـَ(س) + عَ(س) = ٠ نأخذ التكامل للطرفين

∫هـَ(س) دس + ∫عَ(س) دس = ∫٠ دس

هـ(س) + ع(س) = ج نعوض (س = ٠)

هـ(٠) + ع(٠) = ج ⟸ ١ + ٥ = ج ⟸ ٦ = ج

⟸ هـ(س) + ع(س) = ٦ #

٢/ من المطلوب السابق هـ(س) + ع(س) = ٦ ⟸ ع(س) = ٦ - هـ(س)

معطى أن هـَ(س) = هـ(س) - ع(س)

هـَ(س) = هـ(س) - [٦ - هـ(س)]

هـَ(س) = هـ(س) - ٦ + هـ(س)

هـَ(س) = ٢هـ(س) - ٦

هـَ(س) = ٢(هـ(س) - ٣)

هـَ(س) / (هـ(س) - ٣) = ٢ نأخذ التكامل للطرفين

∫ هـَ(س) / (هـ(س) - ٣) دس = ∫٢ دس .

⟸ لوهـ |ص(س) − ٣| = ٣س + جـ |س=٠

لوهـ |ص(٠) − ٣| = جـ ⟸ لوهـ |٥ − ٣| = جـ ⟸ لوهـ ٢ = جـ

⟸ لوهـ |ص(س) − ٣| = (٣س + لوهـ ٢) ⟸ هـ^(٣س + لوهـ ٢) = |ص(س) − ٣|

هـ^٣س × هـ^لوهـ ٢ = |ص(س) − ٣|

٢هـ^٣س = |ص(س) − ٣|

• 2023 دور أول / إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند (٠، ٢) الواقعة عليه يساوي (٣) وكان ق″(س) = ٣ − ٤س ، جد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل/ (٠، ٢) نقطة تماس ⟸ ق(٠) = ٢

ميل المماس عند (س = ٠) = ٣ ⟸ ق′(٠) = ٣

ق″(س) = ٣ − ٤س ⟸ ∫ق″(س) دس = ∫(٣ − ٤س) دس

ق′(س) = ٣س − ٢س² + جـ

ق′(٠) = جـ ⟸ ٣ = جـ

ق′(س) = ٣س − ٢س² + ٣ ⟸ ∫ق′(س) دس = ∫(٣س − ٢س² + ٣) دس

ق(س) = ٣/٢ س² − ٢/٣ س³ + ٣س + جـ

ق(٠) = جـ ⟸ ٢ = جـ

ق(س) = ٣/٢ س² − ٢/٣ س³ + ٣س + ٢

• 2023 دور ثاني / تحرك جسم في خط مستقيم من نقطة الأصل مبتعدًا عنها بسرعة ابتدائية مقدارها ٣م/ث ، فإذا كان تسارع الجسم في أي لحظة يساوي ٦ن م/ث² ، جد كل مما يلي:

١/ سرعة الجسم بعد (٥ ثواني) من بدء الحركة

٢/ المسافة التي يقطعها الجسم خلال الثواني الخمس الأولى من الحركة.

الحل/ تحرك من نقطة الأصل مبتعدًا عنها ⟸ ف(٠) = ٠ ، سرعته الابتدائية = ع(٠) = ٣

ع′(ن) = ٦ن ⟸ ∫ع′ دن = ∫٦ن دن

ع = ٣ن² + جـ ⟸ ع(٠) = جـ = ٣

ع = ٣ن² + ٣ ⟸ ∫ع دن = ∫٣ن² + ٣ دن

ف = ن³ + ٣ن + جـ

ف(٠) = جـ ⟸ ٠ = جـ

ف = ن³ + ٣ن

١/ ع(٥) = ٣(٥)² + ٣ = ٧٥ + ٣ ⟸ ع(٥) = ٧٨ م/ث

٢/ ف(٥) = ٥³ + ٣×٥ = ١٢٥ + ١٥ ⟸ ف(٥) = ١٤٠ متر

• 2023 دور ثالث / اذا كان $\text{م}(\text{س})$ اقتراناً أصلياً موجباً للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ فإذا كان الاقتران $\text{م}(\text{س})$ يمر بالنقطة $(0 ، \text{هـ})$ وكان $\text{س}^2\,\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}\,\text{م}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})$ بيّن أن $\text{م}(4) - \text{م}(3) = 7\text{هـ}$

الحل / $\text{م}(\text{س})$ اقتران أصلي لـ $\text{ق}(\text{س}) \Leftarrow \text{م}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$

$\text{م}(\text{س})$ اقتران موجب $\Leftarrow \text{م}(\text{س}) > 0$ ∴ م يمر بـ $(0 ، \text{هـ}) \Leftarrow \text{م}(0) = \text{هـ}$

$$\text{س}^2\,\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}\,\text{م}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})$$

$$\text{س}^2\,\text{م}'(\text{س}) = 2\text{س}\,\text{م}(\text{س}) - \text{م}'(\text{س}) \Leftarrow \text{س}^2\,\text{م}'(\text{س}) + \text{م}'(\text{س}) = 2\text{س}\,\text{م}(\text{س})$$

$$\Leftarrow \text{م}'(\text{س})(\text{س}^2+1) = 2\text{س}\,\text{م}(\text{س}) \Leftarrow \frac{\text{م}'(\text{س})}{\text{م}(\text{س})} = \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+1}$$

$$\int \frac{\text{م}'(\text{س})}{\text{م}(\text{س})}\,\text{دس} = \int \left(\frac{2\text{س}}{\text{س}^2+1}\right)\text{دس}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\underbrace{|\text{م}(\text{س})|}_{\text{م}(\text{س}) > 0 \,∴} = \text{لو}_{\text{هـ}}\underbrace{|\text{س}^2+1|}_{\text{دائماً موجب}} + \text{جـ} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{م}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+1) + \text{جـ}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{م}(0)) = \text{لو}_{\text{هـ}}1 + \text{جـ}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = \text{جـ} \Leftarrow 1 = \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{م}(\text{س})) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+1) + 1 \Leftarrow \text{م}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+1)+1}$$

$$\text{م}(\text{س}) = \cancel{\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}}}(\text{س}^2+1) \times \text{هـ}^1 \Leftarrow \text{م}(\text{س}) = (\text{هـ})(\text{س}^2+1)$$

$$\text{م}(4) = \text{هـ} \times (4^2+1) = 17\text{هـ}$$

$$\text{م}(3) = (9+1)\text{هـ} = 10\text{هـ}$$

$$\Leftarrow \text{م}(4) - \text{م}(3) = 17\text{هـ} - 10\text{هـ} = 7\text{هـ} \quad \#$$

• 2024 دور أول / تحرك جسم في خط مستقيم من النقطة (و) مبتدئاً منها بسرعة ابتدائية تساوي (5م/ث) فإذا كان تسارعه في أي لحظة يعطى بالعلاقة $\text{ت}(\text{ن}) = (2+3\text{ن})$ م/ث² والمسافة المقطوعة بعد ثانيتين من مبدأ الحركة (18م) جد المسافة التي يقطعها الجسم خلال (4) ثوانٍ من مبدأ الحركة.

الحل / المسافة بعد 2ث = 18م $\Leftarrow \text{ف}(2) = 18$م

السرعة الابتدائية $= \text{ع}(0) = 5$ م/ث

$$\text{ت}(\text{ن}) = 2+3\text{ن} \Leftarrow \int \text{ت}\,\text{دن} = \int(2+3\text{ن})\,\text{دن} \Leftarrow \text{ع} = 2\text{ن} + \frac{3}{2}\text{ن}^2 + \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{ع}(0) = \text{جـ} \Leftarrow 5 = \text{جـ}$$

$$\text{ع}(\text{ن}) = 2\text{ن} + \frac{3}{2}\text{ن}^2 + 5$$

$$\int \text{ع}\,\text{دن} = \int\left(2\text{ن} + \frac{3}{2}\text{ن}^2 + 5\right)\text{دن} \Leftarrow \text{ف} = \text{ن}^2 + \frac{1}{2}\text{ن}^3 + 5\text{ن} + \text{جـ}$$

$$\text{ف}(2) = 2^2 + \frac{2^3}{2} + 5\times 2 + \text{جـ}$$

$$\Leftarrow 18 - 14 = \frac{8}{2} + \text{جـ} \Leftarrow 4 - \frac{8}{2} = \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = \text{صفر}$$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^2 + \frac{1}{2}\text{ن}^3 + 5\text{ن} \Leftarrow \text{ف}(4) = 16 + \frac{64}{2} + 20 = 68\ \text{متر}$$

• 2024 دور ثاني / إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي (س، ص) يساوي $\left(\frac{-\sqrt{س}}{س+1}\right)$، س > 0 . جد قاعدة ق(س) علماً أن منحناه يمر بالنقطة $(1، \frac{2}{3})$

الحل

$$\text{ميل العمودي} = \frac{-\sqrt{س}}{س+1} \Leftarrow \text{ميل المماس} = \frac{-1}{\text{ميل العمودي}}$$

$$\Leftarrow ق'(س) = \frac{(س+1)}{\sqrt{س}}$$

$$\int ق'(س)\,دس = \int \left(\frac{س+1}{\sqrt{س}}\right) دس \Leftarrow ق(س) = \int \frac{س}{\sqrt{س}}\,دس + \int \frac{1}{\sqrt{س}}\,دس$$

$$ق(س) = \int س^{\frac{1}{2}}\,دس + 2\int \frac{1}{2\sqrt{س}}\,دس \Leftarrow ق(س) = \frac{س^{\frac{1}{2}+1}}{(\frac{1}{2}+1)} + 2\int (\sqrt{س})'\,دس$$

$$ق(س) = \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{س} + جـ$$

$$ق \text{ يمر ب } (1، \frac{2}{3}) \Leftarrow ق(1) = \frac{2}{3} + 2 + جـ$$

$$\cancel{\frac{2}{3}} = \cancel{\frac{2}{3}} + 2 + جـ \Leftarrow جـ = -2$$

$$\Leftarrow \boxed{ق(س) = \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{س} - 2}$$

• 2024 دور ثاني / انطلق المتسابقان علي ومحمّد معاً من السكون في مسابقة العدو لمسافة (100 متر) وكانت سرعة محمّد تتحدد بالعلاقة $ع_1(ن) = \left(\frac{3ن^2}{2}\right)$ م/ث وسرعة علي تتحدد بالعلاقة $ع_2(ن) = ن$ م/ث. جد زمن وصول كل منهما نهاية السباق وحدد أيهما قطع مسافة السباق أولاً.

الحل

* محمّد:

$$ع_1 = \frac{3}{2}ن^2 \Leftarrow \int ع_1\,دن = \int \frac{3}{2}ن^2\,دن$$

$$ف_1 = \frac{1}{2}ن^3 + جـ$$

$$ف_1(0) = جـ = 0$$

$$ف_1 = \frac{1}{2}ن^3 = 100 \Leftarrow ن^3 = 200$$

$$\boxed{ن = \sqrt[3]{200}\ ث}$$

قطع محمّد السباق في $(\sqrt[3]{200} \approx 5.8)$ ثانية

* علي:

$$ع_2(ن) = ن \Leftarrow \int ع_2\,دن = \int ن\,دن$$

$$\Leftarrow ف_2 = \frac{1}{2}ن^2 + جـ$$

$$ف_2(0) = 0 \Leftarrow جـ = 0$$

$$ف_2 = \frac{1}{2}ن^2 = 100 \Leftarrow ن^2 = 200$$

$$\boxed{ن = \sqrt{200}\ ث}$$

قطع علي السباق في $(\sqrt{200} \approx 14)$ ث

$$ن_1 < ن_2 \Leftarrow \sqrt[3]{200}\ ث < \sqrt{200}\ ث \Leftarrow$$ **محمّد قطع السباق أولاً.**

• 2025 دور أول / بدأ جسم التحرك من السكون في خط مستقيم من نقطة الأصل مبتعداً عنها، فإذا كان تسارع الجسم في أي لحظة يعطى بالعلاقة $ت(ن) = (\sqrt{ن} + 2)$ م/ث². ما بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد (3 ثواني) من بدء الحركة.

الحل: بدأ جسم الحركة من السكون $\Leftarrow ع(0) = 0$ ، من نقطة الأصل $\Leftarrow ف(0) = 0$

$ت(ن) = ٦ن + ٢ \Leftarrow \int ت\,دن = \int (٦ن+٢)\,دن$

$ع = ٣ن^٢ + ٢ن + ج \Leftarrow ع(٠) = ج \Leftarrow صفر = ج$

$\int ع\,دن = \int (٣ن^٢ + ٢ن)\,دن \Leftarrow ف = ن^٣ + ن^٢ + ج$

$ف(٠) = ج \Leftarrow ٠ = ج$

$\Leftarrow ف(ن) = ن^٣ + ن^٢ \Leftarrow ف(٣) = ٣^٣ + ٣^٢ = ٣٦$ م

• جنين 2024/ إذا كان $\int س^٢ قَ(س)\,دس = أ س^٣ - س^٢ + ج$ ، $س > ٠$ ، وكانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند (س = ١) هي ص = ٤س − ٧ جد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل/ (١ ، ق(١)) نقطة تماس ∈ للمماس $\Leftarrow ق(١) = ٤ - ٧ \Leftarrow ق(١) = -٣$

* $ص = ٤س - ٧ \Leftarrow صَ = ٤ = قَ(١) =$ ميل المماس

* $\int س^٢ قَ(س)\,دس = أ س^٣ - س^٢ + ج$ / باشتقاق الطرفين

$س^٢ قَ(س) = ٣أ س^٢ - ٢س \Big|_{س=١} \Leftarrow قَ(١) = ٣أ - ٢ \Leftarrow ٤ = ٣أ - ٢ \Leftarrow \frac{٦}{٣} = \frac{٣أ}{٣} \Leftarrow أ = ٢$

$\Leftarrow \frac{س^٢ قَ(س)}{س^٢} = \frac{٣ \times ٢ س^٢}{س^٢} - \frac{٢س}{س^٢} \Leftarrow قَ(س) = ٦ - \frac{٢}{س} \Leftarrow \int قَ(س)\,دس = \int (٦ - \frac{٢}{س})\,دس$

$\Leftarrow ق(س) = ٦س - ٢ لو_هـ|س| + ج \Leftarrow ق(س) = ٦س - ٢ لو_هـ(س) + ج$ (س > ٠)

$\Leftarrow ق(١) = ٦ - ٢ لو_هـ(١) + ج \Leftarrow -٣ = ٦ + ج \Leftarrow -٩ = ج$

$\Leftarrow ق(س) = ٦س - ٢ لو_هـ(س) - ٩$

• نابلس 2024/ جد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن $قَ(س) - س = ١ - ق(س)$ ، $قَ(٢) = ٢$

الحل/ $قَ(س) - س = ١ - ق(س) \Leftarrow قَ(س) - ١ = س - ق(س)$

$قَ(س) - ١ = -(ق(س) - س)$

$\frac{قَ(س) - ١}{ق(س) - س} = -١ \Leftarrow \int \left(\frac{قَ(س) - ١}{ق(س) - س}\right) دس = \int -١\,دس$

$لو_هـ|ق(س) - س| = -س + ج$

$لو_هـ|ق(٢) - ٢| = -٢ + ج$

$لو_هـ|١ - ٢| = -٢ + ج \Leftarrow ٠ = -٢ + ج$

$ج = ٢$

$\Leftarrow لو_هـ|ق(س) - س| = ٢ - س$

$هـ^{٢-س} = |ق(س) - س|$

$قَ(س) - س = ١ - ق(س)$

$قَ(٢) - ٢ = ١ - ق(٢)$

$٢ - ٢ = ١ - ق(٢)$

$٠ = ١ - ق(٢)$

$١ = ق(٢)$

• قلقيلية 2025 / إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة تقع عليه تُعطى بالعلاقة جاس لوهـ(جا²س قَ(س)) = جتاس ، س ∈]0 ، π[، جد قاعدة ق(س) المار بالنقطة $(\frac{\pi}{4} ، 1)$

الحل /

$$\frac{\text{جاس لوهـ(جا}^2\text{س قَ(س))}}{\text{جاس}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \Leftarrow \text{لوهـ(جا}^2\text{س قَ(س))} = \text{ظتاس}$$

$$[\text{هـ}^{\text{ظتاس}} = \text{جا}^2\text{س قَ(س)}] \div \text{جا}^2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{هـ}^{\text{ظتاس}}}{\text{جا}^2\text{س}} = \text{قَ(س)} \Leftarrow \text{قتا}^2\text{س هـ}^{\text{ظتاس}} = \text{قَ(س)}$$

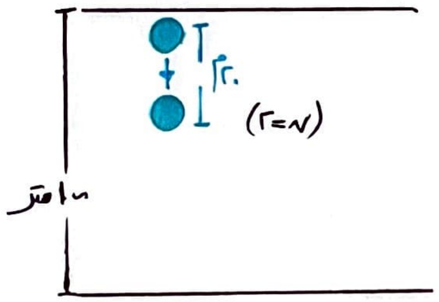
$$\Leftarrow \int \text{قَ(س) دس} = \int \text{هـ}^{\text{ظتاس}} \times \text{قتا}^2\text{س دس}$$

$$\text{ق(س)} = -\int (\text{هـ}^{\text{ظتاس}})' \text{دس} \Leftarrow \text{ق(س)} = -\text{هـ}^{\text{ظتاس}} + \text{جـ}$$

* ق يمر بـ $(\frac{\pi}{4} ، 1)$ $\Leftarrow$ ق$(\frac{\pi}{4})$ = 1 $\Leftarrow$ $1 = -\text{هـ}^{\text{ظتا}(\frac{\pi}{4})} + \text{جـ}$ $\Leftarrow$ 1 = -هـ + جـ $\Leftarrow$ 1 + هـ = جـ

$$\Leftarrow \text{ق(س)} = -\text{هـ}^{\text{ظتاس}} + \text{هـ} + 1$$

• خارجي / أسقطت كرة من ارتفاع (100 متر) عن سطح الأرض تتسارع (10م/ث²) جد سرعة الكرة وهي على ارتفاع (80 متر) عن سطح الأرض.



الحل / ف(0) = 0

* عندما يكون الجسم على ارتفاع (80 متر) عن الأرض تكون
ف(ن) = 100 − 80 = 20

* تَ(ن) = 10 $\Leftarrow$ ∫ تَ دن = ∫ 10 دن

ع = 10ن + جـ

أُسقطت كرة $\Leftarrow$ ع(0) = 0 $\Leftarrow$ جـ = 0

ع = 10ن $\Leftarrow$ ∫ ع دن = ∫ 10ن دن $\Leftarrow$ ف = 5ن² + جـ

ف(0) = 0 $\Leftarrow$ جـ = 0

$\Leftarrow$ ف(ن) = 5ن² = 20

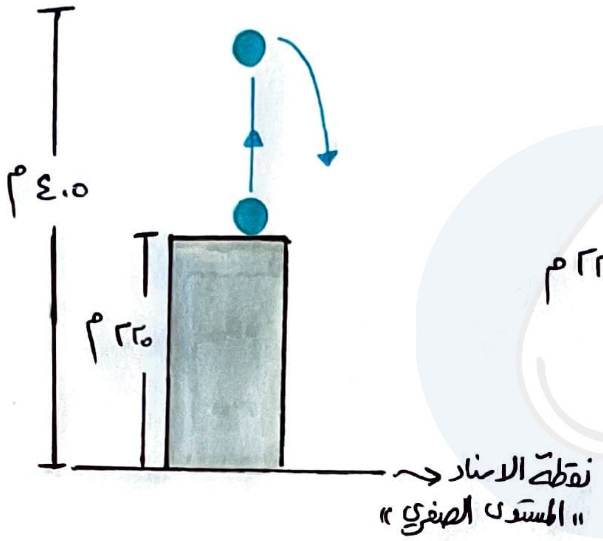
ن² = 4 $\Leftarrow$ ن = 2ث .

ع(2) = 10 × 2 = 20م/ث سرعة الجسم وهو على ارتفاع (80 متر) .

• خارجي / من نقطة على ارتفاع (225 متر) قذف جسم رأسيًا لأعلى من قمة برج بسرعة مقدارها (أ م/ث) وتسارع مقداره (−10م/ث²) فإذا وصل الجسم أقصى ارتفاع عن سطح الأرض (405م) ما قيمة الثابت أ ، أ؟.

الحل / سرعته الابتدائية = ع(0) = أ ، أقصى ارتفاع عن الأرض = 405 م

تَ(ن) = −10م/ث² $\Leftarrow$ ∫ تَ دن = ∫ −10 دن



ع = -١٠ن + جـ

ع(٠) = ٠ + جـ ⇐ م = جـ

⇐ ع(ن) = -١٠ن + م

∫ ع دن = ∫ -١٠ن + م دن

ف = -٥ن² + م ن + جـ ، ف(٠) = ٢٢٥ م

ف(٠) = جـ ⇐ ٢٢٥ = جـ

⇐ ف(ن) = -٥ن² + م ن + ٢٢٥

* أقصى ارتفاع :

ع(ن) = ٠ ⇐ -١٠ن + م = ٠

⇐ م = ١٠ن ← معادلة (١).

نعوض

أقصى ارتفاع عن الأرض = ٤٠٥ = ف(ن) ⇐ ٤٠٥ = -٥ن² + م ن + ٢٢٥

٤٠٥ = -٥ن² + ١٠ن × ن + ٢٢٥

٥ن² - ١٠ن² + ١٨٠ = ٠ ⇐ ١٨٠/٥ = ٥ن²/٥ ⇐ ن² = ٣٦ ⇐ ن = ٦ ث نعوضها في (١)

م = ١٠ × ٦ ⇐ م = ٦٠

أسئلة للمهتمين — الدرس الثالث: تطبيقات التكامل غير المحدود

• سؤال (١): إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) يعطى بالعلاقة $\frac{1-\text{ظا}^2 س}{1+\text{ظا}^2 س}$ وكان منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{12}, -\frac{1}{4})$، أجد ق$(\frac{\pi}{2})$

الحل

ميل المماس = ق'(س) = $\frac{1-\text{ظا}^2 س}{1+\text{ظا}^2 س} = \frac{1-\text{ظا}^2 س}{\text{قا}^2 س} = \frac{1}{\text{قا}^2 س} - \frac{\text{ظا}^2 س}{\text{قا}^2 س}$

$\Leftarrow$ ق'(س) = جتا^{2}س − ظا^{2}س × جتا^{2}س = جتا^{2}س − $\frac{\text{جا}^2 س}{\cancel{\text{جتا}^2 س}}$ × $\cancel{\text{جتا}^2 س}$

ق'(س) = جتا^{2}س − جا^{2}س $\Leftarrow$ ق'(س) = جتا(٢س) أخذ التكامل للطرفين

$\Leftarrow$ $\int$ ق'(س) دس = $\int$ جتا(٢س) دس

ق(س) = $\frac{1}{2}$ جا(٢س) + جـ

* ق(س) يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{12}, -\frac{1}{4})$ $\Leftarrow$ ق$(\frac{\pi}{12}) = -\frac{1}{4}$

$\Leftarrow$ $\frac{1}{2}$ جا$(\frac{\pi}{6})$ + جـ = $-\frac{1}{4}$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ + جـ = $-\frac{1}{4}$

$\Leftarrow$ جـ = $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\Leftarrow$ ق(س) = $\frac{1}{2}$ جا(٢س) − $\frac{1}{2}$

ق$(\frac{\pi}{2})$ = $\frac{1}{2}$ جا(π) − $\frac{1}{2}$ = صفر − $\frac{1}{2}$ = $-\frac{1}{2}$

• سؤال (٢): إذا كان ق''(س) = أ + ٣ب س^2، أوجد قيمة الثابتين أ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند نقطة الأصل هو $(\frac{2}{3})$ علماً بأن منحنى ق(س) يمر بالنقطة (١، ٢)

الحل

ميل المماس لـ ق عند س = ٠ هو $\frac{2}{3}$ $\Leftarrow$ ق'(٠) = $\frac{2}{3}$، المماس عند (٠، ٠) $\Leftarrow$ ق(٠) = ٠

ق''(س) = أ + ٣ب س^2

ق'(٠) = أ $\Leftarrow$ $\frac{2}{3}$ = أ

ق'(س) = أ + ٣ب س^2 $\Leftarrow$ ق'(س) = $\frac{2}{3}$ + ٣ب س^2 $\Leftarrow$ $\int$ ق'(س) دس = $\int \frac{2}{3}$ + ٣ب س^2 دس

$\Leftarrow$ ق(س) = $\frac{2}{3}$ س + ب س^3 + جـ

ق(٠) = جـ $\Leftarrow$ ٠ = جـ

$\Leftarrow$ ق(س) = $\frac{2}{3}$ س + ب س^3

ق(س) يمر بـ (١، ٢) $\Leftarrow$ ق(١) = $\frac{2}{3}$ + ب $\Leftarrow$ ٢ = $\frac{2}{3}$ + ب $\Leftarrow$ ٢ − $\frac{2}{3}$ = ب

$\Leftarrow$ $\frac{4}{3}$ = ب

الدرس الرابع | طرق التكامل - التعويض

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• وزاري ص 160 / ما قيمة $\int$ قتا^{4}س ظتاس دس

أ/ $-\frac{1}{5}$ قتا^{5}س + جـ   ب/ $-\frac{1}{4}$ قتا^{4}س + جـ   جـ/ $-\frac{1}{3}$ قتا^{3}س + جـ   د/ $\frac{1}{3}$ قتا^{3}س + جـ

الحل/

$\int$ قتا^{4}س ظتاس دس $= \int$ قتا^{3}س × قتاس ظتاس دس $= -\int$ قتا^{3}س × $-$قتاس ظتاس دس

لاحظ مشتقة قتاس بجانبها

تتبع $\int$ ق^{ن}(س) ق$'$(س) دس $=$ $\frac{ق^{(ن+1)}(س)}{ن+1}$ + جـ

$= -\int \left(\frac{قتا^{4}س}{4}\right)'$ دس $= -\frac{1}{4}$قتا^{4}س + جـ   ب

طريقة (2): نفرض قتاس = ص

$-$ قتاس ظتاس دس = دص ⇐ قتاس ظتاس دس = $-$دص

⇐ $\int$ قتا^{3}س × قتاس ظتاس دس $= \int$ ص^{3} × $-$دص $= -\int$ ص^{3} دص $= -\frac{ص^{4}}{4}$ + جـ

$= -\frac{1}{4}$ قتا^{4}س + جـ   ب

• 2020 دور أول / ما ناتج $\int$ س^{6} $\left(\frac{1-س}{س}\right)^{6}$ دس

أ/ $\left(\frac{-س+1}{-7}\right)^{7}$ + جـ   ب/ $6(-س+1)^{5}$ + جـ   جـ/ $\frac{1}{7}$ س^{7} ($-$[illegible] + $\frac{1}{س}$) + جـ

د/ $-\frac{1}{7}(1-س)^{7}$ + جـ

الحل/

$\int$ س^{6} $\left(\frac{1-س}{س}\right)^{6}$ دس $= \int \cancel{س^{6}} \frac{(1-س)^{6}}{\cancel{س^{6}}}$ دس $= \int (1-س)^{6}$ دس $= \frac{(1-س)^{7}}{-1×7}$ + جـ

$= -\frac{1}{7}(1-س)^{7}$ + جـ   د

• 2020 دور أول / ما ناتج $\int$ قا^{9}س ظاس دس

أ/ $\frac{1}{9}$ قا^{9}س + جـ   ب/ $\frac{1}{10}$ قا^{10}س + جـ   جـ/ $\frac{1}{8}$ قا^{8}س + جـ   د/ $\frac{1}{9}$ قا^{9}س ظاس + جـ

الحل/

$\int$ قا^{9}س ظاس دس $= \int$ قا^{8}س × قاس ظاس دس $= \int \left(\frac{(قاس)^{9}}{9}\right)'$ دس $= \frac{قا^{9}س}{9}$ + جـ   أ

مشتقة قاس

طريقة (2): نفرض قاس = ص ⇐ قاس ظاس دس = دص

⇐ $\int$ قا^{8}س قاس ظاس دس $= \int$ ص^{8} دص $= \frac{ص^{9}}{9}$ + جـ $= \frac{قا^{9}س}{9}$ + جـ

" أعدّ نفسك .. فلا تدري متى تُستعمل !! "

• 2020 دور أول/ اذا كان ق(س) ق̀(س) = ٣س^{٢} ، ق(س) > ٠ ، ما قيمة ق($\sqrt[٣]{٧}$) علماً بأن ق(١) = ٢

أ/ ٣ ب/ ٤ ج/ ٥ د/ ٦

الحل/ ق(س) ق̀(س) = ٣س^{٢} ⟸ ∫ ق(س) ق̀(س) دس = ∫ ٣س^{٢} دس

⟸ ∫ $\left(\frac{\text{ق}^{٢}(\text{س})}{٢}\right)'$ دس = س^{٣} + جـ

ملاحظة: يُمكن حلّها بفرض ص = ق(س)

$\frac{\text{ق}^{٢}(\text{س})}{٢}$ = س^{٣} + جـ ⟸ $\frac{\text{ق}^{٢}(١)}{٢}$ = ١ + جـ ⟸ $\frac{٢^{٢}}{٢}$ = ١ + جـ ⟸ ٢ = ١ + جـ ⟸ ١ = جـ

⟸ $\frac{\text{ق}^{٢}(\text{س})}{٢}$ = س^{٣} + ١

$\frac{\text{ق}^{٢}(\sqrt[٣]{٧})}{٢}$ = $(\sqrt[٣]{٧})^{٣}$ + ١ ⟸ $\frac{\text{ق}^{٢}(\sqrt[٣]{٧})}{٢}$ = ٨ ⟸ ق^{٢}($\sqrt[٣]{٧}$) = ١٦

ق($\sqrt[٣]{٧}$) = -٤ مرفوض ، ق($\sqrt[٣]{٧}$) = ٤

ب

• 2020 دور أول/ أيّ المقادير الآتية تساوي ∫ ٤ ظتا(٢س) دس

أ/ ٢لوهـ|قتا(٢س)| + جـ ب/ لوهـ|جتا(٢س)| + جـ ج/ ٢لوهـ|قا(٢س)| + جـ د/ ٢لوهـ|جا(٢س)| + جـ

الحل/

∫ ٤ ظتا(٢س) دس = ∫ ٤ × $\frac{\text{جتا}(٢\text{س})}{\text{جا}(٢\text{س})}$ دس = ∫ ٢ × $\frac{٢\text{جتا}(٢\text{س})}{\text{جا}(٢\text{س})}$ دس

مشتقة

= ٢لوهـ|جا(٢س)| + جـ ج

• 2020 دور أول/ إذا كان ق̀(س) = ٤ق(س) ، حيث ق(س) > ٠ ، ما قيمة ق($\frac{١}{٢}$) علماً بأن ق̀(١) = ٤

أ/ هـ^{٢} ب/ هـ$^{-٢}$ ج/ -٤ د/ ١

الحل/ ق̀(س) = ٤ق(س) ⟸ $\frac{\text{ق̀}(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}$ = ٤ ⟸ ∫ $\frac{\text{ق̀}(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}$ دس = ∫ ٤ دس

⟸ لوهـ|ق(س)| = ٤س + جـ ⟸ لوهـ|ق(١)| = ٤ + جـ

⟸ لوهـ ١ = ٤ + جـ ⟸ صفر = ٤ + جـ ⟸ -٤ = جـ

* ق̀(س) = ٤ق(س)
ق̀(١) = ٤ق(١)
٤ = ٤ق(١)
١ = ق(١)

⟸ لوهـ|ق(س)| = ٤س - ٤ ، س = $\frac{١}{٢}$

لوهـ|ق($\frac{١}{٢}$)| = ٤ × $\frac{١}{٢}$ - ٤ ⟸ لوهـ|ق($\frac{١}{٢}$)| = -٢ ⟸ هـ$^{-٢}$ = ق($\frac{١}{٢}$) ب

مُحاول اليوم .. فارس الغدّ ! فارس الرياضيات: أ.ميّ

• 2020 دورثاني / أي من الآتية تساوي $\int \frac{(س^2+س^3)^5}{س^{10}} \, دس$

أ/ $\frac{(1+س)^6}{6} + جـ$ ب/ $\frac{(س^2+س^3)^6}{6} + جـ$

جـ/ $5\frac{(س^2+س^3)^4}{س^2} + جـ$ د/ $لو|س^{11}| + جـ$

الحل/ $\int \frac{(س^2+س^3)^5}{س^{10}} \, دس = \int \frac{(س^2(1+س))^5}{س^{10}} \, دس = \int \frac{\cancel{س^{10}}(1+س)^5}{\cancel{س^{10}}} \, دس$

$= \int (1+س)^5 \, دس = \frac{(1+س)^6}{6} + جـ$ أ

• 2020 دورثاني / ماذا يساوي $\int \frac{هـ^{ظاس}}{2حتا^2 س} \, دس$

أ/ $2قا^2 س هـ^{ظاس} + جـ$ ب/ $\frac{1}{2} هـ^{ظاس} + جـ$ جـ/ $\frac{1}{2} قا س هـ^{ظاس} + جـ$ د/ $2هـ^{ظاس} + جـ$

الحل/ $\int \frac{هـ^{ظاس}}{2حتا^2 س} \, دس = \frac{1}{2}\int قا^2 س \, هـ^{ظاس} \, دس = \frac{1}{2}\int (هـ^{ظاس})' \, دس = \frac{1}{2} هـ^{ظاس} + جـ$ ب

$\Leftarrow \int هـ^{ق(س)} ق'(س) = هـ^{ق(س)} + جـ$

• 2024 دورثاني / ما قيمة $\int (هـ^{جاس + لوحتاس}) \, دس$

أ/ $لوقاس + جـ$ ب/ $هـ^{جاس} + جـ$ جـ/ $\frac{1}{جتاس} + جـ$ د/ $هـ^{حتاس} + جـ$

الحل/ $\int (هـ^{جاس + لوحتاس}) \, دس = \int هـ^{جاس} \times \cancel{هـ^{لو(حتاس)}} \, دس = \int حتاس \, هـ^{جاس} \, دس$

$= \int (هـ^{جاس})' \, دس = هـ^{جاس} + جـ$ ب

• ضواحي القدس / 2024 / صـ $\int \frac{1}{(جا^4 س - حتا^4 س)^2} \, دس$

أ/ $ظا(2س) + جـ$ ب/ $2ظاس + جـ$ جـ/ $\frac{1}{2} ظاس + جـ$ د/ $\frac{1}{2} ظا(2س) + جـ$

الحل/

* $جا^4 س - حتا^4 س = (جا^2 س - حتا^2 س)(جا^2 س + حتا^2 س)$ فرق مربعين

$= -حتا(2س) \times 1 = -حتا(2س)$

$\Leftarrow \int \frac{1}{(جا^4 س - حتا^4 س)^2} \, دس = \int \frac{1}{(-حتا(2س))^2} \, دس = \int قا^2(2س) \, دس = \frac{1}{2} ظا(2س) + جـ$

د

• خارجي / إذا كان م(س) اقتران أصلي للاقتران هـ(س) فإن $\int 2م(س) هـ(س) \, دس$

أ/ $(م(س))^2 + جـ$ ب/ $م(2س) + جـ$ جـ/ $هـ(س) + جـ$ د/ $م(س) هـ(س) + جـ$

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) ⇐ $م'(س) = ق(س)$

⇐ $\int ٢م(س)\,ق(س)\,دس = \int ٢م(س)\,م'(س)\,دس = \int \left((م(س))^{2}\right)'\,دس = م^{2}(س) + ج$ أ

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية:

• 2007 / جد $\int \frac{3س}{\sqrt[3]{6س+1}}\,دس$

الحل/ طريقة (1) "الفرض"

نفرض $ص = \sqrt[3]{6س+1}$ ⇐ $ص^{3} = 6س+1$

$6س = ص^{3} - 1$

$س = \frac{ص^{3}-1}{6}$

$6\,دس = 3ص^{2}\,دص$ ⇐ $دس = \frac{1}{2}ص^{2}\,دص$

⇐ $\int \frac{3س}{\sqrt[3]{6س+1}}\,دس = \int \frac{3س}{\cancel{ص}} \times \frac{1}{2}ص^{\cancel{2}}\,دص = \int \frac{3}{2}\,ص\,س\,دص$

$= \int \frac{3}{2}\,ص \times \frac{(ص^{3}-1)}{\cancel{6}}\,دص = \int \frac{1}{4}(ص^{4} - ص)\,دص = \frac{1}{4}\left(\frac{ص^{5}}{5} - \frac{ص^{2}}{2}\right) + ج$

$= \frac{1}{20}(6س+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{8}(6س+1)^{\frac{2}{3}} + ج$

طريقة (2): "أجزاء"

$\int \frac{3س}{\sqrt[3]{6س+1}}\,دس$

$ق = 3س$ ، $دق = 3\,دس$

$دع = (6س+1)^{-\frac{1}{3}}\,دس$ ، $ع = \frac{1}{4}(6س+1)^{\frac{2}{3}}$

$\int \frac{3س}{\sqrt[3]{6س+1}}\,دس = 3س \times \frac{1}{4}(6س+1)^{\frac{2}{3}} - \int \frac{3}{4}(6س+1)^{\frac{2}{3}}\,دس$

$= \frac{3}{4}\,س\,(6س+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{4} \times \frac{(6س+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3} \times \cancel{6}} + ج$

$= \frac{3}{4}(س)(6س+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{40}(6س+1)^{\frac{5}{3}} + ج$

طريقة (3):

$\int \frac{3س}{\sqrt[3]{6س+1}}\,دس = \frac{1}{2}\int \frac{6س}{\sqrt[3]{6س+1}}\,دس = \frac{1}{2}\int (6س+1-1)(6س+1)^{-\frac{1}{3}}\,دس$

$= \frac{1}{2}\int (6س+1)^{-\frac{1}{3}}\left(1 - (6س+1)\right)\,دس = \frac{1}{2}\int (6س+1)^{1}(6س+1)^{-\frac{1}{3}} - (6س+1)^{-\frac{1}{3}}\,دس$

$= \frac{1}{2}\int (6س+1)^{\frac{2}{3}} - (6س+1)^{-\frac{1}{3}}\,دس = \frac{1}{2}\left(\frac{(6س+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3} \times 6} - \frac{(6س+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3} \times 6}\right) + ج$

$= \frac{1}{20}(6س+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{8}(6س+1)^{\frac{2}{3}} + ج$

• طريقة (٤):

$$\int \frac{٣س}{\sqrt[٣]{٦س+١}}\,ءس = \int\left(\frac{٣س}{\sqrt[٣]{٦س+١}} + \frac{٣}{٤}(٦س+١)^{\frac{٢}{٣}}\right) - \frac{٣}{٤}(٦س+١)^{\frac{٢}{٣}}\,ءس$$

$$= \int\left(\frac{٣س}{٤}(٦س+١)^{\frac{٢}{٣}}\right)'\,ءس - \int \frac{٣}{٤}(٦س+١)^{\frac{٢}{٣}}\,ءس$$

$$= \frac{٣}{٤}س(٦س+١)^{\frac{٢}{٣}} - \frac{٣}{٤}\times\frac{(٦س+١)^{\frac{٥}{٣}}}{٦\times\frac{٥}{٣}} + جـ$$

$$= \frac{٣}{٤}س(٦س+١)^{\frac{٢}{٣}} - \frac{٣}{٤٠}(٦س+١)^{\frac{٥}{٣}} + جـ$$

• 2007/ جد $\int (٢جتا^٢س - ٤)\,ءس$

الحل/ $\int\left(٢\left(\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}جتا(٢س)\right)-٤\right)ءس = \int (١ + جتا(٢س) - ٤)\,ءس$

$$= \int جتا(٢س) - ٣\,ءس = \frac{١}{٢}جا(٢س) - ٣س + جـ$$

• 2007 إكمال/ جد $\int \frac{س}{\sqrt{س+١}}\,ءس$

الحل/

طريقة (١)/ نفرض $\left[\sqrt{س+١} = ص\right]^٢$

$س+١ = ص^٢ \Leftarrow س = ص^٢ - ١$

$ءس = ٢ص\,ءص$

$$\Leftarrow \int \frac{س}{\sqrt{س+١}}\,ءس = \int \frac{(ص^٢-١)}{\cancel{ص}} \times ٢\cancel{ص}\,ءص$$

$$= \int ٢ص^٢ - ٢\,ءص = \frac{٢}{٣}ص^٣ - ٢ص + جـ$$

$$= \frac{٢}{٣}(س+١)^{\frac{٣}{٢}} - ٢\sqrt{س+١} + جـ$$

طريقة (٢): "أجزاء"

$س = هـ$ ، $ءع = \frac{١}{\sqrt{س+١}}\,ءس$

$ءس = ءهـ$ ، $ع = ٢\sqrt{س+١}$

$$\Leftarrow \int \frac{س}{\sqrt{س+١}}\,ءس = ٢س\sqrt{س+١} - \int ٢\sqrt{س+١}\,ءس$$

$$= ٢س\sqrt{س+١} - ٢\int (س+١)^{\frac{١}{٢}}\,ءس$$

$$= ٢س\sqrt{س+١} - ٢(س+١)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{٢}{٣} + جـ$$

$$= ٢س\sqrt{س+١} - \frac{٤}{٣}(س+١)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

طريقة (٣):

* اضافة وطرح $٢\sqrt{س+١}$ للتكامل:

$$\int \frac{س}{\sqrt{س+١}}\,ءس = \int\left(\frac{س}{\sqrt{س+١}} + ٢\sqrt{س+١} - ٢\sqrt{س+١}\right)ءس$$

$$= \int \left(٢س\sqrt{س+١}\right)'\,ءس - \int ٢\sqrt{س+١}\,ءس$$

$$= ٢س\sqrt{س+١} - ٢(س+١)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{٢}{٣} + جـ$$

$$= ٢س\sqrt{س+١} - \frac{٤}{٣}(س+١)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

***طريقة (٤):** اضافة وطرح "١" للبسط

$$* \int \frac{س}{\sqrt{س+١}}\,ءس = \int \frac{س+١-١}{\sqrt{س+١}}\,ءس$$

$$= \int \frac{(س+١)}{\sqrt{س+١}}\,ءس - \int \frac{١}{\sqrt{س+١}}\,ءس$$

$$= \int (س+١)^{\frac{١}{٢}}\,ءس - ٢\int \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}\,ءس$$

$$= \int (س+١)^{\frac{١}{٢}}\,ءس - ٢\int \left(\sqrt{س+١}\right)'\,ءس$$

$$= \frac{٢}{٣}(س+١)^{\frac{٣}{٢}} - ٢\sqrt{س+١} + جـ$$

• 2008/ جد $\int (س^{٣} - ٣س^{٥})^{\frac{1}{٣}}\, دس$

الحل/ $\int (س^{٣} - ٣س^{٥})^{\frac{1}{٣}}\, دس = \int \left(س^{٣}(١ - ٣س^{٢})\right)^{\frac{1}{٣}} دس = \int (س^{٣})^{\frac{1}{٣}} (١ - ٣س^{٢})^{\frac{1}{٣}} دس$

$= \int س\,(١ - ٣س^{٢})^{\frac{1}{٣}} دس = \int س \sqrt[٣]{(١ - ٣س^{٢})}\, دس$

نفرض $(ص = \sqrt[٣]{١ - ٣س^{٢}})^{٣} \Leftarrow ص^{٣} = ١ - ٣س^{٢}$ نشتق

$-٦س\, دس = ٣ص^{٢} دص \Leftarrow دس = \frac{-ص^{٢} دص}{٢س}$

$\Leftarrow \int \cancel{س}(ص) \times \frac{-ص^{٢} دص}{٢\cancel{س}} = -\frac{1}{٢}\int ص^{٣} دص = -\frac{1}{٢} \times \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ = -\frac{1}{٨} ص^{٤} + جـ$

$= -\frac{1}{٨}(١ - ٣س^{٢})^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

• 2010 إكمال/ جد $\int (س+٢)(س-١)^{٧}\, دس$

الحل/ نفرض $ص = س - ١ \Leftarrow دس = دص$

$\Leftarrow س = ص + ١$

$\Leftarrow \int (ص+١+٢)(ص)^{٧} دص = \int (ص+٣)ص^{٧} دص = \int ص^{٨} + ٣ص^{٧} دص$

$= \frac{1}{٩}ص^{٩} + \frac{٣}{٨}ص^{٨} + جـ$

$= \frac{1}{٩}(س-١)^{٩} + \frac{٣}{٨}(س-١)^{٨} + جـ$

• 2011/ جد $\int \sqrt[٣]{س^{٣} + ٥س^{٥}}\, دس$

الحل/ $\int \sqrt[٣]{س^{٣}(١+٥س^{٢})}\, دس = \int \sqrt[٣]{س^{٣}} \times \sqrt[٣]{١+٥س^{٢}}\, دس$

$= \int س \sqrt[٣]{١+٥س^{٢}}\, دس$

نفرض $(ص = \sqrt[٣]{١+٥س^{٢}})^{٣} \Leftarrow ص^{٣} = ١+٥س^{٢}$

$١٠س\, دس = ٣ص^{٢} دص \Leftarrow دس = \frac{٣ص^{٢}}{١٠س} دص$

$\Leftarrow \int \cancel{س}(ص) \times \frac{٣ص^{٢}}{١٠\cancel{س}} دص = \frac{٣}{١٠}\int ص^{٣} دص = \frac{٣}{١٠} \times \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ = \frac{٣}{٤٠}(ص)^{٤} + جـ$

$= \frac{٣}{٤٠}(١+٥س^{٢})^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

• 2012/ $\int س^{٢}(س^{٣}-٢)^{٧}\, دس$

الحل/ $ص = س^{٣} - ٢ \Leftarrow دص = ٣س^{٢} دس \Leftarrow دس = \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$$\Leftarrow \int (س^٣-٢)^٧ \, س^٥ \, دس = \int ص^٧ \times س^٥ \times \frac{دص}{٣س^٢} = \int \frac{١}{٣} ص^٧ \times س^٣ \, دص$$

$$= \int \frac{١}{٣} ص^٧ (ص+٢) \, دص = \int \frac{١}{٣} ص^٨ + \frac{٢}{٣} ص^٧ \, دص$$

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{ص^٩}{٩} + \frac{٢}{٣} \times \frac{ص^٨}{٨} + جـ$$

$$= \frac{١}{٢٧} (س^٣-٢)^٩ + \frac{١}{١٢} (س^٣-٢)^٨ + جـ$$

• 2012 إكمال/ جد $\int (١+ظا س)^٢ \, دس$

الحل/ $\int (١+ظا س)^٢ \, دس = \int ١+٢ظا س+ظا^٢ س \, دس = \int ٢ظا س + (١+ظا^٢ س) \, دس$

$$= \int ٢ \frac{جا س}{جتا س} + قا^٢ س \, دس = -٢ \int \frac{-جا س}{جتا س} \, دس + \int قا^٢ س \, دس$$

$$= -٢ لو_هـ |جتا س| + ظا س + جـ$$

• 2013/ جد $\int \frac{(س^٢+س)(٢س+١)}{(س^٢+س-١)^{١٠}} \, دس$

الحل/ نفرض $ص = س^٢+س-١ \longrightarrow س^٢+س = ص+١$

نشتق $دص = (٢س+١) \, دس$

$$\Leftarrow \int \frac{(ص+١) \times دص}{ص^{١٠}} = \int \frac{ص}{ص^{١٠}} + \frac{١}{ص^{١٠}} \, دص = \int ص^{-٩} + ص^{-١٠} \, دص$$

$$= \frac{ص^{-٨}}{-٨} + \frac{ص^{-٩}}{-٩} + جـ = \frac{-١}{٨ص^٨} + \frac{-١}{٩ص^٩} + جـ = \frac{-١}{٨(س^٢+س-١)^٨} - \frac{١}{٩(س^٢+س-١)^٩} + جـ$$

• 2014 إكمال ضفة/ جد $\int جا^٢ س \, جتا^٣ س \, دس$

الحل/ نفرض $جا س = ص$

$جتا س \, دس = دص \Leftarrow دس = \frac{دص}{جتا س}$

$$\Leftarrow \int جا^٢ س \, جتا^٣ س \, دس = \int ص^٢ \times جتا^٣ س \times \frac{دص}{جتا س} = \int ص^٢ جتا^٢ س \, دص$$

$$= \int ص^٢ (١-جا^٢ س) \, دص = \int ص^٢ (١-ص^٢) \, دص = \int ص^٢ - ص^٤ \, دص$$

$$= \frac{ص^٣}{٣} - \frac{ص^٥}{٥} + جـ = \frac{جا^٣ س}{٣} - \frac{جا^٥ س}{٥} + جـ$$

ملاحظات:

* $\int جا^ن س \, جتا^م س \, دس$ ، $ن، م \in ص^+$:

١. ن، م فرديتان نفرض ص إحدهما ويفضل صاحبة القوة الكبيرة.

٢. ن، م زوجيتان ← متطابقات

٣. إحداهما زوجية والأخرى فردية نفرض الزوجية = ص

• 2017/ $\int \sqrt[٣]{س^٥ - س^٣} \, دس$

الحل/ $\int \sqrt[3]{\text{س}^{7}-\text{س}^{3}}\ \text{دس} = \int \sqrt[3]{\text{س}^{3}(\text{س}^{4}-1)}\ \text{دس} = \int \sqrt[3]{\text{س}^{3}} \times \sqrt[3]{\text{س}^{4}-1}\ \text{دس}$

$= \int \text{س}\ \sqrt[3]{\text{س}^{4}-1}\ \text{دس}$

نفرض $\left(\sqrt[3]{\text{س}^{4}-1} = \text{ص}\right)^{3} \Leftarrow \text{س}^{4}-1 = \text{ص}^{3}$ نشتق

$4\text{س}^{3}\ \text{دس} = 3\text{ص}^{2}\ \text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \dfrac{3\text{ص}^{2}\ \text{دص}}{4\text{س}^{3}}$

$\Leftarrow \int \text{س}\ \sqrt[3]{\text{س}^{4}-1}\ \text{دس} = \int \cancel{\text{س}} \times \text{ص} \times \dfrac{3\text{ص}^{2}\ \text{دص}}{4\cancel{\text{س}^{3}}}$

$= \dfrac{3}{4}\int \text{ص}^{3}\ \text{دص} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{\text{ص}^{4}}{4} + \text{ج} = \dfrac{3}{16}\left(\text{س}^{4}-1\right)^{\frac{4}{3}} + \text{ج}$

• 2017/ ص $\int \text{جتا}(2\text{س})\left(\text{جتاس} + \text{جاس}\right)^{13}\ \text{دس}$ ← عندما تكون الزوايا مختلفة: نفكّر بتوحيدها!

الحل/ $\int \text{جتا}(2\text{س})\left(\text{جتاس}+\text{جاس}\right)^{13}\text{دس} = \int \left(\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س}\right)\left(\text{جتاس}+\text{جاس}\right)^{13}\text{دس}$

فرق مربعين

$\Leftarrow \int \left(\text{جتاس}-\text{جاس}\right)\left(\text{جتاس}+\text{جاس}\right)\left(\text{جتاس}+\text{جاس}\right)^{13}\text{دس}$

$= \int \left(\text{جتاس}-\text{جاس}\right)\left(\text{جتاس}+\text{جاس}\right)^{14}\text{دس}$

نفرض $\text{جتاس}+\text{جاس} = \text{ص} \Leftarrow \left(\text{جتاس}-\text{جاس}\right)\text{دس} = \text{دص}$

$\Leftarrow \int \text{ص}^{14}\ \text{دص} = \dfrac{1}{15}\text{ص}^{15} + \text{ج} = \dfrac{1}{15}\left(\text{جتاس}+\text{جاس}\right)^{15} + \text{ج}$

• طريقة (٢): $\int \text{جتا}(2\text{س})\left(\text{جتاس}+\text{جاس}\right)^{13}\text{دس} = \int \text{جتا}(2\text{س})\left(\left(\text{جتاس}+\text{جاس}\right)^{2}\right)^{\frac{13}{2}}\text{دس}$

$= \int \text{جتا}(2\text{س})\left(\text{جتا}^{2}\text{س} + \text{جا}^{2}\text{س} + 2\text{جاس جتاس}\right)^{\frac{13}{2}}\text{دس}$

$= \int \text{جتا}(2\text{س})\left(1+\text{جا}(2\text{س})\right)^{\frac{13}{2}}\text{دس}$

نفرض $\left(1+\text{جا}(2\text{س})\right)^{\frac{1}{2}} = \text{ص} \Leftarrow 1+\text{جا}(2\text{س}) = \text{ص}^{2}$

$\cancel{2}\text{جتا}(2\text{س})\ \text{دس} = \cancel{2}\text{ص}\ \text{دص}$

$\Leftarrow \int \text{ص}^{13} \times \text{ص}\ \text{دص} = \int \text{ص}^{14}\ \text{دص} = \dfrac{1}{15}\text{ص}^{15} + \text{ج}$

$= \dfrac{1}{15}\left(1+\text{جا}(2\text{س})\right)^{\frac{15}{2}} + \text{ج}$

• 2017 دورة ثانية/ ص $\int \dfrac{\text{س}^{2}-2\text{س}}{\sqrt{\text{س}+2}}\ \text{دس}$

الحل/ $\left(\sqrt{\text{س}+2} = \text{ص}\right)^{2} \Leftarrow \left(\text{س}+2\right) = \text{ص}^{2}$

$\boxed{\text{دس} = 2\text{ص}\ \text{دص}}$

$\text{س}+2 = \text{ص}^{2}$

$\left(\text{س} = \text{ص}^{2}-2\right)^{2}$

$\text{س}^{2} = \text{ص}^{4} - 4\text{ص}^{2} + 4$

$$\Leftarrow \int \frac{\text{س}^2-2\text{س}}{\cancel{\text{ص}}} \times 2\cancel{\text{ص}}\,d\text{ص} = 2\int \left((\text{ص}^4 - 4\text{ص}^2 + 4) - 2(\text{ص}^2 - 2) \right) d\text{ص}$$

$$= 2\int (\text{ص}^4 - 4\text{ص}^2 + 4 - 2\text{ص}^2 + 4)\,d\text{ص} = \int 2\text{ص}^4 - 12\text{ص}^2 + 16\,d\text{ص}$$

$$= \frac{2}{5}\text{ص}^5 - \frac{12}{3}\text{ص}^3 + 16\text{ص} + \text{ج}$$

$$= \frac{2}{5}(\text{س}+2)^{\frac{5}{2}} - 4(\text{س}+2)^{\frac{3}{2}} + 16(\text{س}+2)^{\frac{1}{2}} + \text{ج}$$

• 2017 دور ثاني / جد $\int \text{قا}^7\text{س}\ \text{ظا}\text{س}\ d\text{س}$

الحل /

$$\int \text{قا}^7\text{س}\ \text{ظا}\text{س}\ d\text{س} = \int \text{قا}^6\text{س} \times \text{قا}\text{س}\ \text{ظا}\text{س}\ d\text{س} = \int \left(\frac{\text{قا}^7\text{س}}{7}\right)' d\text{س} = \frac{\text{قا}^7\text{س}}{7} + \text{ج}$$

طريقة (٢):

$$\int \text{قا}^7\text{س}\ \text{ظا}\text{س}\ d\text{س} = \int \text{قا}^6\text{س} \times \text{قا}\text{س}\ \text{ظا}\text{س}\ d\text{س}$$

نفرض $\text{قا}\text{س} = \text{ص}$

نشتق $\text{قا}\text{س}\ \text{ظا}\text{س}\ d\text{س} = d\text{ص}$

$$\Leftarrow \int \text{ص}^6\, d\text{ص} = \frac{\text{ص}^7}{7} + \text{ج} = \frac{1}{7}\text{قا}^7\text{س} + \text{ج}$$

• 2018 دور أول / جد $\int \text{قا}\text{س}\,(\text{قا}\text{س} + \text{ظا}\text{س})^{\text{ن}}\, d\text{س}$ ، $\text{ن} \in \text{ط}^+$

الحل / نفرض $\text{قا}\text{س} + \text{ظا}\text{س} = \text{ص}$

نشتق $(\text{قا}^2\text{س} + \text{قا}\text{س}\ \text{ظا}\text{س})\, d\text{س} = d\text{ص}$

$\text{قا}\text{س}\,(\text{قا}\text{س} + \text{ظا}\text{س})\, d\text{س} = d\text{ص}$

$\text{قا}\text{س} \times \text{ص}\, d\text{س} = d\text{ص} \Leftarrow d\text{س} = \dfrac{d\text{ص}}{\text{ص}\ \text{قا}\text{س}}$

$$\Leftarrow \int \text{قا}\text{س}\,(\text{قا}\text{س} + \text{ظا}\text{س})^{\text{ن}}\, d\text{س} = \int \cancel{\text{قا}\text{س}} \times \text{ص}^{\text{ن}} \times \frac{d\text{ص}}{\text{ص}\ \cancel{\text{قا}\text{س}}} = \int \text{ص}^{\text{ن}-1}\, d\text{ص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \text{ج}$$

$$= \frac{(\text{قا}\text{س} + \text{ظا}\text{س})^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \text{ج}$$

• 2018 دور ثاني / جد $\int \sqrt{1 + \sqrt{\text{س}}}\ d\text{س}$

الحل / نفرض $\left(\text{ص} = \sqrt{1+\sqrt{\text{س}}}\right)^2 \Leftarrow 1 + \sqrt{\text{س}} = \text{ص}^2 \Leftarrow \left(\sqrt{\text{س}} = \text{ص}^2 - 1\right)^2$

$\Leftarrow \text{س} = \text{ص}^4 - 2\text{ص}^2 + 1$

$d\text{س} = (4\text{ص}^3 - 4\text{ص})\, d\text{ص}$

$$\Leftarrow \int \text{ص} \times (4\text{ص}^3 - 4\text{ص})\, d\text{ص} = \int 4\text{ص}^4 - 4\text{ص}^2\, d\text{ص} = \frac{4}{5}\text{ص}^5 - \frac{4}{3}\text{ص}^3 + \text{ج}$$

$= \frac{٤}{٥}(١+\sqrt{\text{س}})^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٣}(١+\sqrt{\text{س}})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ج}$

طريقة (٢): نفرض $(١+\sqrt{\text{س}} = \text{ص})^٢ \Leftarrow \text{ص} - ١ = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^٢ - ٢\text{ص} + ١ = \text{س}$

نشتق/ $(٢\text{ص} - ٢)\,\text{ءص} = \text{ءس}$

$\Leftarrow \int \sqrt{١+\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس} = \int \sqrt{\text{ص}} \times (٢\text{ص} - ٢)\,\text{ءص} = \int ٢\text{ص} \times \text{ص}^{\frac{١}{٢}} - ٢\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءص}$

$= \int ٢\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} - ٢\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءص} = ٢\text{ص}^{\frac{٥}{٢}} \times \frac{٢}{٥} - ٢\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{٢}{٣} + \text{ج}$

$= \frac{٤}{٥}(١+\sqrt{\text{س}})^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٣}(١+\sqrt{\text{س}})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ج}$

• 2019 دور أول/ جد $\int \frac{(\text{س}+١)^٣}{(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)^٦}\,\text{ءس}$

الحل/ نفرض $\text{س}^٢+٢\text{س}+٤ = \text{ص}$ ← $\text{س}^٢+٢\text{س} = \text{ص} - ٤$

نشتق $(٢\text{س}+٢)\,\text{ءس} = \text{ءص} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢(\text{س}+١)}$

$\Leftarrow \int \frac{(\text{س}+١)^٣}{\text{ص}^٦} \times \frac{\text{ءص}}{٢(\text{س}+١)} = \int \frac{١}{٢\text{ص}^٦} \times (\text{س}+١)^٢\,\text{ءص}$

$= \int \frac{\text{س}^٢+٢\text{س}+١}{٢\text{ص}^٦}\,\text{ءص} = \int \frac{\text{ص}-٤+١}{٢\text{ص}^٦}\,\text{ءص} = \int \frac{\text{ص}-٣}{٢\text{ص}^٦}\,\text{ءص}$

$= \int \frac{\text{ص}}{٢\text{ص}^٦} - \frac{٣}{٢\text{ص}^٦}\,\text{ءص} = \int \frac{١}{٢}\text{ص}^{-٥} - \frac{٣}{٢}\text{ص}^{-٦}\,\text{ءص}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{\text{ص}^{-٤}}{-٤} - \frac{٣}{٢} \times \frac{\text{ص}^{-٥}}{-٥} + \text{ج} = -\frac{١}{٨}(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)^{-٤} + \frac{٣}{١٠}(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)^{-٥} + \text{ج}$

• 2019 دور ثاني/ إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه (س، ص) يساوي $٢\text{س}\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^٢+١٤}$ ، ما قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (هـ، ٢)

الحل/

ميل العمودي $= ٢\text{س}\sqrt{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+١٤}$

$\Leftarrow$ قَ(س) = ميل المماس = $\frac{-١}{\text{ميل العمودي}}$

$\text{قَ(س)} = \frac{-١}{٢\text{س}\sqrt{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+١٤}} \Leftarrow \int \text{قَ(س)}\,\text{ءس} = \int \frac{-١}{٢\text{س}\sqrt{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+١٤}}\,\text{ءس}$

نفرض $(\sqrt{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+١٤} = \text{ص})^٢ \Leftarrow ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+١٤ = \text{ص}^٢$

نشتق $\frac{٢}{\text{س}}\,\text{ءس} = ٢\text{ص}\,\text{ءص} \Leftarrow \text{ءس} = \text{س}\,\text{ص}\,\text{ءص}$

$$\Leftarrow * \int \frac{-1}{2س\sqrt{2لوهـ\,س+14}}\,دس = \int \frac{-1}{2\cancel{س} \times ص} \times \cancel{س}\,ص\,دص = \int -\frac{1}{2}\,دص$$

$$= -\frac{1}{2}ص + ج = -\frac{1}{2}\sqrt{2لوهـ\,س+14} + ج$$

$$\Leftarrow ق(س) = -\frac{1}{2}\sqrt{2لوهـ\,س+14} + ج$$

ق(س) يمر ب (هـ ، ٢) $\Leftarrow$ ق(هـ) = ٢

$$\Leftarrow -\frac{1}{2}\sqrt{2لوهـ\,هـ+14} + ج = 2$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{16} + ج = 2 \Leftarrow -2 + ج = 2 \Leftarrow ج = 4$$

$$\Leftarrow ق(س) = -\frac{1}{2}\sqrt{2لوهـ\,س+14} + 4$$

• 2020 دور أول / جد $\int \frac{1}{س^5\sqrt[5]{س^5+1}}\,دس$

الحل/ $\int \frac{1}{س^5\sqrt[5]{س^5+1}}\,دس = \int \frac{1}{س^5\sqrt[5]{س^5(1+\frac{1}{س^5})}}\,دس = \int \frac{1}{س^5\sqrt[5]{س^5}\sqrt[5]{1+\frac{1}{س^5}}}\,دس$

إخراج س٥ عامل مشترك.

$$= \int \frac{1}{س^6\sqrt[5]{1+\frac{1}{س^5}}}\,دس$$

نفرض $\left(ص = \sqrt[5]{1+\frac{1}{س^5}}\right)^5 \Leftarrow ص^5 = 1 + س^{-5}$ نشتق

$$\cancel{5}ص^4\,دص = -\cancel{5}س^{-6}\,دس$$

$$\Leftarrow دس = -س^6 ص^4\,دص$$

$$\Leftarrow \int \frac{1}{ص \times \cancel{س^6}} \times \cancel{س^6}\,ص^4\,دص = \int ص^3\,دص = \frac{1}{4}ص^4 + ج = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{س^5}\right)^{\frac{4}{5}} + ج$$

• 2020 دور ثاني / أثبت أن $\int \frac{(أس+ب)^ن}{س^{ن+2}}\,دس = \frac{-(أس+ب)^{ن+1}}{ب(ن+1)\,س^{ن+1}} + ج$

الحل/ $\int \frac{(أس+ب)^ن}{س^{ن+2}}\,دس = \int \frac{(أس+ب)^ن}{س^ن \times س^2}\,دس = \int \frac{1}{س^2} \times \left(\frac{أس+ب}{س}\right)^ن دس$

$$= \int \frac{1}{س^2} \times \left(\frac{أس}{س} + \frac{ب}{س}\right)^ن دس = \int \frac{1}{س^2} \times \left(أ + \frac{ب}{س}\right)^ن دس$$

نفرض $ص = أ + \frac{ب}{س}$ ⇐ نشتق ⇐ $-\frac{ب}{س^2} دس = دص$ ⇐ $دس = \frac{-س^2 دص}{ب}$

⇐ $\int ص^ن \times \frac{1}{\cancel{س^2}} \times \frac{-\cancel{س^2} دص}{ب} = \int \frac{-1}{ب} ص^ن دص = \frac{-1}{ب} \times \frac{ص^{ن+1}}{(ن+1)} + ج$

$= \frac{-1}{ب} \times \frac{(أ+\frac{ب}{س})^{ن+1}}{(ن+1)} + ج = \frac{-1}{ب} \times \frac{(\frac{أس+ب}{س})^{ن+1}}{(ن+1)} + ج$

$= \frac{-(أس+ب)^{(ن+1)}}{ب(ن+1)س^{ن+1}} + ج$ #

طريقة (٢): $\int \frac{(أس+ب)^ن}{س^{ن+2}} دس$ احراج س عامل مشترك $= \int \frac{(أ + \frac{ب}{س})^ن \times س^ن}{س^{ن+2}} دس = \int \frac{(أ+\frac{ب}{س})^ن}{س^2} دس$

نفرض $أ + \frac{ب}{س} = ص$ وتكمل بنفس الطريقة.

• 2021 دور أول / جد $\int \frac{1}{(2جاس + جتاس)^2} دس$

الحل/ بإخراج جتاس عامل مشترك. ⇐ $\int \frac{1}{(2جاس+جتاس)^2}دس = \int \frac{1}{(جتاس)^2(2ظاس+1)^2} دس$

$= \int \frac{قا^2س}{(2ظاس+1)^2}دس$

نفرض $ص = 1 + 2ظاس$ ⇐ $دص = 2قا^2س\, دس$ ⇐ $دس = \frac{دص}{2قا^2س}$

⇐ $\int \frac{\cancel{قا^2س}}{ص^2} \times \frac{دص}{2\cancel{قا^2س}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{ص^2}دص = \frac{-1}{2ص} + ج$

$= \frac{-1}{2(1+2ظاس)} + ج$

طريقة (٢): بإخراج جاس عامل مشترك: $\int \frac{1}{(2جاس+جتاس)^2}دس = \int\frac{1}{جا^2س(2+ظتاس)^2}دس$

$= \int \frac{قتا^2س\, دس}{(2+ظتاس)^2}$

نفرض $ص = (2+ظتاس)$ ⇐ $-قتا^2س\, دس = دص$

⇐ $\int \frac{-دص}{ص^2} = \frac{1}{ص} + ج = \frac{1}{(2+ظتاس)} + ج$

• 2021 دور ثاني / جد $\int$ ظا^{3}س دس

الحل / $\int$ ظا^{3}س دس = $\int$ ظا^{2}س ظاس دس = $\int$ (قا^{2}س − 1) ظاس دس

= $\int$ قا^{2}س ظاس − ظاس دس

= $\int$ قا^{2}س ظاس دس + $\int$ − ظاس دس

= $\int \left(\frac{\text{ظا}^2\text{س}}{2}\right)'$ دس + $\int - \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ دس

(يمكن حلها عن طريق فرض ص = ظاس)

= $\frac{\text{ظا}^2\text{س}}{2}$ + لو | جتاس | + جـ

• 2022 دور أول / جد $\int$ (س+1)^3 (س^2+2س+6)^4 دس

الحل /

نفرض ص = س^2+2س+6 ⟸ دص = (2س+2) دس ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{2(\text{س}+1)}$

⟸ $\int$ (س+1)$^{\cancel{3}\,2}$ × ص^4 × $\frac{\text{دص}}{2\cancel{(\text{س}+1)}}$ = $\frac{1}{2}\int$ (س+1)^2 ص^4 دص = $\frac{1}{2}\int$ (س^2+2س+1) ص^4 دص

= $\frac{1}{2}\int$ (ص − 6 + 1) ص^4 دص = $\frac{1}{2}\int$ (ص − 5) ص^4 دص = $\frac{1}{2}\int$ ص^5 − 5ص^4 دص

= $\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ص}^6}{6} - \text{ص}^5\right)$ + جـ = $\frac{1}{12}$ (س^2+2س+6)^6 − $\frac{1}{2}$ (س^2+2س+6)^5 + جـ

• 2022 دور ثاني / جد $\int$ ظا^{5}س قاس دس

الحل /

$\int$ ظا^{5}س قاس دس = $\int$ ظا^{4}س ظاس قاس دس

نفرض ص = قاس ⟸ قاس ظاس دس = دص

⟸ $\int$ ظا^{4}س دص = $\int$ (ظا^{2}س)^2 دص = $\int$ (قا^{2}س − 1)^2 دص = $\int$ (ص^2 − 1)^2 دص

= $\int$ ص^4 − 2ص^2 + 1 دص = $\frac{\text{ص}^5}{5}$ − $\frac{2}{3}$ ص^3 + ص + جـ

= $\frac{1}{5}$ (قاس)^5 − $\frac{2}{3}$ قا^{3}س + قاس + جـ

• 2022 دور ثاني / جد $\int$ (س^3+4س) $\sqrt{\text{س}^2+2}$ دس

الحل / نفرض ص = $\sqrt{\text{س}^2+2}$ ⟸ ص^2 = س^2+2

دس = 2ص دص .

$\Leftarrow \int (س^2 + ٤س) \times ص \times ٢ص \, دص$

$= \int (ص^4 - ٤) \times ٢ص^2 \, دص$

$= \int ٢ص^6 - ٨ص^2 \, دص$

$= \frac{٢}{٧} ص^7 - \frac{٨}{٣} ص^3 + جـ$

$= \boxed{\frac{٢}{٧} (س+٢)^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٨}{٣} (س+٢)^{\frac{٣}{٢}} + جـ}$

* من الفرض $(س + ٢ = ص^2)^2$

$س^2 + ٤س + ٤ = ص^4$

$س^2 + ٤س = ص^4 - ٤$

نعوضها

• 2023 دور أول / جد $\int \frac{1}{س^2 \sqrt{س^2 + 1}} \, دس$ ، علماً بأن $س > ٠$.

الحل / $\int \frac{1}{س^2 \sqrt{س^2 (1 + \frac{1}{س^2})}} \, دس = \int \frac{1}{س^2 \sqrt{س^2} \sqrt{1 + \frac{1}{س^2}}} \, دس = \int \frac{1}{س^2 |س| \sqrt{1 + \frac{1}{س^2}}} \, دس$

$|س| = س$ ، $س > ٠$.

$= \int \frac{1}{س^3 \sqrt{1 + \frac{1}{س^2}}} \, دس$

نفرض $\left(ص = \sqrt{\frac{1}{س^2} + 1}\right)^2 \Leftarrow ص^2 = \frac{1}{س^2} + 1$ نشتق

$\cancel{٢}ص \, دص = \frac{-\cancel{٢}}{س^3} \, دس$

$\Leftarrow \int \frac{-ص \, دص}{ص} = -\int دص = -ص + جـ = \boxed{-\sqrt{\frac{1}{س^2} + 1} + جـ}$

• 2024 / جد $\int جا^9 س \, قا^{11} س \, دس$

الحل / $\int جا^9 س \, قا^{11} س \, دس = \int جا^9 س \times قا^9 س \, قا^2 س \, دس = \int \frac{جا^9 س}{جتا^9 س} \times قا^2 س \, دس$

$= \int ظا^9 س \times قا^2 س \, دس = \int \left(\frac{ظا^{10} س}{١٠}\right)' دس = \boxed{\frac{ظا^{10} س}{١٠} + جـ}$

طريقة (٢) :

نفرض $ظاس = ص$

$قا^2 س \, دس = دص$

$\Leftarrow \int ص^9 \times دص = \frac{ص^{10}}{١٠} + جـ = \frac{(ظاس)^{(١٠)}}{١٠} + جـ$

" اغزُ غزوةً تجادل عنك يومَ القيامة "

- 2024 دور أول / إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه تحقق القاعدة $لو_{هـ}(جا^2س\ قَ(س)) = ظتاس$ ، جد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4} ، 1)$ ، $س \in]0 ، \pi[$

الحل /

$لو_{هـ}(جا^2س)(قَ(س)) = ظتاس \Leftarrow جا^2س\ قَ(س) = هـ^{ظتاس}$

$\Leftarrow قَ(س) = \frac{1}{جا^2س} هـ^{ظتاس} \Leftarrow قَ(س) = قتا^2س\ هـ^{ظتاس}$

$\Leftarrow \int قَ(س)\ دس = \int قتا^2س\ هـ^{ظتاس}\ دس \Leftarrow ق(س) = -\int (هـ^{ظتاس})'\ دس$

$ق(س) = -هـ^{ظتاس} + جـ$

ق(س) يمر بـ $(\frac{\pi}{4} ، 1) \Leftarrow ق(\frac{\pi}{4}) = -هـ^{ظتا(\frac{\pi}{4})} + جـ$

$1 = -هـ + جـ \Leftarrow 1 + هـ = جـ$

$\Leftarrow ق(س) = -هـ^{ظتاس} + هـ + 1$

- 2024 دور ثاني / إذا كان $م(س) = (لو_{هـ}س)^2$ ، $س > 0$ ، اقتران أصلي للاقتران المتصل ق(س) ، هـ العدد النيبري ، جد $\int هـ^{2س} ق(هـ^{2س})\ دس$.

الحل /

م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) $\Leftarrow مَ(س) = ق(س)$

$مَ(س) = 2(لو_{هـ}س) \times \frac{1}{س} = ق(س)$

$* \ ق(هـ^{2س}) = 2لو_{هـ}(هـ^{2س}) \times \frac{1}{هـ^{2س}} = \frac{4س}{هـ^{2س}}$.

$\Leftarrow \int هـ^{2س} ق(هـ^{2س})\ دس = \int هـ^{2س} \times \frac{4س}{هـ^{2س}}\ دس = \int 4س\ دس = 2س^2 + جـ$

- 2024 دور ثالث / جد $\int (س+2)(س+3)^4\ دس$

الحل / نفرض $س + 3 = ص \Leftarrow دس = دص$

$\Leftarrow س = ص - 3$

$\Leftarrow \int (ص - 3 + 2) \times ص^4\ دص = \int (ص - 1) ص^4\ دص = \int ص^5 - ص^4\ دص$

$= \frac{1}{6}ص^6 - \frac{ص^5}{5} + جـ = \frac{1}{6}(س+3)^6 - \frac{1}{5}(س+3)^5 + جـ$

.. لكنّ الجنّة يا فتى .. لا يكفيها التمنّي ..

• الصيفية 2022 / جد $\int \frac{\left(\text{س} + \sqrt{\text{س}^2+1}\right)^6}{\sqrt{\text{س}^2+1}}\, \text{دس}$

الحل / نفرض $\text{ص} = \text{س} + \sqrt{\text{س}^2+1}$

$\text{دص} = \left(1 + \frac{\cancel{2}\text{س}}{\cancel{2}\sqrt{\text{س}^2+1}}\right) \text{دس}$

$\text{دص} = \frac{\text{س} + \sqrt{\text{س}^2+1}}{\sqrt{\text{س}^2+1}}\, \text{دس} \Leftarrow \text{دص}\sqrt{\text{س}^2+1} = \text{دس}\,\text{ص}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}\sqrt{\text{س}^2+1}}{\text{ص}} = \text{دس}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{ص}^6}{\sqrt{\text{س}^2+1}} \times \frac{\text{دص}\sqrt{\text{س}^2+1}}{\text{ص}} = \int \text{ص}^5\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^6}{6} + \text{ج}$

$= \frac{\left(\text{س} + \sqrt{\text{س}^2+1}\right)^6}{6} + \text{ج}$

• طولكرم 2024 / جد $\int \text{س}^5 \left(\text{س}^{10} + \text{س}^6\right)^{\frac{1}{3}} \text{دس}$

الحل / $\int \text{س}^5 \times (\text{س}^6)^{\frac{1}{3}} (1+\text{س}^4)^{\frac{1}{3}} \text{دس} = \int \text{س}^5 \times \text{س}^2 \sqrt[3]{1+\text{س}^4}\, \text{دس} = \int \text{س}^7 \sqrt[3]{1+\text{س}^4}\, \text{دس}$

نفرض $\left(\text{ص} = \sqrt[3]{1+\text{س}^4}\right)^3$

$\Leftarrow \text{ص}^3 = 1+\text{س}^4 \Leftarrow 4\text{س}^3\text{دس} = \text{دص} \times 3\text{ص}^2 \Leftarrow \text{دس} = \frac{3\text{ص}^2\text{دص}}{4\text{س}^3}$

$\Leftarrow \int \text{س}^7 \times \text{ص} \times \frac{3\text{ص}^2\text{دص}}{4\text{س}^3} = \frac{3}{4}\int \text{س}^4\,\text{ص}^3\,\text{دص} = \frac{3}{4}\int (\text{ص}^3-1)\,\text{ص}^3\,\text{دص}$

$= \frac{3}{4}\int \text{ص}^6 - \text{ص}^3\,\text{دص} = \frac{3}{4}\left(\frac{\text{ص}^7}{7} - \frac{\text{ص}^4}{4}\right) + \text{ج} = \frac{3}{28}(1+\text{س}^4)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{16}(1+\text{س}^4)^{\frac{4}{3}} + \text{ج}$

• طولكرم 2024 / جد $\int \frac{\text{جتا}^3\text{س}}{(3\text{جاس} + \text{جتاس})^5}\, \text{دس}$

الحل / اخراج جتاس عامل مشترك من المقام.

$\Leftarrow \int \frac{\text{جتا}^3\text{س}}{\text{جتا}^5\text{س}\,(3\text{ظاس}+1)^5}\, \text{دس} = \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}\,(3\text{ظاس}+1)^5}\, \text{دس} = \int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{(3\text{ظاس}+1)^5}\, \text{دس}$

نفرض $\text{ص} = 3\text{ظاس} + 1 \Leftarrow \text{دص} = 3\text{قا}^2\text{س}\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{قا}^2\text{س}}$

$\Leftarrow \int \frac{قا^4س}{ص^5} \times \frac{دص}{3قا^2س} = \int \frac{1}{3} ص^{-5} دص = \frac{1}{3} \times \frac{ص^{-4}}{-4} + جـ = \frac{-1}{12ص^4} + جـ$

$= \frac{-1}{12(3ظاس+1)^4} + جـ$

• جنوب الخليل 2024/ صب $\int \frac{قا^2س - قتا^2س}{7 - ظا^2س - ظتا^2س} دس$ "فرض ثم كسور جزئية"

الحل/ نفرض $ص = ظاس + ظتاس \xRightarrow{نشتق} دص = (قا^2س - قتا^2س) دس$

$ص^2 = ظا^2س + ظتا^2س + 2ظاس ظتاس$

$ص^2 = ظا^2س + ظتا^2س + 2 \Leftarrow ص^2 - 2 = ظا^2س + ظتا^2س$

$\Leftarrow \int \frac{قا^2س - قتا^2س}{7 - ظا^2س - ظتا^2س} دس = \int \frac{دص}{7 - (ظا^2س + ظتا^2س)} = \int \frac{دص}{7 - (ص^2 - 2)}$

$= \int \frac{دص}{7 - ص^2 + 2} = \int \frac{دص}{9 - ص^2}$ "كسور جزئية"

$* \int \frac{دص}{9 - ص^2} = \int \frac{أ}{(3 - ص)} دص + \int \frac{ب}{(3 + ص)} دص \longleftarrow (1)$

$\frac{1}{(3+ص)(3-ص)} = \frac{أ}{(3-ص)} + \frac{ب}{(3+ص)}$

$1 = أ(3+ص) + ب(3-ص)$

عندما $ص = 3$ / $1 = أ(3+3) \Leftarrow أ = \frac{1}{6}$

عندما $ص = -3$ / $1 = ب(3 - -3) \Leftarrow ب = \frac{1}{6}$

بالتعويض في (1) $\Leftarrow \int \frac{دص}{9 - ص^2} = \int \frac{\frac{1}{6}}{3 - ص} دص + \int \frac{\frac{1}{6}}{3 + ص} دص$

$= -\frac{1}{6} لوهـ |3 - ص| + \frac{1}{6} لوهـ |3 + ص| + جـ$

$= \frac{1}{6} لوهـ \left| \frac{3 + ص}{3 - ص} \right| + جـ$

$= \frac{1}{6} لوهـ \left| \frac{3 + ظاس + ظتاس}{3 - ظاس - ظتاس} \right| + جـ$

• يطا 2024/ صب $\int \frac{\sqrt{س+1}}{\sqrt{س^5}} دس$

الحل/ $\int \frac{\sqrt{س+1}}{\sqrt{س} \times \sqrt{س^4}} دس = \int \sqrt{\frac{س+1}{س}} \times \frac{1}{س^2} دس = \int \sqrt{\frac{س}{س} + \frac{1}{س}} \times \frac{1}{س^2} دس$

$\int \sqrt{1+\frac{1}{\text{س}}} \times \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{دس}$

نفرض $\sqrt{1+\frac{1}{\text{س}}} = \text{ص}$ $\Leftarrow$ $1+\frac{1}{\text{س}} = \text{ص}^2$ نشتق

$-\frac{1}{\text{س}^2}\,\text{دس} = 2\text{ص}\,\text{دص} \Leftarrow \text{دس} = -2\text{س}^2\text{ص}\,\text{دص}$

$\Leftarrow \int \text{ص} \times \frac{1}{\text{س}^2} \times -2\text{س}^2\text{ص}\,\text{دص} = \int -2\text{ص}^2\,\text{دص} = -\frac{2}{3}\text{ص}^3 + \text{جـ}$

$= -\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$

• صبيح 2024 / إذا كان $\text{قَ}(\text{س}) = -\text{جاس}$ ، $\text{ق}(\pi) = 3$ جد $\int \text{ق}(\text{س})\left(\text{قَ}(\text{س}) - 4\text{س} + 1\right)^5\,\text{دس}$

الحل/ $\text{قَ}(\text{س}) = -\text{جاس}$

$\int \text{قَ}(\text{س})\,\text{دس} = \int -\text{جاس}\,\text{دس}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس} + \text{جـ} \Leftarrow \text{ق}(\pi) = \text{جتا}(\pi) + \text{جـ}$

$3 = -1 + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = 4$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس} + 4$

المطلوب/ $\int \text{ق}(\text{س})\left(\text{قَ}(\text{س}) - 4\text{س} + 1\right)^5\,\text{دس} = \int (\text{جتاس}+4)(-\text{جاس} - 4\text{س} + 1)^5\,\text{دس}$

نفرض $-\text{جاس} - 4\text{س} + 1 = \text{ص}$

$(-\text{جتاس} - 4)\,\text{دس} = \text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-(\text{جتاس}+4)}$

$\Leftarrow \int \cancel{(\text{جتاس}+4)} \times \text{ص}^5 \times \frac{\text{دص}}{-\cancel{(\text{جتاس}+4)}} = \int -\text{ص}^5\,\text{دص} = -\frac{\text{ص}^6}{6} + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{6}(-\text{جاس} - 4\text{س} + 1)^6 + \text{جـ}$

• بيطا 2024 / جد $\int \frac{4\,\text{جتا}^4\text{س}\,\text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^4\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

الحل/ $\int \frac{4\,\text{جتا}^4\text{س}\,\text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^4\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{4\,\text{جتا}^4\text{س}\,\cancel{\text{جا}^2\text{س}}}{\cancel{\text{جا}^2\text{س}}(\text{جا}^2\text{س} - 1)}\,\text{دس} = \int \frac{4\,\text{جتا}^4\text{س}}{-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int -4\,\text{جتا}^2\text{س}\,\text{دس} = \int -4 \times \frac{1}{2}\left(1 + \text{جتا}(2\text{س})\right)\text{دس} = \int -2 - 2\,\text{جتا}(2\text{س})\,\text{دس}$

$= -2\text{س} - \text{جا}(2\text{س}) + \text{جـ}$

• ضواحي القدس 2024 / إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة تقع عليه يعطى بالقاعدة $\frac{\text{س}^5}{(\sqrt{\text{س}} - 1)^7}$ ، جد قاعدة ق(س) علماً أنه يمر بـ (٣،١)

الحل/

ميل العمودي $= \frac{\text{س}^5}{(\sqrt{\text{س}} - 1)^7}$ $\Leftarrow$ ميل المماس $= \text{قَ}(\text{س}) = -\frac{(\sqrt{\text{س}} - 1)^7}{\text{س}^5}$

$\Leftarrow \int \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int -\frac{(\sqrt{\text{س}}-1)^{7}}{\text{س}^{5}}\,\text{دس}$ ← إخراج $\sqrt{\text{س}}$ عامل مشترك

$\text{ق}(\text{س}) = \int -\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right)^{7} \times (\sqrt{\text{س}})^{7}}{\text{س}^{5}}\,\text{دس} = \int -\frac{\text{س}^{\frac{7}{2}}}{\text{س}^{5}} \times \left(1-\frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right)^{7}\text{دس}$

$\Leftarrow \text{ق} = \int -\text{س}^{\frac{7}{2}-5} \times \left(1-\text{س}^{-\frac{1}{2}}\right)^{7}\text{دس} = \int -\text{س}^{-\frac{3}{2}}\left(1-\text{س}^{-\frac{1}{2}}\right)^{7}\text{دس} \leftarrow (1)$

$1-\text{س}^{-\frac{1}{2}} = \text{ص} \Leftarrow -\left(-\frac{1}{2}\right)\text{س}^{-\frac{3}{2}}\,\text{دس} = \text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \frac{2\,\text{دص}}{\text{س}^{-\frac{3}{2}}}$

$\Leftarrow$ بالتعويض في (١)/ $\text{ق}(\text{س}) = \int -\cancel{\text{س}^{-\frac{3}{2}}} \times \text{ص}^{7} \times \frac{2\,\text{دص}}{\cancel{\text{س}^{-\frac{3}{2}}}} = \int -2\text{ص}^{7}\,\text{دص} = -2\frac{\text{ص}^{8}}{8} + \text{ج}$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right)^{8} + \text{ج}$

ق(س) يمر ب $(1, 3)$ $\Leftarrow \text{ق}(1) = -\frac{1}{4}\cancel{\left(1-\frac{1}{1}\right)^{8}} + \text{ج} \Leftarrow \text{ج} = 3$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right)^{8} + 3$

- 2025 طولكرم/ إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة تقع عليه يُعطى بالقاعدة ($\text{جا}^{9}\text{س}\ \text{قا}^{7}\text{س}$)، $\text{س} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ جد قاعدة الاقتران ق(س) حيث أنه يمر ب $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{8}\right)$

الحل/

$\text{ميل المماس} = \frac{-1}{\text{ميل العمودي}} = \frac{-1}{\text{جا}^{9}\text{س}\ \text{قا}^{7}\text{س}} = \text{ق}'(\text{س})$

$\Leftarrow \frac{-\text{جتا}^{7}\text{س}}{\text{جا}^{9}\text{س}} = \text{ق}'(\text{س})$

$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int -\frac{\text{جتا}^{7}\text{س}}{\text{جا}^{7}\text{س}} \times \frac{1}{\text{جا}^{2}\text{س}}\,\text{دس} = \int -\text{ظتا}^{7}\text{س}\ \text{قتا}^{2}\text{س}\,\text{دس}$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \int -\text{ظتا}^{7}\text{س}\ \text{قتا}^{2}\text{س}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{ظتا}\,\text{س}$

نشتق $\text{دص} = -\text{قتا}^{2}\text{س}\,\text{دس}$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \int \text{ص}^{7}\,\text{دص} = \frac{1}{8}\text{ص}^{8} + \text{ج} = \frac{1}{8}(\text{ظتا}\,\text{س})^{8} + \text{ج}$

ق(س) يمر ب $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{8}\right) \Leftarrow \text{ق}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8} \Leftarrow \frac{1}{8}\left(\text{ظتا}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{8} + \text{ج} = \frac{1}{8} \Leftarrow \cancel{\frac{1}{8}} + \text{ج} = \cancel{\frac{1}{8}}$

$\Leftarrow \text{ج} = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{8}\text{ظتا}^{8}\text{س}$

• رام الله 2025 / جد $\int \frac{1}{(1-س\,ظتاس)^2}\,دس$

الحل / $\int \frac{1}{\left(1-\frac{س}{ظاس}\right)^2}\,دس = \int \frac{1}{\left(\frac{ظاس-س}{ظاس}\right)^2}\,دس = \int \frac{ظا^2س}{(ظاس-س)^2}\,دس$

$= \int \frac{قا^2س-1}{(ظاس-س)^2}\,دس$

نفرض $ص = ظاس - س$

$دص = (قا^2س-1)\,دس$

$\Leftarrow \int \frac{(قا^2س-1)\,دس}{(ظاس-س)^2} = \int \frac{دص}{ص^2} = -\frac{1}{ص} + جـ = \frac{-1}{ظاس-س} + جـ$

• شمال الخليل 2025 / جد $\int (1+جا(2س))\,جتا^2س\,دس$

الحل / $\int (1+جا(2س))\,جتا^2س\,دس = \int جتا^2س + جا(2س)\,جتا^2س\,دس$

$= \int جتا^2س\,دس + \int 2جاس\,جتاس \times جتا^2س\,دس$

$= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}جتا(2س)\,دس + \int 2جاس\,جتا^3س\,دس$

$= \frac{1}{2}س + \frac{1}{4}جا(2س) - 2\int -جاس\,جتا^3س\,دس$

$= \frac{1}{2}س + \frac{1}{4}جا(2س) - 2\int \left(\frac{جتا^4س}{4}\right)'\,دس$

$= \frac{1}{2}س + \frac{1}{4}جا(2س) - 2\frac{جتا^4س}{4} + جـ$

$= \frac{1}{2}س + \frac{1}{4}جا(2س) - \frac{1}{2}جتا^4س + جـ$

• جنين 2025 / إذا كان م(س) اقتران أصلي للاقتران المتصل ق(س)، وكان منحنى م(س) يمر بالنقطة (١، ٣) جد م(٣) حيث م(س) ق(س) = ٢س

الحل / م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) $\Leftarrow م'(س) = ق(س)$

$\Leftarrow م(س)\,ق(س) = 2س \Leftarrow م(س)\,م'(س) = 2س \Leftarrow \int م(س)\,م'(س)\,دس = \int 2س\,دس$

$\Leftarrow \int \left(\frac{م^2(س)}{2}\right)'\,دس = س^2 + جـ \Leftarrow \frac{م^2(س)}{2} = س^2 + جـ$

م(س) يمر بـ (١، ٣) $\Leftarrow م(1) = 3 \Leftarrow \frac{م^2(1)}{2} = 1 + جـ \Leftarrow \frac{9}{2} = 1 + جـ \Leftarrow جـ = \frac{7}{2}$

$\Leftarrow \left(\frac{ق^2(س)}{2} = س^2 + \frac{7}{2}\right) \times 2 \Leftarrow ق^2(س) = 2س^2 + 7$

$ق^2(3) = 2 \times 9 + 7$

$ق^2(3) = 25 \Leftarrow ق(3) = \pm 5$

• خارجي / جد $\int جتا^4 س \, دس$

* $\int جا^2 س \, دس$، $\int جتا^2 س \, دس$، $\int جا^2 س \, جتا^2 س \, دس$

نستخدم:

• $جا^2 س = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} جتا(2س)$

• $جتا^2 س = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا(2س)$

الحل / $\int جتا^4 س \, دس = \int (جتا^2 س)^2 \, دس = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا(2س)\right)^2 دس$

$= \int \frac{1}{4} + \frac{1}{2} جتا(2س) + \frac{1}{4} جتا^2(2س) \, دس$

$= \int \frac{1}{4} + \frac{1}{2} جتا(2س) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا(4س)\right) دس$

$= \int \frac{1}{4} + \frac{1}{2} جتا(2س) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} جتا(4س) \, دس$

$= \int \frac{3}{8} + \frac{1}{2} جتا(2س) + \frac{1}{8} جتا(4س) \, دس$

$= \frac{3}{8} س + \frac{1}{4} جا(2س) + \frac{1}{32} جا(4س) + ج$

• خارجي / جد $\int (س^4 + س^2)\sqrt{س^2 + 2} \, دس$

الحل / $\int س(س^3 + س)\sqrt{س^2 + 2} \, دس = \int (س^3 + س) \times \sqrt{س^2} \times \sqrt{س^2 + 2} \, دس$

$= \int (س^3 + س)\sqrt{س^2(س^2 + 2)} \, دس$

$= \int (س^3 + س)\sqrt{س^4 + 2س^2} \, دس$

نفرض $\left(ص = \sqrt{س^4 + 2س^2}\right)^2 \Leftarrow ص^2 = س^4 + 2س^2$

$(4س^3 + 4س) \, دس = 2ص \, دص$

$\Leftarrow دس = \frac{2ص \, دص}{4(س^3 + س)}$

$\Leftarrow \int \cancel{(س^3 + س)} \times ص \times \frac{2ص \, دص}{4\cancel{(س^3 + س)}} = \int \frac{1}{2} ص^2 \, دص = \frac{1}{2} \times \frac{ص^3}{3} + ج$

$= \frac{1}{6}(س^4 + 2س^2)^{\frac{3}{2}} + ج$

المرءُ نتاج خلواته!

أسئلة للمهتمين — الدرس الرابع / طرق التكامل - التكامل بالتعويض

• سؤال (١) : جد التكاملات الآتية :

١/ $\int \text{س}^{٦} \sqrt{\text{س} - \frac{١}{\text{س}^{٤}}}\ \text{دس}$

الحل/ $\int \text{س}^{٦} \sqrt{\text{س} - \frac{١}{\text{س}^{٤}}}\ \text{دس} = \int \text{س}^{٦} \sqrt{\frac{\text{س}^{٥}-١}{\text{س}^{٤}}}\ \text{دس} = \int \text{س}^{٦} \times \frac{\sqrt{\text{س}^{٥}-١}}{\sqrt{\text{س}^{٤}}}\ \text{دس}$

$\text{ل} = \int \text{س}^{٦} \times \frac{\sqrt{\text{س}^{٥}-١}}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس} = \int \text{س}^{٤} \sqrt{\text{س}^{٥}-١}\ \text{دس}$

نفرض $\sqrt{\text{س}^{٥}-١} = \text{ص} \Leftarrow \text{س}^{٥} - ١ = \text{ص}^{٢}$ نشتق

$٥\text{س}^{٤}\ \text{دس} = ٢\text{ص}\ \text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \frac{٢\text{ص}\ \text{دص}}{٥\text{س}^{٤}}$

$\Leftarrow \text{ل} = \int \text{س}^{٤} \times \text{ص} \times \frac{٢\text{ص}\ \text{دص}}{٥\text{س}^{٤}} = \int \frac{٢}{٥}\text{ص}^{٢}\ \text{دص} = \frac{٢}{٥} \times \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ} = \frac{٢}{١٥}\left(\sqrt{\text{س}^{٥}-١}\right)^{٣} + \text{جـ}$

٢/ $\int \text{جتا}^{٣٢}\text{س}\ \text{جا}^{٣٠}\text{س} - \text{جتا}^{٣٠}\text{س}\ \text{جا}^{٣٢}\text{س}\ \text{دس}$

الحل/ $\int \text{جتا}^{٣٢}\text{س}\ \text{جا}^{٣٠}\text{س} - \text{جتا}^{٣٠}\text{س}\ \text{جا}^{٣٢}\text{س}\ \text{دس} = \int \text{جا}^{٣٠}\text{س}\ \text{جتا}^{٣٠}\text{س} \left(\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}\right) \text{دس}$

$= \int \left(\text{جاس جتاس}\right)^{٣٠} \times \text{جتا}(٢\text{س})\ \text{دس} = \int \left[\frac{١}{٢}\text{جا}(٢\text{س})\right]^{٣٠} \times \text{جتا}(٢\text{س})\ \text{دس}$

$\text{ل} = \int \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣٠} \times \text{جا}^{٣٠}(٢\text{س})\ \text{جتا}(٢\text{س})\ \text{دس}$

نفرض $\text{جا}(٢\text{س}) = \text{ص} \Leftarrow ٢\text{جتا}(٢\text{س})\ \text{دس} = \text{دص}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{جتا}(٢\text{س})}$

$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{١}{٢^{٣٠}} \times \text{ص}^{٣٠} \times \cancel{\text{جتا}(٢\text{س})} \times \frac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{جتا}(٢\text{س})}} = \int \frac{١}{٢^{٣١}} \times \text{ص}^{٣٠}\ \text{دص} = \frac{١}{٢^{٣١}} \times \frac{\text{ص}^{٣١}}{٣١} + \text{جـ}$

$\text{ل} = \left(\frac{١}{٢^{٣١}}\right) \times \frac{١}{٣١}\left(\text{جا}(٢\text{س})\right)^{٣١} + \text{جـ} = \frac{١}{٣١}\left(\frac{١}{٢}\text{جا}(٢\text{س})\right)^{٣١} + \text{جـ}$

$\Leftarrow \text{ل} = \frac{١}{٣١}\left(\frac{١}{٢}\text{جا}(٢\text{س})\right)^{٣١} + \text{جـ}$

طريقة (٢) : $\text{ل} = \int \left(\frac{١}{٢}\text{جا}(٢\text{س})\right)^{٣٠} \times \text{جتا}(٢\text{س})\ \text{دس}$

لاحظ: مشتقة $\left(\frac{١}{٢}\text{جا}(٢\text{س})\right)$ بجانبها

$\Leftarrow \text{ل} = \frac{\left(\frac{١}{٢}\text{جا}(٢\text{س})\right)^{٣١}}{٣١} + \text{جـ} \Leftarrow \int \left(\text{ق}(\text{س})\right)^{\text{ن}} \text{ق}'(\text{س})\ \text{دس} = \frac{\left(\text{ق}(\text{س})\right)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$

٣/ $\int$ ظا^{7}س + ظا^{9}س دس

الحل/ $\int$ ظا^{7}س + ظا^{9}س دس = $\int$ ظا^{7}س (١ + ظا^{2}س) دس = $\int$ ظا^{7}س × قا^{2}س دس

نفرض ظاس = ص

قا^{2}س دس = دص

⇐ ل = $\int$ ص^7 دص = $\frac{1}{8}$ ص^8 + جـ = $\frac{1}{8}$ ظا^{8}س + جـ

طريقة (٢): $\int$ ظا^{7}س × قا^{2}س دس = $\int$ $\left(\frac{\text{ظا}^8\text{س}}{8}\right)'$ دس = $\frac{1}{8}$ ظا^{8}س + جـ

مشتقة ظاس بجانبه

٤/ $\int \frac{\text{س}}{1+\text{س ظاس}}$ دس

الحل/ $\int \frac{\text{س}}{1+\text{س ظاس}}$ دس = $\int \frac{\text{س}}{1+\text{س}\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}$ دس = $\int \frac{\text{س}}{\frac{\text{جتاس}+\text{س جاس}}{\text{جتاس}}}$ دس

توحيد مقامات

= $\int \frac{\text{جتاس} \times \text{س}}{\text{جتاس}+\text{س جاس}}$ دس = لوهـ |جتاس + س جاس| + جـ "(مقام)$'$ = البسط"

• لاحظ/ (جتاس + س جاس)$'$ = $\cancel{-\text{جاس}}$ + س جتاس + $\cancel{\text{جاس}}$ = س جتاس

٥/ $\int$ ظا^{4}س دس

الحل/ $\int$ ظا^{4}س دس = $\int$ ظا^{2}س × ظا^{2}س دس = $\int$ ظا^2(س) (قا^{2}س − ١) دس

ل = $\int$ ظا^{2}س قا^{2}س دس − $\int$ ظا^{2}س دس

ل = $\int \left(\frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3}\right)'$ دس − $\int$ (قا^{2}س − ١) دس

ل = $\frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3}$ − $\int$ قا^{2}س دس + $\int$ ١ دس

ل = $\frac{1}{3}$ ظا^{3}س − ظاس + س + جـ

طريقة (٢):

• $\int$ ظا^{2}س قا^{2}س دس

نفرض ص = ظاس

دص = قا^{2}س دس

⇐ $\int$ ظا^{2}س قا^{2}س دس = $\int$ ص^2 دص

= $\frac{1}{3}$ ص^3 + جـ

= $\frac{1}{3}$ ظا^{3}س + جـ

٦/ $\int \frac{1}{\text{س}}$ لوهـ$\left(\frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right)$ دس

الحل/

* لوهـ$\left(\frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right)$ = لوهـ١ − لوهـ$\sqrt{\text{س}}$ = صفر − لوهـ س$^{\frac{1}{2}}$ = $-\frac{1}{2}$ لوهـ س

⇐ $\int \frac{1}{\text{س}} \times -\frac{1}{2}$ لوهـ س دس = $\int \frac{-1}{2\text{س}}$ (لوهـ س) دس = $-\frac{1}{2}\frac{(\text{لوهـ س})^2}{2}$ + جـ = $-\frac{1}{4}$(لوهـ س)^2 + جـ

مشتقة بجانبه

طريقة (٢):

$* \quad \text{ق} = \int -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\text{س}} \, \text{لوهـ س} \; \text{دس}$

نفرض $\text{لوهـ س} = \text{ص} \Leftarrow \frac{1}{\text{س}} \text{دس} = \text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \text{س دص}$

$\Leftarrow \text{ق} = \int -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\cancel{\text{س}}} \times \text{ص} \times \cancel{\text{س}} \, \text{دص} = \int -\frac{1}{2} \text{ص دص} = -\frac{1}{2} \times \frac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ} = -\frac{1}{4} \text{ص}^2 + \text{جـ}$

$\Leftarrow \text{ق} = -\frac{1}{4} (\text{لوهـ س})^2 + \text{جـ}$

٧/ $\int \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} + \frac{1}{2} \text{جا(٢س) جتاس}} \; \text{دس} \; ، \; \text{س} \in \,]0 ، \frac{\pi}{2}[$

الحل/ $\int \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} + \cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{2}\text{جاس جتاس جتاس}} \; \text{دس} = \int \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جاس جتا}^2\text{س}} \; \text{دس}$

$= \int \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} \, (1 + \text{جاس})} \; \text{دس} = \int \sqrt{\text{جتا}^2\text{س}} \times \sqrt{1 + \text{جاس}} \; \text{دس}$

$\text{ق} = \int |\text{جتاس}| \sqrt{1 + \text{جاس}} \; \text{دس} = \int \text{جتاس} \sqrt{1 + \text{جاس}} \; \text{دس}$

نفرض $\left(\sqrt{1 + \text{جاس}} = \text{ص}\right)^2 \Leftarrow 1 + \text{جاس} = \text{ص}^2$ نشتق

$\text{جتاس دس} = \text{٢ص دص} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{٢ص دص}}{\text{جتاس}}$

$\Leftarrow \text{ق} = \int \cancel{\text{جتاس}} \times \text{ص} \times \frac{\text{٢ص دص}}{\cancel{\text{جتاس}}} = \int \text{٢ص}^2 \text{دص} = \frac{2}{3} \text{ص}^3 + \text{جـ} = \frac{2}{3} (1 + \text{جاس})^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$

٨/ $\int \frac{\text{جتاس جا}^3\text{س}}{1 + \text{جا}^2\text{س}} \; \text{دس}$

الحل/ نفرض $1 + \text{جا}^2\text{س} = \text{ص}$

$\text{٢جاس جتاس دس} = \text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢جاس جتاس}}$

$\Leftarrow \text{ق} = \int \frac{\cancel{\text{جتاس}} \, \text{جا}^3\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{٢جاس} \cancel{\text{جتاس}}} = \int \frac{1}{2} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{ص}} \text{دص} = \frac{1}{2} \int \frac{\text{ص} - 1}{\text{ص}} \text{دص}$

$\text{ق} = \frac{1}{2} \int \frac{\text{ص}}{\text{ص}} - \frac{1}{\text{ص}} \, \text{دص} \Leftarrow \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{\text{ص}} \, \text{دص} = \text{ق}$

$\Leftarrow \frac{1}{2} \left(\text{ص} - \text{لوهـ} |\text{ص}|\right) + \text{جـ} = \text{ق}$

$\Leftarrow \frac{1}{2} (1 + \text{جا}^2\text{س}) - \frac{1}{2} \text{لوهـ} |1 + \text{جا}^2\text{س}| + \text{جـ} = \text{ق}$

.. إنما الأقصى عقيدة ..

• السؤال (٣) : إذا كان $\frac{\text{لوهـ}\,س}{قَ(س)} = س$ ، $قَ(س) \neq ٠$ ، $س > ٠$ جد قاعدة $ق(س)$ حيث $ق(هـ^{٢}) = ٥$

الحل/

$\frac{\text{لوهـ}\,س}{قَ(س)} = س \Leftarrow \text{لوهـ}\,س = س\,قَ(س) \Leftarrow \frac{١}{س}\,\text{لوهـ}\,س = قَ(س)$

$\Leftarrow \int قَ(س)\,دس = \int \frac{١}{س}\,\text{لوهـ}\,س\,دس$

$ق(س) = \int \frac{١}{س}\,\text{لوهـ}\,س\,دس$

نفرض $\text{لوهـ}\,س = ص$

$\frac{١}{س}\,دس = دص$

$\Leftarrow دس = س\,دص$

$\Leftarrow ق(س) = \int \frac{١}{س} \times ص \times س\,دص = \int ص\,دص$

$ق(س) = \frac{١}{٢}ص^{٢} + جـ$

$ق(س) = \frac{١}{٢}(\text{لوهـ}\,س)^{٢} + جـ$

$ق(هـ^{٢}) = \frac{١}{٢}(\cancel{\text{لوهـ}}\,هـ^{٢})^{٢} + جـ \Leftarrow ٥ = \frac{١}{٢}(٢)^{٢} + جـ \Leftarrow ٥ = ٢ + جـ \Leftarrow جـ = ٣$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{١}{٢}(\text{لوهـ}\,س)^{٢} + ٣$

الدرس الرابع | طرق التكامل - الأجزاء

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية :

• (2007 + 2023 دورثاني) / جد ∫ جا(√س) دس

الحل / * زاوية جا غير خطية ⇐ نفرضها ص

(ص = √س)² ⇐ ص² = س   نشتق

٢ص دص = دس

⇐ ∫ جا(√س) دس = ∫ جا(ص) × ٢ص دص = ∫ ٢ص جاص دص   أجزاء

٢ص = هـ   ×   جاص دص = دع

٢دص = دهـ   ∫   - جتاص = ع

⇐ ∫ ٢ص جاص دص = -٢ص جتاص + ∫ ٢جتاص دص

= -٢ص جتاص + ٢جاص + ج

= -٢√س جتا(√س) + ٢جا(√س) + ج

طريقة (٢): ∫ ٢ص جاص دص = ∫ ٢ص جاص - ٢جتاص + ٢جتاص دص

= ∫ (٢ص جاص - ٢جتاص) دص + ∫ ٢جتاص دص

= ∫ (-٢ص جتاص)′ دص + ٢جاص + ج

= -٢ص جتاص + ٢جاص + ج

= -٢√س جتا(√س) + ٢جا(√س) + ج

• 2007 إكمال / جد ∫ $هـ^س$ جاس دس

الحل / طريقة (١): أجزاء مرتبة دوّار

جاس = هـ   × $هـ^س$ دس = دع

جتاس دس = دهـ   ∫ $هـ^س$ = ع

⇐ ∫ $هـ^س$ جاس دس = جا(س) $هـ^س$ + ∫ -$هـ^س$ جتاس دس

أجزاء مرتبة

-جتاس = هـ   × $هـ^س$ دس = دع

جاس دس = دهـ   ∫ $هـ^س$ = ع

∫ $هـ^س$ جاس دس = جا(س) $هـ^س$ - $هـ^س$ جتاس + ∫ -$هـ^س$ جاس دس

+ ∫ $هـ^س$ جاس دس   + ∫ $هـ^س$ جاس دس

$\frac{٢}{٢}$ ∫ $هـ^س$ جاس دس = $\frac{هـ^س}{٢}$ (جاس - جتاس) ⇐ ∫ $هـ^س$ جاس دس = ½ ($هـ^س$)(جاس - جتاس) + ج

• أولوية فرض هـ "السهل الاشتقاق" كما يأتي:

١/ الاقترانات اللوغاريتمية.

٢/ كثيرات الحدود.

٣/ الاقترانات الدائرية.

٤/ الاقترانات الأسية.

ولسهولة الحفظ:

لقاؤك كان دواءً سرمدًا ♥

طريقة (٢):

$(\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس})' = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}$ ← معادلة (١)

$(\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس})' = -\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}$ ← معادلة (٢)

(١) - (٢) ⇐ $(\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس})' - (\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس})' = 2\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}$ بأخذ التكامل للطرفين

$\int (\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس})'\,\text{دس} - \int (\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس})'\,\text{دس} = \int 2\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس}$

$\left[\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} - \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{جـ} = 2\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس}\right] \div 2$

$\frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} - \frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{جـ} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس}$

طريقة (٣):

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس} = \int (\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} - \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} - \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس})\,\text{دس}$

⇐ $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس} = \int (\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس})\,\text{دس} + \int (-\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس})\,\text{دس} + -\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس}$

$+\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس}$ $\qquad$ $+\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس}$

$2\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس} = \int (\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس})'\,\text{دس} + \int (-\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس})'\,\text{دس}$

$2\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} - \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}$

⇐ $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس} = \frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} - \frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{جـ}$

. 2008 / ص $\int \text{س}^{10}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$

الحل/

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = \text{س}^{10}\,\text{دس}$

$\frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} = \text{دق}$ $\qquad$ $\frac{\text{س}^{11}}{11} = \text{ع}$

$\int \text{س}^{10}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^{11}}{11}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{\text{س}^{11}}{11} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$= \frac{1}{11}\text{س}^{11}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{11}\int \text{س}^{10}\,\text{دس}$

$= \frac{1}{11}\text{س}^{11}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{11} \times \frac{\text{س}^{11}}{11} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{11}\text{س}^{11}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{121}\text{س}^{11} + \text{جـ}$

طريقة (٢):

$\int \text{س}^{10}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \int \left(\text{س}^{10}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{س}^{10}}{11} - \frac{\text{س}^{10}}{11}\right)\text{دس}$

$= \int \left(\frac{1}{11}\text{س}^{11}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)'\text{دس} - \frac{1}{11}\int \text{س}^{10}\,\text{دس}$

$= \frac{1}{11}\text{س}^{11}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{121}\text{س}^{11} + \text{جـ}$

المستراح في الجنّة .. أمّا هنا " يا أيها الإنسان إنّك كادح "

• 2008 إكمال / جد $\int ٢س^{٣} جا(س^{٢}) \, دس$

الحل/

نفرض $ص = س^{٢}$

نشتق $دص = ٢س \, دس \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س}$

$\Leftarrow \int ٢س^{٣} جا(س^{٢}) \, دس = \int ٢س^{٣} جا(ص) \times \frac{دص}{٢س} = \int س^{٢} جا ص \, دص = \int \underbrace{ص جا ص \, دص}_{\text{أجزاء}}$

$ص = هـ$ ، $جا ص \, دص = دع$

$دص = د هـ$ ، $ع = -جتا ص$

$\int ص جا ص \, دص = -ص جتا ص + \int جتا ص \, دص$

$= -ص جتا ص + جا ص + ج$

$= -س^{٢} جتا(س^{٢}) + جا(س^{٢}) + ج$

طريقة (٢): $\int ٢س^{٣} جا(س^{٢}) \, دس = \int ٢س^{٣} جا(س^{٢}) - ٢س جتا(س^{٢}) + ٢س جتا(س^{٢}) \, دس$

$= \int (٢س^{٣} جا(س^{٢}) - ٢س جتا(س^{٢})) \, دس + \int ٢س جتا(س^{٢}) \, دس$

$= \int (-س^{٢} جتا(س^{٢}))' \, دس + \int (جا(س^{٢}))' \, دس$

$= -س^{٢} جتا(س^{٢}) + جا(س^{٢}) + ج$

طريقة (3): من طريقة (١):

$\int ص جا(ص) \, دص = \int ص جا ص + -جتا ص + جتا ص \, دص$

$= \int (-ص جتا ص)' \, دص + \int جتا(ص) \, دص$

$= -ص جتا(ص) + جا(ص) + ج$

$= -س^{٢} جتا(س^{٢}) + جا(س^{٢}) + ج$

• 2011 إكمال / جد $\int \frac{س}{هـ^{س}} \, دس$

الحل/ $\int \frac{س}{هـ^{س}} \, دس = \int س هـ^{-س} \, دس = \int س هـ^{-س} - هـ^{-س} + هـ^{-س} \, دس$

$= \int (-س هـ^{-س})' \, دس + \int هـ^{-س} \, دس$

$= -س هـ^{-س} - هـ^{-س} + ج$

طريقة (٢): $\int س\, هـ^{-س}\, دس$

$م = س \qquad دع = هـ^{-س}\, دس$

$دم = دس \qquad ع = -هـ^{-س}$

$\int س\, هـ^{-س}\, دس = -س\, هـ^{-س} + \int هـ^{-س}\, دس$

$= -س\, هـ^{-س} - هـ^{-س} + ج$

• 2013 / إكمال: جد $\int هـ^{\sqrt{س}}\, دس$

الحل/

نفرض $\sqrt{س} = ص \Leftarrow س = ص^2$

$دس = 2ص\, دص$

$\Leftarrow \int هـ^{ص} \times 2ص\, دص = \int 2ص\, هـ^{ص}\, دص$ "أجزاء"

$م = 2ص \qquad دع = هـ^{ص}\, دص$

$دم = 2\, دص \qquad ع = هـ^{ص}$

$\Leftarrow \int 2ص\, هـ^{ص}\, دص = 2ص\, هـ^{ص} - \int 2هـ^{ص}\, دص$

$= 2ص\, هـ^{ص} - 2هـ^{ص} + ج$

$= 2\sqrt{س}\, هـ^{\sqrt{س}} - 2هـ^{\sqrt{س}} + ج$

طريقة (٢): $\int هـ^{\sqrt{س}}\, دس = \int هـ^{\sqrt{س}} + \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}} - \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}}\, دس$

$= \int \left(هـ^{\sqrt{س}} + \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}}\right) دس - 2\int \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{2\sqrt{س}}\, دس$

$= \int \left(2\sqrt{س}\, هـ^{\sqrt{س}}\right)'\, دس - 2\int \left(هـ^{\sqrt{س}}\right)'\, دس$

$= 2\sqrt{س}\, هـ^{\sqrt{س}} - 2هـ^{\sqrt{س}} + ج$

• 2014 / جد $\int \frac{س\, جتاس}{جا^3 س}\, دس$

الحل/ $\int \frac{س\, جتاس}{جا^3 س}\, دس = \int س \frac{جتاس}{جاس} \times \frac{1}{جا^2 س}\, دس = \int س\, ظتاس\, قتا^2 س\, دس$

$م = س \qquad دع = ظتاس\, قتا^2 س\, دس$ ← يمكن حلها بفرض ص = ظتاس
أو لاحظ مشتقة ظتاس بجانبها

$دم = دس \qquad ع = -\frac{1}{2} ظتا^2 س$

$\int س\, ظتاس\, قتا^2 س\, دس = -\frac{1}{2} س\, ظتا^2 س + \int \frac{1}{2} ظتا^2 س\, دس$

$= -\frac{1}{2} س\, ظتا^2 س + \frac{1}{2}\int (قتا^2 س - 1)\, دس$

$= -\frac{1}{2} س\, ظتا^2 س + -\frac{1}{2} ظتاس - \frac{1}{2} س + ج$

• **طريقة (٢):** $\int$ س ظاس قا^{2}س دس $= \int$ س ظاس قا^{2}س $- \frac{1}{2}$ ظا^{2}س $+ \frac{1}{2}$ ظا^{2}س

$= \int$ (س ظاس قا^{2}س $- \frac{1}{2}$ ظا^{2}س) دس $+ \int \frac{1}{2}$ ظا^{2}س دس

$= \int (-\frac{1}{2}$ ظا^{2}س × س$)'$ دس $+ \int \frac{1}{2}$ (قا^{2}س $- 1$) دس

$= -\frac{1}{2}$ س ظا^2 س $- \frac{1}{2}$ ظاس $- \frac{1}{2}$ س $+$ ج

• 2014 / إكمال: جد $\int$ س لو$_{هـ}$ س دس

الحل/ $\int$ س لو$_{هـ}$ س دس

ق = لو$_{هـ}$ س ، س دس = دع

$\frac{1}{س}$ دس = دق ، $\frac{1}{2}$ س^2 = ع

$\int$ س لو$_{هـ}$ س دس $= \frac{1}{2}$ س^2 لو$_{هـ}$ س $- \int \frac{1}{س} \times \frac{1}{2}$ س^2 دس

$= \frac{1}{2}$ س^2 لو$_{هـ}$ س $- \frac{1}{2} \int$ س دس

$= \frac{1}{2}$ س^2 لو$_{هـ}$ س $- \frac{1}{4}$ س^2 $+$ ج

طريقة (٢): $\int$ س لو$_{هـ}$ س دس $= \int$ س لو$_{هـ}$ س $+ \frac{1}{2}$ س $- \frac{1}{2}$ س دس

$= \int$ (س لو$_{هـ}$ س $+ \frac{1}{2}$ س) دس $- \int \frac{1}{2}$ س دس

$= \int (\frac{س^2}{2}$ لو$_{هـ}$ س$)'$ دس $- \frac{1}{4}$ س^2 $+$ ج

$= \frac{س^2}{2}$ لو$_{هـ}$ س $- \frac{1}{4}$ س^2 $+$ ج

• 2015 / جد $\int$ جا$(\sqrt{4-2س})$ دس

الحل/ نفرض $(\sqrt{4-2س} = ص)^2$

$4 - 2س = ص^2$ ⟸ -2 دس $= 2$ص دص

دس $= -$ص دص

⟸ $\int$ جا(ص) × $-$ص دص $= \int -$ص جاص دص "أجزاء"

ق = ص ، $-$جاص دص = دع

دق = دص ، جتاص = ع

⟸ $\int -$ص جاص دص = ص جتاص $- \int$ جتاص دص

= ص جتاص $-$ جاص $+$ ج

$= \sqrt{4-2س}$ جتا$(\sqrt{4-2س})$ $-$ جا$(\sqrt{4-2س})$ $+$ ج

طريقة (٢):

$$\int \text{جا}\sqrt{٤-٣س}\,\text{دس} = \int \text{جا}\left(\sqrt{٤-٣س}\right) \times \frac{\sqrt{٤-٣س}}{\sqrt{٤-٣س}} \;-\; +\; \frac{\text{جتا}\left(\sqrt{٤-٣س}\right)}{\sqrt{٤-٣س}} + \frac{\text{جتا}\left(\sqrt{٤-٣س}\right)}{\sqrt{٤-٣س}}\,\text{دس}$$

$$= \int \left(\frac{\sqrt{٤-٣س}\,\text{جا}\left(\sqrt{٤-٣س}\right)}{\sqrt{٤-٣س}} - \frac{\text{جتا}\sqrt{٤-٣س}}{\sqrt{٤-٣س}} \right)\text{دس} + \int \frac{\text{جتا}\sqrt{٤-٣س}}{\sqrt{٤-٣س}}\,\text{دس}$$

$$= \int \left(\sqrt{٤-٣س}\;\text{جتا}\sqrt{٤-٣س}\right)'\,\text{دس} + \int \left(-\text{جا}\sqrt{٤-٣س}\right)'\,\text{دس}$$

$$= \sqrt{٤-٣س}\;\text{جتا}\sqrt{٤-٣س} - \text{جا}\sqrt{٤-٣س} + \text{جـ}$$

• 2016 إكمال/ جد $\int س^{٥}\,\text{لوهـ}\,س^{٣}\,\text{دس}$

الحل/

$$\int س^{٥}\,\text{لوهـ}\,س^{٣}\,\text{دس} = \int ٣س^{٥}\,\text{لوهـ}\,س\,\text{دس}$$

$\text{ص} = ٣\,\text{لوهـ}\,س$ ، $\text{دع} = س^{٥}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \frac{٣}{س}\,\text{دس}$ ، $\text{ع} = \frac{س^{٦}}{٦}$

$$\int س^{٥}\,\text{لوهـ}\,س^{٣}\,\text{دس} = ٣\,\text{لوهـ}\,س \times \frac{س^{٦}}{٦} - \int \frac{٣}{س} \times \frac{س^{٦}}{٦}\,\text{دس}$$

$$= \frac{١}{٣}س^{٦}\,\text{لوهـ}\,س - \int \frac{١}{٣}س^{٥}\,\text{دس}$$

$$= \frac{١}{٣}س^{٦}\,\text{لوهـ}\,س - \frac{١}{١٨}س^{٦} + \text{جـ}$$

طريقة (٢):

$$\int س^{٥}\,\text{لوهـ}\,س^{٣}\,\text{دس} = \int س^{٥}\,\text{لوهـ}\,س^{٣} + \frac{١}{٣}س^{٥} - \frac{١}{٣}س^{٥}\,\text{دس}$$

$$= \int \left(س^{٥}\,\text{لوهـ}\,س^{٣} + \frac{١}{٣}س^{٥}\right)\text{دس} - \int \frac{١}{٣}س^{٥}\,\text{دس}$$

$$= \int \left(\frac{١}{٣}س^{٦}\,\text{لوهـ}\,س\right)'\text{دس} - \frac{١}{١٨}س^{٦} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٣}س^{٦}\,\text{لوهـ}\,س - \frac{١}{١٨}س^{٦} + \text{جـ}$$

• 2017/ جد $\int \frac{س\,\text{هـ}^{س}}{(س+١)^{٢}}\,\text{دس}$

الحل/

$\text{ص} = س\,\text{هـ}^{س}$ ، $\text{دع} = \frac{١}{(س+١)^{٢}}\,\text{دس}$

$\text{دص} = (س+١)\,\text{هـ}^{س}\,\text{دس}$ ، $\text{ع} = \frac{-١}{س+١}$

$$\int \frac{س\,\text{هـ}^{س}}{(س+١)^{٢}}\,\text{دس} = \frac{-س\,\text{هـ}^{س}}{س+١} + \int \frac{(س+١)\,\text{هـ}^{س}}{(س+١)}\,\text{دس} = \frac{-س\,\text{هـ}^{س}}{س+١} + \text{هـ}^{س} + \text{جـ}$$

طريقة (٢): $\int \frac{س هـ^{س}}{(١+س)^{٢}} دس = \int \frac{س هـ^{س} + هـ^{س} - هـ^{س}}{(١+س)^{٢}} دس = \int \frac{هـ^{س}(١+س) - هـ^{س}}{(١+س)^{٢}} دس$

$= \int \left(\frac{هـ^{س}}{(١+س)^{٢}}\right)' دس = \frac{هـ^{س}}{(١+س)^{٢}} + جـ$

• 2018 / صيفي: $\int ٢س \, جتا س \, دس$

الحل/

$ق = ٢س \qquad دع = جتا س \, دس$

$دق = ٢ \, دس \qquad ع = جا س$

$\int ٢س \, جتا س \, دس = ٢س \, جا س - \int ٢ جا س \, دس$

$= ٢س \, جا س + ٢ جتا س + جـ$

طريقة (٢): $\int ٢س \, جتا س \, دس = \int (٢س \, جتا س + ٢ جا س - ٢ جا س) دس$

$= \int (٢س \, جا س)' دس - \int ٢ جا س \, دس$

$= ٢س \, جا س + ٢ جتا س + \cancel{جـ}$

• 2018 دور ثاني / $\int \sqrt{س} \, لو_{هـ} س \, دس$

الحل/

$ق = لو_{هـ} س \qquad دع = \sqrt{س} \, دس$

$دق = \frac{١}{س} دس \qquad ع = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}$

$\int \sqrt{س} \, لو_{هـ} س \, دس = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} لو_{هـ} س - \int \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{س} دس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} لو_{هـ} س - \frac{٢}{٣} \int س^{\frac{١}{٢}} دس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} لو_{هـ} س - \frac{٤}{٩} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

• 2020 / ج: $\int \frac{١}{قتا س} \, لو_{هـ}(١ + جا س) \, دس$

الحل/

$ق = لو_{هـ}(١ + جا س) \qquad دع = جا س \, دس$

$دق = \frac{جتا س}{١ + جا س} دس \qquad ع = -جتا س$

$\int جا س \, لو_{هـ}(١ + جا س) \, دس = -جتا س \, لو_{هـ}(١ + جا س) + \int \frac{جتا^{٢} س}{١ + جا س} دس$

$= -جتا س \, لو_{هـ}(١ + جا س) + \int \frac{١ - جا^{٢} س}{١ + جا س} دس$

$\int \frac{(١ - جا س)(١ + جا س)}{(١ + جا س)} دس = \int (١ - جا س) دس = س + جتا س + جـ$

$= -جتا س \, لو_{هـ}(١ + جا س) + س + جتا س + جـ$

طريقة (٢): $\int \frac{1}{قتاس} لو_هـ(1+جاس)\, دس = \int جاس\, لو_هـ(1+جاس)\, دس$

$= \int جاس\, لو_هـ(1+جاس) - \frac{جتا^2س}{1+جاس} + \frac{جتا^2س}{1+جاس}\, دس$

$= \int جاس\, لو_هـ(1+جاس) - \frac{جتا^2س}{1+جاس}\, دس + \int \frac{جتا^2س}{1+جاس}\, دس$

$= \int \left(-جتاس\, لو_هـ(1+جاس)\right)'\, دس + \int \frac{1-جا^2س}{1+جاس}\, دس$

$= -جتاس\, لو_هـ(1+جاس) + \int \frac{(1-جاس)(1+جاس)}{(1+جاس)}\, دس$

$= -جتاس\, لو_هـ(1+جاس) + س + جتاس + ج$

• 2020 دورة ثاني / جد $\int هـ^س \left(لو_هـ س + \frac{1}{س}\right) دس$

الحل / $\int هـ^س لو_هـ س + \frac{هـ^س}{س}\, دس = \int \left(هـ^س لو_هـ س\right)'\, دس = هـ^س لو_هـ س + ج$

طريقة (٢): $\int هـ^س لو_هـ س + \frac{هـ^س}{س}\, دس = ل$

* $\int هـ^س لو_هـ س\, دس$:

$ق = لو_هـ س \qquad دع = هـ^س دس$

$دق = \frac{1}{س} دس \qquad ع = هـ^س$

$\int هـ^س لو_هـ س\, دس = هـ^س لو_هـ س - \int \frac{1}{س} هـ^س\, دس$

$ل = \int هـ^س لو_هـ س\, دس + \int \frac{هـ^س}{س}\, دس = هـ^س لو_هـ س - \cancel{\int \frac{1}{س} هـ^س\, دس} + \cancel{\int \frac{1}{س} هـ^س\, دس}$

$= هـ^س لو_هـ س + ج$

---

* طريقة (3): * $ل = \int هـ^س لو_هـ س\, دس + \int \frac{1}{س} هـ^س\, دس$

* $\int \frac{1}{س} هـ^س\, دس$:

$ق = هـ^س \qquad دع = \frac{1}{س} دس$

$دق = هـ^س دس \qquad ع = لو_هـ|س|$

$\int \frac{1}{\text{س}}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{جـ}$

• 2020 دورة ثانية / جد $\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2\,\text{دس}$ "أجزاء مرتين"

الحل/

$\text{هـ} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2$ ، $\text{دهـ} = 2(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دع} = \text{دس}$ ، $\text{ع} = \text{س}$

$\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2\,\text{دس} = \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \int 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\text{س}} \times \text{س}\,\text{دس}$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 + \int -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$

نستخدم أجزاء مرة ثانية

$\text{هـ} = -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{دهـ} = \frac{-2}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دع} = \text{دس}$ ، $\text{ع} = \text{س}$

$\Leftarrow \int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2\,\text{دس} = \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - 2\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \int \frac{2}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}}\,\text{دس}$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - 2\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) + 2\text{س} + \text{جـ}$

طريقة (2): $\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2\,\text{دس} = \int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - 2 + 2\,\text{دس}$

$= \int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} + \int -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - 2\,\text{دس} + \int 2\,\text{دس}$

$= \int \left(\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2\right)'\,\text{دس} + \int \left(-2\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)'\,\text{دس} + 2\text{س} + \text{جـ}$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - 2\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + 2\text{س} + \text{جـ}$

• 2020 دورة ثالثة / جد $\int \text{قا}^2(\sqrt{\text{س}})\,\text{دس}$

الحل/ نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{س} = \text{ص}^2$ نشتق

$\text{دس} = 2\text{ص}\,\text{دص}$

$\Leftarrow \int 2\text{ص}\,\text{قا}^2(\text{ص})\,\text{دص}$ "أجزاء"

$\text{هـ} = 2\text{ص}$ ، $\text{دهـ} = 2\,\text{دص}$

$\text{دع} = \text{قا}^2(\text{ص})\,\text{دص}$ ، $\text{ع} = \text{ظا}(\text{ص})$

$\Leftarrow$ ∫ ٢ص قا²(ص) دص = ٢ص ظاص − ∫ ٢ظاص دص

= ٢ص ظاص + ٢ ∫ $\frac{-\text{جاص}}{\text{جتاص}}$ دص

= ٢ص ظاص + ٢ لوهـ|جتاص| + جـ

= ٢√س ظا(√س) + ٢ لوهـ|جتا(√س)| + جـ

• طريقة (٢):

∫ قا²√س دس = ∫ قا²(√س) + $\frac{\text{ظا}(\sqrt{\text{س}})}{\sqrt{\text{س}}}$ − $\frac{\text{ظا}(\sqrt{\text{س}})}{\sqrt{\text{س}}}$ دس

= ∫ (٢√س ظا√س)′ دس + ∫ (٢لوهـ(جتا√س))′ دس

= ٢√س ظا(√س) + ٢ لوهـ جتا(√س) + جـ

• 2021 دور ثاني / جد ∫ ٢س لوهـ(س²+١) دس

الحل / فرض ثم أجزاء:

نفرض ص = ١ + س² $\Leftarrow$ ٢س دس = دص

$\Leftarrow$ ∫ لوهـ ص دص "أجزاء"

لوهـ ص = هـ ، دص = دع

$\frac{1}{\text{ص}}$ دص = دهـ ، ص = ع

$\Leftarrow$ ∫ لوهـ ص دص = ص لوهـ ص − ∫ دص = ص لوهـ ص − ص + جـ

= (س²+١) لوهـ(س²+١) − (س²+١) + جـ

= (س²+١) لوهـ(س²+١) − س² + جـ

أو: ∫ لوهـ ص دص = ∫ لوهـ ص + ١ − ١ دص = ∫ (لوهـ(ص)+١) − ∫ دص

= ∫ (ص لوهـ ص)′ دص − ص + جـ

= ص لوهـ ص − ص + جـ

طريقة (٢)/ "أجزاء مباشرة"

لوهـ(س²+١) = هـ ، ٢س دس = دع

$\frac{\text{٢س}}{\text{س}^2+1}$ دس = دهـ ، ع = س²

$\int ٢س لوـهـ(س^٢+١) دس = س^٢ لوـهـ(س^٢+١) - \int \frac{٢س^٣}{س^٢+١} دس$

طريقة (٢): قسمة طويلة

$= س^٢ لوـهـ(س^٢+١) - \int \frac{٢س^٣ + ٢س - ٢س}{س^٢+١} دس$

$= س^٢ لوـهـ(س^٢+١) - \int \frac{٢س(س^٢+١) - ٢س}{س^٢+١} دس$

$= س^٢ لوـهـ(س^٢+١) - \int \frac{\cancel{(س^٢+١)}٢س}{\cancel{س^٢+١}} - \frac{٢س}{س^٢+١} دس$

$= س^٢ لوـهـ(س^٢+١) - س^٢ + لوـهـ(س^٢+١) + جـ$

$٢س^٣ \div (س^٢+١) = ٢س$، $٢س^٣ + ٢س$، الباقي $-٢س$

$\int \frac{٢س^٣}{س^٢+١} دس = \int ٢س - \frac{٢س}{س^٢+١} دس$

$= س^٢ - لوـهـ(س^٢+١) + جـ$

طريقة (٣):

$\int ٢س لوـهـ(س^٢+١) دس = \int ٢س لوـهـ(س^٢+١) + ٢س - ٢س دس$

$= \int ٢س لوـهـ(س^٢+١) + ٢س دس - \int ٢س دس$

$= \int \left((س^٢+١) لوـهـ(س^٢+١)\right)' دس - س^٢ + جـ$

$= (س^٢+١) لوـهـ(س^٢+١) - س^٢ + جـ$

- 2021 دورثالث / $\int جا(\sqrt{س+٢}) دس$

الحل / نفرض $ص = \sqrt{س+٢} \Leftarrow ص^٢ = س+٢$

$دس = ٢ص دص$

$\Leftarrow \int جا(ص) \times ٢ص دص = \int ٢ص جاص دص$ " أجزاء "

$ق = ٢ص$ ، $دع = جاص دص$

$دق = ٢دص$ ، $ع = -جتاص$

$\Leftarrow \int ٢ص جاص دص = -٢ص جتاص + \int ٢جتاص دص$

$= -٢ص جتاص + ٢جاص + جـ$

$= -٢\sqrt{س+٢} جتا(\sqrt{س+٢}) + ٢جا(\sqrt{س+٢}) + جـ$

طريقة (٢):

$\int جا(\sqrt{س+٢}) دس = \int جا(\sqrt{س+٢}) \times \frac{\sqrt{س+٢}}{\sqrt{س+٢}} - \frac{جتا(\sqrt{س+٢})}{\sqrt{س+٢}} + \frac{جتا(\sqrt{س+٢})}{\sqrt{س+٢}} دس$

$= \int \left(-٢\sqrt{س+٢} جتا\sqrt{س+٢}\right) دس + \int \left(٢جا(\sqrt{س+٢})\right)' دس$

$$= -٢\sqrt{س+٢}\ جتا\sqrt{س+٢} + ٢جا\sqrt{س+٢} + جـ$$

• 2021 دور ثالث/ جد $\int ٤(س^{٧}+٣س^{٣})\, هـ^{س^{٤}+٣}\, دس$

الحل/ $\int ٤(س^{٧}+٣س^{٣})\, هـ^{(س^{٤}+٣)}\, دس = \int ٤س^{٣}(س^{٤}+٣)\, هـ^{س^{٤}+٣}\, دس$

نفرض $ص = س^{٤}+٣$

$دص = ٤س^{٣}\, دس$

$\Leftarrow \int ص\, هـ^{ص}\, دص$ "أجزاء"

$ق = ص$ ، $دع = هـ^{ص}\, دص$

$دق = دص$ ، $ع = هـ^{ص}$

$$\int ص\, هـ^{ص}\, دص = ص\, هـ^{ص} - \int هـ^{ص}\, دص = ص\, هـ^{ص} - هـ^{ص} + جـ$$

$$= (س^{٤}+٣)\, هـ^{(س^{٤}+٣)} - هـ^{(س^{٤}+٣)} + جـ$$

طريقة (٢):

$$\int ٤(س^{٧}+٣س^{٣})\, هـ^{س^{٤}+٣}\, دس = \int ٤س^{٣}(س^{٤}+٣)\, هـ^{س^{٤}+٣} + ٤س^{٣}\, هـ^{(س^{٤}+٣)} - ٤س^{٣}\, هـ^{س^{٤}+٣}\, دس$$

$$= \int \left((س^{٤}+٣)\, هـ^{س^{٤}+٣}\right)'\, دس - \int ٤س^{٣}\, هـ^{س^{٤}+٣}\, دس$$

$$= (س^{٤}+٣)\, هـ^{س^{٤}+٣} - هـ^{س^{٤}+٣} + جـ$$

• 2022 دور أول/ جد $\int \left(\frac{لوهـ س}{س}\right)^{٢} دس$

الحل/

$ق = (لوهـ س)^{٢}$ ، $دع = \frac{١}{س^{٢}}\, دس$

$دق = \frac{٢لوهـ س}{س}\, دس$ ، $ع = \frac{-١}{س}$

$$ل = \int \left(\frac{لوهـ س}{س}\right)^{٢} دس = \frac{-١}{س}(لوهـ س)^{٢} + \int \frac{٢}{س^{٢}}\, لوهـ س\, دس$$

أجزاء مرة ثانية

$ق = ٢لوهـ س$ ، $دع = \frac{١}{س^{٢}}\, دس$

$دق = \frac{٢}{س}\, دس$ ، $ع = \frac{-١}{س}$

$$\Leftarrow ل = \frac{-١}{س}(لوهـ س)^{٢} - \frac{٢}{س}\, لوهـ س + \int \frac{٢}{س} \times \frac{١}{س}\, دس$$

$$= \frac{-١}{س}(لوهـ س)^{٢} - \frac{٢}{س}\, لوهـ س - \frac{٢}{س} + جـ$$

طريقة (٢) :

$$\int \left(\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢} \text{دس} = \int \left(\left(\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢} - \frac{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^{٢}} + \frac{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^{٢}} - \frac{٢}{\text{س}^{٢}} + \frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right) \text{دس}$$

$$= \int \left(\left(\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢} - \frac{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^{٢}}\right) \text{دس} + \int \left(\frac{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^{٢}} - \frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right) \text{دس} + \int \frac{٢}{\text{س}^{٢}} \text{دس}$$

$$= \int \left(\frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}}{-\text{س}}\right)' \text{دس} + \int \left(\frac{-٢}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)' \text{دس} - \frac{٢}{\text{س}} + \text{جـ}$$

$$= -\frac{١}{\text{س}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - \frac{٢}{\text{س}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) - \frac{٢}{\text{س}} + \text{جـ}$$

• 2023 دور أول/ جد $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$

الحل/

$$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{\frac{١}{٢}} \text{دس} = \int \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس}$$

$$\frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = \text{ق} \qquad \text{دع} = \text{دس}$$

$$\frac{١}{٢\text{س}}\text{دس} = \text{دق} \qquad \text{ع} = \text{س}$$

$$\Leftarrow \int \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}\ \text{دس} = \frac{١}{٢}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{١}{٢\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}}\ \text{دس} = \frac{١}{٢}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س} + \text{جـ}$$

طريقة (٢) :

$$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}\ \text{دس} = \int \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس} = \int \left(\frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\right) \text{دس}$$

$$= \int \left(\frac{١}{٢}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)' \text{دس} - \int \frac{١}{٢} \text{دس}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س} + \text{جـ}$$

• 2023 دور ثاني/ إذا كانت $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+\text{هـ}}$ وكان منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (٠، ٣)

جد كلاً مما يلي :

١/ قاعدة الاقتران ق(س) ٢/ $\int ٤\text{س}\,\text{ق}(\text{س})\ \text{دس}$.

الحل/ ① $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+\text{هـ}} \Leftarrow \int \text{قَ}(\text{س})\ \text{دس} = \int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+\text{هـ}}\ \text{دس}$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}+\text{هـ}| + \text{جـ}$ ، $\text{س}^{٢}+\text{هـ} > ٠$ دائماً فلا داعي للقيمة المطلقة

ق يمر بـ (٠، ٣) $\Leftarrow \text{ق}(٠) = ٣ \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} + \text{جـ} = ٣ \Leftarrow ١ + \text{جـ} = ٣ \Leftarrow \text{جـ} = ٢$

$$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}+\text{هـ}) + ٢$$

٣/ $\int ٤س\, ق(س)\, دس = \int ٤س \left(لو_{هـ}(س^2+هـ) + ٢\right) دس = \int ٤س\, لو_{هـ}(س^2+هـ)\, دس + ٨س\, دس$

$\Leftarrow$ $ل = \underbrace{\int ٤س\, لو_{هـ}(س^2+هـ)\, دس}_{ل_1} + \int ٨س\, دس$

* $ل_1 = \int ٤س\, لو_{هـ}(س^2+هـ)\, دس$ "أجزاء"

$لو_{هـ}(س^2+هـ) = ق$ $\quad$ $٤س\, دس = دع$

$\frac{٢س}{س^2+هـ} دس = دق$ $\quad$ $٢س^2 = ع$

$\Leftarrow$ $ل_1 = ٢س^2 لو_{هـ}(س^2+هـ) - \int \frac{٤س^3}{س^2+هـ} دس$

$ل_1 = ٢س^2 لو_{هـ}(س^2+هـ) - \int \frac{٤س^3 + ٤س هـ - ٤س هـ}{س^2+هـ} دس$

$ل_1 = ٢س^2 لو_{هـ}(س^2+هـ) - \int \frac{٤س(س^2+هـ) - ٤س هـ}{س^2+هـ} دس$

$ل_1 = ٢س^2 لو_{هـ}(س^2+هـ) - \left(\int \frac{٤س(س^2+هـ)}{س^2+هـ} دس - \int \frac{٤س هـ}{س^2+هـ} دس\right)$

$ل_1 = ٢س^2 لو_{هـ}(س^2+هـ) - \int ٤س\, دس + \int \frac{٤هـ س}{س^2+هـ} دس$

$ل_1 = ٢س^2 لو_{هـ}(س^2+هـ) - ٢س^2 + ٢هـ\, لو_{هـ}(س^2+هـ)$

$\Leftarrow$ $ل = ٢س^2 لو_{هـ}(س^2+هـ) - ٢س^2 + ٢هـ\, لو_{هـ}(س^2+هـ) + ٤س^2 + جـ$

$ل = ٢س^2 لو_{هـ}(س^2+هـ) + ٢س^2 + ٢هـ\, لو_{هـ}(س^2+هـ) + جـ$

طريقة (٢):
* باستخدام القسمة الطويلة:

$٤س^3 \div (س^2+هـ) = ٤س$

$-(٤س^3 + ٤س هـ)$

$= -٤س هـ$

$\Leftarrow$ $\int \frac{٤س^3}{س^2+هـ} دس = \int ٤س\, دس + \int \frac{-٤س هـ}{س^2+هـ} دس$

$= ٢س^2 - ٢هـ \int \frac{٢س}{س^2+هـ} دس$

$= ٢س^2 - ٢هـ\, لو_{هـ}(س^2+هـ)$

طريقة (٣): $ل_1 = \int ٤س\, لو_{هـ}(س^2+هـ)\, دس$

نفرض $س^2+هـ = ص$ $\Leftarrow$ $٢س\, دس = دص$ $\Leftarrow$ $دس = \frac{دص}{٢س}$

$\Leftarrow$ $ل_1 = \int ٤س\, لو_{هـ}(ص) \times \frac{دص}{٢س} = \int ٢لو_{هـ} ص\, دص$ "أجزاء"

$٢لو_{هـ} ص = ق$ $\quad$ $دص = دع$

$\frac{٢}{ص} دص = دق$ $\quad$ $ص = ع$

طريقة (٣):

$\int لو_{هـ} ص\, دص$

$= \int لو_{هـ} ص + ١ - ١\, دص$

$= \int (ص\, لو_{هـ} ص)\, دص - \int ١\, دص$

$= ص\, لو_{هـ} ص - ص + جـ$

م١ = ٢ص لوهـ ص − ∫ ٢/ص × ~~ص~~ دص = ٢ص لوهـ ص − ٢ص + ج

= ٢(س² + هـ) لوهـ(س² + هـ) − ٢(س² + هـ) + ج

طريقة (٣): م١ = ∫ ٤س لوهـ(س² + هـ) دس

م١ = ∫ ٤س لوهـ(س² + هـ) + ٤س³/(س² + هـ) − ٤س³/(س² + هـ) دس

م١ = ∫ (٢س² لوهـ(س² + هـ))′ دس − ∫ ٤س³/(س² + هـ)

تم إيجادها بالتفصيل في طريقة (١)

م١ = ٢س² لوهـ(س² + هـ) + −٢س² + ٢هـ لوهـ(س² + هـ) + ج

• 2023 دورة ثالثة / جد ∫ جا(√(٥س + ١)) دس

الحل / * نفرض (ص = √(٥س + ١)) ⟸ ص² = ٥س + ١

٢ص دص = ٥ دس ⟸ ٢/٥ ص دص = دس

⟸ ∫ جا(√(٥س + ١)) دس = ∫ جا(ص) × ٢/٥ ص دص = ∫ ٢/٥ ص جا(ص) دص

٢/٥ ص = ق ، جا ص دص = دع

٢/٥ دص = دق ، ع = −جتا ص

∫ ٢/٥ ص جا ص دص = −٢/٥ ص جتا ص + ∫ ٢/٥ جتا ص دص

= −٢/٥ ص جتا ص + ٢/٥ جا ص + ج

= −٢/٥ √(٥س + ١) جتا(√(٥س + ١)) + ٢/٥ جا(√(٥س + ١)) + ج

طريقة (٢):

∫ جا √(٥س + ١) دس = ∫ [جا(√(٥س + ١)) × √(٥س + ١)] / √(٥س + ١) + جتا(√(٥س + ١)) / √(٥س + ١) − جتا √(٥س + ١) / √(٥س + ١) دس

= ∫ (−٢/٥ √(٥س + ١) جتا √(٥س + ١))′ دس + ∫ جتا √(٥س + ١) / √(٥س + ١) دس

= −٢/٥ √(٥س + ١) جتا √(٥س + ١) + ∫ (٢/٥ جا(√(٥س + ١)))′ دس

= −٢/٥ √(٥س + ١) جتا √(٥س + ١) + ٢/٥ جا(√(٥س + ١)) + ج

.. ابدأ يومك بصلاة الفجر، فمن كان في ذمة الله كان التوفيق حليفه في كل شؤونه ..

• 2024 دورثاني / جد $\int \frac{لو_{هـ}(قتاس)}{جا^2س}$ ءس ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[

الحل / $\int \frac{لو_{هـ}(قتاس)}{جا^2س}$ ءس = $\int$ قتا²س لوهـ قتاس ءس "أجزاء"

لوهـ(قتاس) = هـ   قتا²س ءس = ءع

$\frac{-جاس}{قتاس}$ ءس = ءهـ   −ظتاس = ع

$\int$ قتا²س لوهـ(قتاس) ءس = −ظتاس لوهـ(قتاس) + $\int -\frac{جاس}{قتاس}$ × ظتاس ءس

= −ظتاس لوهـ(قتاس) − $\int$ ظتاس × ظتاس ءس

= −ظتاس لوهـ(قتاس) − س + جـ

• طريقة (٢) : $\int$ قتا²س لوهـ قتاس ءس = $\int$ قتا²س لوهـ قتاس + ١ − ١ ءس

= $\int$ قتا²س لوهـ قتاس + ظتاس ظتاس ءس − $\int$ ١ ءس

= $\int$ (−ظتاس لوهـ(قتاس))′ ءس − س + جـ

= −ظتاس لوهـ(قتاس) − س + جـ

• 2025 دورثاني / جسم يتحرك وفق القاعدة ف(ن) التي تمثل المسافة التي يبتعدها الجسم بعد (ن) دقيقة عن نقطة ثابتة ، فإذا كانت سرعة الجسم (ع) بعد (ن) دقيقة تعطى بالقاعدة ع(ن) = ٣أن + لوهـ(ن+١) حيث أ من الثوابت ، جد قيمة الثابت أ علماً أنه قطع مسافة ٨ أمتار خلال دقيقة واحدة وقطع مسافة (٢٢ + ٦ لوهـ٢) مترًا خلال أول (٣) دقائق من بدء الحركة .

الحل / ف(١) = ٨ ، ف(٣) = ٢٢ + ٦ لوهـ٢

ع(ن) = ٣أن + لوهـ(ن+١)

ف = $\int$ ٣أن + لوهـ(ن+١) ءن

ف = $\int$ ٣أن ءن + $\underbrace{\int لو_{هـ}(ن+١)\, ءن}_{أجزاء}$ = أن² + $\int$ لوهـ(ن+١) ءن

لوهـ(ن+١) = هـ   ءن = ءع

$\frac{1}{ن+1}$ ءن = ءهـ   ن = ع

ف = أن² + ن لوهـ(ن+١) − ∫ (ن/(ن+١)) ءن

ف = أن² + ن لوهـ(ن+١) − ∫ ((ن+١−١)/(ن+١)) ءن

ف = أن² + ن لوهـ(ن+١) − ∫ ((ن+١)/(ن+١) − ١/(ن+١)) ءن

ف = أن² + ن لوهـ(ن+١) − ∫ (١ − ١/(ن+١)) ءن

ف = أن² + ن لوهـ(ن+١) − (ن − لوهـ(ن+١)) + جـ

ف = أن² + ن لوهـ(ن+١) − ن + لوهـ(ن+١) + جـ

طريقة ثانية: باستخدام القسمة الطويلة

ن ÷ (ن+١): الناتج ١ ، − (ن+١) ، الباقي −١

∫ (ن/(ن+١)) ءن = ∫ (١ + (−١)/(ن+١)) ءن

= ن − لوهـ(ن+١) + جـ

ف = أن² + (ن+١)لوهـ(ن+١) − ن + جـ

ف(١) = أ + ٢لوهـ٢ − ١ + جـ = ٨ ⟸ أ + جـ = ٩ − ٢لوهـ٢ ← معادلة (١)

ف(٣) = ٩أ + ٤لوهـ٤ − ٣ + جـ = ٢٢ + ٦لوهـ٢

٩أ + ٤×٢لوهـ٢ + جـ = ٢٥ + ٦لوهـ٢

٩أ + ٨لوهـ٢ + جـ = ٢٥ + ٦لوهـ٢ ⟸ ٩أ + جـ = ٢٥ − ٢لوهـ٢ ← معادلة (٢)

معادلة (٢) − معادلة (١) ⟸ ٨أ/٨ = ١٦/٨ ⟸ أ = ٢

• طلاب/ 2024 إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة تقع عليه يعطى بالقاعدة (س²/لوهـ س) جد معادلة ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطة (١، ٢)

الحل/ ميل المماس = ق′(س) = −١/ميل العمودي ⟸ ق′(س) = −لوهـ س/س²

∫ ق′(س) ءس = ∫ (−١/س²) لوهـ س ءس ⟸ ق(س) = ∫ (−١/س²) لوهـ س ءس ← أجزاء

ص = لوهـ س ، ءص = (١/س) ءس

ءع = (−١/س²) ءس ، ع = ١/س

ق(س) = (١/س) لوهـ س + ∫ (−١/س²) ءس ⟸ ق(س) = (١/س) لوهـ س + ١/س + جـ

ق(س) يمر بالنقطة (١، ٢) ⟸ ق(١) = ٢ ⟸ ق(١) = لوهـ١ + ١ + جـ ⟸ ٢ = ١ + جـ ⟸ جـ = ١

← $ق(س) = \frac{1}{س} لو_هـ س + \frac{1}{س} + 1$

طريقة (٢) : $\int \frac{-1}{س^2} لو_هـ س \, دس = \int \frac{-1}{س^2} لو_هـ س + \frac{1}{س^2} - \frac{1}{س^2} \, دس$

$ق(س) = \int \frac{-1}{س^2} لو_هـ س + \frac{1}{س^2} \, دس + \int \frac{-1}{س^2} \, دس$

$ق(س) = \int \left(\frac{1}{س} لو_هـ س\right)' دس + \frac{1}{س} + جـ$

$ق(س) = \frac{1}{س} لو_هـ س + \frac{1}{س} + جـ$ ثم نكمل ونجد جـ

• جنوب الخليل 2024 / جد $\int (لو_هـ \sqrt{س} \times \sqrt[3]{س}) \, دس$

الحل/

$\int لو_هـ \sqrt{س} \times \sqrt[3]{س} \, دس = \int س^{\frac{1}{3}} \times لو_هـ س^{\frac{1}{2}} \, دس = \int \frac{1}{2} س^{\frac{1}{3}} لو_هـ س \, دس$

$\frac{1}{2} لو_هـ س = ق \qquad دع = س^{\frac{1}{3}} دس$

$\frac{1}{2س} دس = دق \qquad ع = \frac{3}{4} س^{\frac{4}{3}}$

⇐ $\int \frac{1}{2} س^{\frac{1}{3}} لو_هـ س \, دس = \frac{3}{8} س^{\frac{4}{3}} لو_هـ س - \int \frac{3}{8} \times \frac{س^{\frac{4}{3}}}{س} \, دس$

$= \frac{3}{8} س^{\frac{4}{3}} لو_هـ س - \int \frac{3}{8} س^{\frac{1}{3}} \, دس$

$= \frac{3}{8} س^{\frac{4}{3}} لو_هـ س - \frac{3}{8} \times \frac{3}{4} س^{\frac{4}{3}} + جـ$

$= \frac{3}{8} س^{\frac{4}{3}} لو_هـ س - \frac{9}{32} س^{\frac{4}{3}} + جـ$

طريقة (٢) :

$ل = \int \frac{1}{2} س^{\frac{1}{3}} لو_هـ س \, دس$

$ل = \int \frac{س^{\frac{1}{3}}}{2} لو_هـ س + \frac{3}{8} س^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{8} س^{\frac{1}{3}} \, دس$

$= \int \left(\frac{3}{8} س^{\frac{4}{3}} لو_هـ س\right)' دس - \int \frac{3}{8} س^{\frac{1}{3}} \, دس$

$= \frac{3}{8} س^{\frac{4}{3}} لو_هـ س - \frac{9}{32} س^{\frac{4}{3}} + جـ$

• جنوب الخليل 2024 / جد $\int هـ^{(لو_هـ س + 1)} لو_هـ س \, دس$

الحل/ $هـ^{(لو_هـ س + 1)} = هـ^{لو_هـ س} \times هـ^{1} = س \times هـ = هـ س$

⇐ $\int هـ س \, لو_هـ س \, دس = ل$

$لو_هـ س = ق \qquad دع = هـ س \, دس$

$\frac{1}{س} دس = دق \qquad ع = \frac{هـ}{2} س^2$

$ل = \frac{هـ}{2} س^2 لو_هـ س - \int \frac{هـ}{2} س \, دس$ ⇐ $ل = \frac{هـ}{2} س^2 لو_هـ س - \frac{هـ}{2} \times \frac{س^2}{2} + جـ$

$ل = \frac{هـ}{2} س^2 لو_هـ س - \frac{هـ}{4} س^2 + جـ$

طريقة (٢): * ∫ هـ س لوهـ س دس = ∫ هـ س لوهـ س + $\frac{هـ}{٢}$ س − $\frac{هـ}{٢}$ س دس

= ∫ ($\frac{هـ}{٢}$ س² لوهـ س)′ دس − ∫ $\frac{هـ}{٢}$ س دس

= $\frac{هـ}{٢}$ س² لوهـ س − $\frac{هـ}{٤}$ س² + جـ

• نابلس 2024/ جد ∫ هـ^س (ظاس + لوهـ قاس) دس

الحل

ل = ∫ هـ^س (ظاس + لوهـ قاس) دس = ∫ هـ^س ظاس + هـ^س لوهـ قاس دس = ∫ (هـ^س لوهـ قاس)′ دس

= هـ^س لوهـ(قاس) + جـ

طريقة (٢):

ل = ∫ هـ^س ظاس دس + $\underbrace{∫ هـ^س لوهـ قاس دس}_{ل١}$

ص = لوهـ قاس ، دص = $\frac{قاس ظاس}{قاس}$ دس

دع = هـ^س دس ، ع = هـ^س

ل = هـ^س لوهـ قاس − $\cancel{∫ هـ^س ظاس دس}$ + $\cancel{∫ هـ^س ظاس دس}$

ل = هـ^س لوهـ قاس + جـ

طريقة (٣):

ل = $\underbrace{∫ هـ^س ظاس دس}_{ل١}$ + ∫ هـ^س لوهـ قاس دس

ص = هـ^س ، دص = هـ^س دس

دع = ظاس دس ، ع = −لوهـ جتاس

ع = لوهـ جتا$^{-1}$س = لوهـ($\frac{1}{جتاس}$)

ع = لوهـ قاس

ل = هـ^س لوهـ قاس − $\cancel{∫ هـ^س لوهـ قاس دس}$ + $\cancel{∫ هـ^س لوهـ قاس دس}$

ل = هـ^س لوهـ(قاس) + جـ

• سلفيت 2024/ جد ∫ س ظا²س دس

الحل

∫ س ظا²س دس = ∫ س (قا²س − 1) دس = ∫ س قا²س دس − ∫ س دس

ل = $\underbrace{∫ س قا²س دس}_{ل١}$ − $\frac{س^2}{٢}$ + جـ

ل١ = ∫ س قا²س دس

ص = س ، دص = دس

دع = قا²س دس ، ع = ظاس

ل = س ظاس − ∫ ظاس دس + −$\frac{س^2}{٢}$ + جـ = س ظاس + لوهـ|جتاس| − $\frac{س^2}{٢}$ + جـ

طريقة (٢):

$ل_1 = \int س\ قا^2س\ ءس = \int س\ قا^2س + ظاس - ظاس\ ءس$

$ل_1 = \int (س\ قا^2س + ظاس)\ ءس - \int ظاس\ ءس$

$ل_1 = \int (س\ ظاس)'\ ءس + \int \frac{-جاس}{جتاس}\ ءس$

$ل_1 = س\ ظاس + لو|جتاس| + ج$

• فلقلية 2025 / إذا علمت أن $ق(س) = س\ ق'(س) + هـ^س\ ق^2(س)$ ، $ق(س) \neq 0$ ، $ق(-1) = -هـ$

جد $ق(1)$

الحل/

$ق(س) = س\ ق'(س) + هـ^س\ ق^2(س)$

$ق(س) - س\ ق'(س) = هـ^س\ ق^2(س)$

$\frac{ق(س) - س\ ق'(س)}{ق^2(س)} = هـ^س$ أخذ التكامل للطرفين ،

$\int \frac{ق(س) - س\ ق'(س)}{ق^2(س)}\ ءس = \int هـ^س\ ءس$ ——— **

$\int \left(\frac{س}{ق(س)}\right)'\ ءس = هـ^س + ج \Leftarrow \frac{س}{ق(س)} = هـ^س + ج$

$\Leftarrow \frac{-1}{ق(-1)} = هـ^{-1} + ج \Leftarrow \cancel{\frac{-1}{-هـ}} = \cancel{\frac{1}{هـ}} + ج \Leftarrow ج = صفر$

$\Leftarrow \frac{س}{ق(س)} = هـ^س \Leftarrow \frac{1}{ق(1)} = هـ \Leftarrow هـ\ ق(1) = 1 \Leftarrow ق(1) = \frac{1}{هـ}$

طريقة (٢): من ** $\Leftarrow \int \frac{ق(س)}{ق^2(س)} - \frac{س\ ق'(س)}{ق^2(س)}\ ءس = \int هـ^س\ ءس$

$\int \underbrace{\frac{1}{ق(س)}}_{ل_1} - \frac{س\ ق'(س)}{ق^2(س)}\ ءس = هـ^س + ج$ ——— (١)

$ص = \frac{1}{ق(س)}$ ، $ءس = ءع$

$ءص = \frac{-ق'(س)}{ق^2(س)}\ ءس$ ، $ع = س$

بالتعويض في (١) $\Leftarrow \frac{س}{ق(س)} + \int \cancel{\frac{س\ ق'(س)}{ق^2(س)}}\ ءس - \int \cancel{\frac{س\ ق'(س)}{ق^2(س)}}\ ءس = هـ^س + ج$

$\frac{س}{ق(س)} = هـ^س + ج$ ثم نكمل بنفس الطريقة.

طريقة (٣)/ $\int \frac{1}{ق(س)} ءس + \int \frac{-س ق'(س)}{ق^٢(س)} ءس = \frac{س}{هـ} + جـ$ — (١)

ل = $\int \frac{-س ق'(س)}{ق^٢(س)} ءس$

س = ق ، $\frac{-ق'(س)}{ق^٢(س)} ءس = ءع$

ءس = ءق ، ع = $\frac{1}{ق(س)}$

بالتعويض في (١) ⇐ $\frac{س}{ق(س)} - \int \frac{1}{ق(س)} ءس + \cancel{\int \frac{1}{ق(س)} ءس} = \frac{س}{هـ} + جـ$

$\frac{س}{ق(س)} = \frac{س}{هـ} + جـ$ ثم نكمل نفس الطريقة.

• نابلس 2025 / اذا كان م(س) اقتران أصلي للاقتران المتصل ق(س) ، أثبت باستخدام التكامل أن $\int ق(\sqrt{س}) ءس = ٢\sqrt{س} ق(\sqrt{س}) - ٢م(\sqrt{س}) + جـ$

الحل/ $\int ق(\sqrt{س}) ءس = ل$

نفرض $\sqrt{س} = ص$ ⇐ $س = ص^٢$ ⇐ $ءس = ٢ص ءص$

⇐ ل = $\int ق(ص) \times ٢ص ءص$ أجزاء

٢ص = ق ، $ق(ص) ءص = ءع$

$٢ءص = ءق$ ، $ع = م(ص)$

على الهامش: بما أن م(س) اقتران أصلي لـ ق(س)
⇐ م'(س) = ق(س)
⇐ $\int ق(س) ءس = م(س)$

ل = $٢ص م(ص) - \int ٢ م(ص) ءص$

ل = $٢ص م(ص) - ٢م(ص) + جـ$

ل = $٢\sqrt{س} م(\sqrt{س}) - ٢م(\sqrt{س}) + جـ$

طريقة (٢): ل = $\int ق(\sqrt{س}) ءس$

ل = $\int ق(\sqrt{س}) + \frac{م(\sqrt{س})}{\sqrt{س}} - \frac{م(\sqrt{س})}{\sqrt{س}} ءس$

ل = $\int (٢\sqrt{س} م(\sqrt{س}))' ءس - \int \frac{م(\sqrt{س})}{\sqrt{س}} ءس$

= $٢\sqrt{س} م(\sqrt{س}) - \int \frac{م(\sqrt{س})}{\sqrt{س}} ءس$

ل = $٢\sqrt{س} م(\sqrt{س}) - \int (٢م(\sqrt{س}))' ءس = ٢\sqrt{س} م(\sqrt{س}) - ٢م(\sqrt{س}) + جـ$

• خارجي / $\int \text{جتا}(2\text{س})\ \text{هـ}^{(\text{جتاس} - \text{جاس})^2}\ \text{دس}$

الحل / $(\text{جتاس} - \text{جاس})^2 = \text{جتا}^2\text{س} - 2\text{جاس}\,\text{جتاس} + \text{جا}^2\text{س}$

$= 1 - \text{جا}(2\text{س})$

$\Leftarrow \int \text{جتا}(2\text{س})\ \text{هـ}^{1-\text{جا}(2\text{س})}\ \text{دس} = \int \left(-\frac{1}{2}\text{هـ}^{1-\text{جا}(2\text{س})}\right)'\ \text{دس} = -\frac{1}{2}\text{هـ}^{(1-\text{جا}(2\text{س}))} + \text{جـ}$

طريقة (٢):

$\text{ل} = \int \text{جتا}(2\text{س})\ \text{هـ}^{(1-\text{جا}(2\text{س}))}\ \text{دس}$

نفرض $1 - \text{جا}(2\text{س}) = \text{ص}$

$-2\,\text{جتا}(2\text{س})\ \text{دس} = \text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-2\,\text{جتا}(2\text{س})}$

$\Leftarrow \text{ل} = \int \cancel{\text{جتا}(2\text{س})} \times \text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{-2\,\cancel{\text{جتا}(2\text{س})}} = \int -\frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص} = -\frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$\Leftarrow \text{ل} = -\frac{1}{2}\text{هـ}^{(1-\text{جا}(2\text{س}))} + \text{جـ}$

أسئلة للمهتمين — الدرس الرابع | طرق التكامل - التكامل بالأجزاء

• حل التكاملات الآتية:

١/ $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}}\right)\,\text{دس}$

الحل/ $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}}\right)\text{دس} = \int \cancel{\text{لو}_{\text{هـ}}}\text{هـ}^{\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \int \text{س}\,\text{دس} - \underbrace{\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}}_{\text{أجزاء}} = \text{ل}$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{دع} = \text{دس}$

$\text{دق} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} \qquad \text{ع} = \text{س}$

$\text{ل} = \frac{1}{2}\text{س}^2 - \left(\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{1}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}}\,\text{دس}\right) + \text{جـ}$

$\text{ل} = \frac{1}{2}\text{س}^2 - \left(\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}\right) + \text{جـ} \Leftarrow \text{ل} = \frac{1}{2}\text{س}^2 - \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س} + \text{جـ}$

طريقة (٢): $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + 1 - 1\,\text{دس} = \int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + 1)\,\text{دس} - \int 1\,\text{دس}$

$= \int (\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})'\,\text{دس} - \text{س} + \text{جـ}$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س} + \text{جـ}$

٢/ $\int (\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2\,\text{دس}$

الحل/ $\int (\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2\,\text{دس} = \int \text{س}^2 (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2\,\text{دس}$

$\text{ق} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \qquad \text{دع} = \text{س}^2\,\text{دس}$

$\text{دق} = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} \qquad \text{ع} = \frac{1}{3}\text{س}^3$

$\text{ل} = \frac{1}{3}\text{س}^3 (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \int \frac{2}{3}\text{س}^2 (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ق} = \frac{2}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{دع} = \text{س}^2\,\text{دس}$

$\text{دق} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} \qquad \text{ع} = \frac{\text{س}^3}{3}$

$\text{ل} = \frac{1}{3}\text{س}^3 (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \left(\frac{2\text{س}^3}{9}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{2}{9}\text{س}^2\,\text{دس}\right) + \text{جـ}$

$\text{ل} = \frac{1}{3}\text{س}^3 (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \frac{2\text{س}^3}{9}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{2}{9} \times \frac{\text{س}^3}{3} + \text{جـ}$

$\text{ل} = \frac{1}{3}\text{س}^3 (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \frac{2}{9}\text{س}^3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{2}{27}\text{س}^3 + \text{جـ}$

٣/ $\int \frac{1}{\text{لوس}} - \frac{1}{(\text{لوس})^{2}}\ \text{دس}$

الحل/ $\text{ل} = \int \frac{1}{\text{لوس}}\ \text{دس} - \int \frac{1}{(\text{لوس})^{2}}\ \text{دس}$

* $\int \frac{1}{(\text{لوس})}\ \text{دس} = \int (\text{لوس})^{-1}\ \text{دس}$ "أجزاء"

$\text{ق} = (\text{لوس})^{-1} \qquad \text{دع} = \text{دس}$

$\text{دق} = -(\text{لوس})^{-2} \times \frac{1}{\text{س}}\ \text{دس} \qquad \text{ع} = \text{س}$

$\Leftarrow \text{ل} = \text{س}(\text{لوس})^{-1} + \int (\text{لوس})^{-2} \times \cancel{\frac{1}{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}}\ \text{دس} - \int \frac{1}{(\text{لوس})^{2}}\ \text{دس}$

$\text{ل} = \frac{\text{س}}{\text{لوس}} + \cancel{\int \frac{1}{(\text{لوس})^{2}}\ \text{دس}} - \cancel{\int \frac{1}{(\text{لوس})^{2}}\ \text{دس}}$

$\boxed{\text{ل} = \frac{\text{س}}{\text{لوس}} + \text{جـ}}$

طريقة (٢): $\text{ل} = \int \frac{1}{\text{لوس}} - \frac{1}{(\text{لوس})^{2}}\ \text{دس} \Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\text{لوس} - 1}{(\text{لوس})^{2}}\ \text{دس}$

توحيد مقامات

$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\text{لوس} \times 1 - \frac{1}{\text{س}} \times \text{س}}{(\text{لوس})^{2}}\ \text{دس} = \int \left(\frac{\text{س}}{\text{لوس}}\right)'\ \text{دس}$

$\boxed{\text{ل} = \frac{\text{س}}{\text{لوس}} + \text{جـ}}$

الدرس الرابع التكامل بالكسور الجزئية

• القسم الثاني : أجب عن الأسئلة التالية :

• ٢٠٠٧ دراسات / جد $\int \frac{\text{٢س}+٤}{\text{س}^٢-\text{٢س}}\,\text{دس}$

الحل /

$$* \int \frac{\text{٢س}+٤}{\text{س}(\text{س}-٢)}\,\text{دس} = \int \frac{\text{أ}}{\text{س}}\,\text{دس} + \int \frac{\text{ب}}{\text{س}-٢}\,\text{دس} = \text{ل}$$

$$\frac{\text{٢س}+٤}{\text{س}(\text{س}-٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-٢} \Leftarrow \frac{\text{٢س}+٤}{\text{س}(\text{س}-٢)} = \frac{\text{أ}(\text{س}-٢)+\text{ب س}}{\text{س}(\text{س}-٢)}$$

$$\Leftarrow \text{٢س}+٤ = \text{أ}(\text{س}-٢)+\text{ب س}$$

• عندما س = ٢ / $٢\times٢+٤ = \text{أ}(٢-٢)+\text{٢ب} \Leftarrow \frac{٨}{٢} = \frac{\text{٢ب}}{٢} \Leftarrow \text{ب} = ٤$

• عندما س = صفر / $٢\times٠+٤ = \text{أ}(٠-٢)+\text{ب}\times٠ \Leftarrow ٤ = -\text{٢أ} \Leftarrow \text{أ} = -٢$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{-٢}{\text{س}}\,\text{دس} + \int \frac{٤}{\text{س}-٢}\,\text{دس} = -٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٢| + \text{جـ}$$

طريقة (٢) :

$$\int \frac{\text{٢س}+٤}{\text{س}^٢-\text{٢س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{٤س}-\text{٢س}+٤}{\text{س}^٢-\text{٢س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{٤س}+(-\text{٢س}+٤)}{\text{س}(\text{س}-٢)}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{٤س}-٢(\text{س}-٢)}{\text{س}(\text{س}-٢)}\,\text{دس} = \int \frac{\text{٤}\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}(\text{س}-٢)}\,\text{دس} + \int \frac{-٢\cancel{(\text{س}-٢)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}-٢)}}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{٤}{\text{س}-٢}\,\text{دس} + \int \frac{-٢}{\text{س}}\,\text{دس} = ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٢| - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$$

• ٢٠٠٧ إكمال / جد $\int \frac{\text{س}+٣}{\text{س}^٢+\text{٣س}+٢}\,\text{دس}$

الحل /

$$* \frac{\text{س}+٣}{\text{س}^٢+\text{٣س}+٢} = \frac{\text{س}+٣}{(\text{س}+١)(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}+١} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+٢}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{س}+٣}{(\text{س}+١)(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}(\text{س}+٢)+\text{ب}(\text{س}+١)}{(\text{س}+١)(\text{س}+٢)}$$

$$\Leftarrow \text{س}+٣ = \text{أ}(\text{س}+٢)+\text{ب}(\text{س}+١)$$

• عندما س = −١ $\Leftarrow -١+٣ = \text{أ}(-١+٢) \Leftarrow \text{أ} = ٢$

• عندما س = −٢ $\Leftarrow -٢+٣ = \text{ب}(-٢+١) \Leftarrow ١ = -\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -١$

$$\text{ل} = \int \frac{\text{س}+٣}{\text{س}^٢+\text{٣س}+٢}\,\text{دس} = \int \frac{٢}{\text{س}+١}\,\text{دس} + \int \frac{-١}{\text{س}+٢}\,\text{دس}$$

$$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢| + \text{جـ}$$

طريقة(٢)/ $ل = \int \frac{س+٣}{س^2+٣س+٢} ءس = \int \frac{٢س - س + ٤ - ١}{(س+١)(س+٢)} ءس = \int \frac{(٢س+٤) + (-س-١)}{(س+١)(س+٢)} ءس$

$\Leftarrow ل = \int \frac{-(س+١) + ٢(س+٢)}{(س+١)(س+٢)} ءس = \int \frac{-(س+١)}{(س+١)(س+٢)} ءس + \int \frac{٢(س+٢)}{(س+١)(س+٢)} ءس$

$\Leftarrow ل = \int \frac{-١}{س+٢} ءس + \int \frac{٢}{س+١} ءس = -لو_{هـ}|س+٢| + ٢لو_{هـ}|س+١| + جـ$

• 2008 / ص $\int \left(\frac{جاس جتاس}{جتا^2س - ٣جتاس + ٢} \right) ءس$

الحل/ نفرض $جتاس = ص \Leftarrow ءص = -جاس ءس \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{-جاس}$

$ل = \int \frac{جاس \times ص}{(ص^2 - ٣ص + ٢)} \times \frac{ءص}{-جاس} = \int \frac{-ص ءص}{ص^2 - ٣ص + ٢}$ "كسور جزئية"

* $\frac{-ص}{ص^2 - ٣ص + ٢} = \frac{-ص}{(ص-٢)(ص-١)} = \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص-١}$

$\Leftarrow \frac{-ص}{(ص-٢)(ص-١)} = \frac{أ(ص-١) + ب(ص-٢)}{(ص-٢)(ص-١)}$

$\Leftarrow -ص = أ(ص-١) + ب(ص-٢)$

• عندما $ص = ١ \Leftarrow -١ = ب(١-٢) \Leftarrow -١ = -ب \Leftarrow ب = ١$

• عندما $ص = ٢ \Leftarrow -٢ = أ(٢-١) \Leftarrow أ = -٢$

$\Leftarrow ل = \int \frac{-٢}{ص-٢} ءص + \int \frac{١}{ص-١} ءص = -٢لو_{هـ}|ص-٢| + لو_{هـ}|ص-١| + جـ$

$\Leftarrow ل = -٢لو_{هـ}|جتاس-٢| + لو_{هـ}|جتاس-١| + جـ$

طريقة(٢): $\int \frac{جاس جتاس}{جتا^2س - ٣جتاس + ٢} ءس = \int \frac{٢جاس جتاس - جاس جتاس - ٢جاس + ٢جاس}{(جتاس-٢)(جتاس-١)} ءس$

$ل = \int \frac{(٢جاس جتاس - ٢جاس) + (-جاس جتاس + ٢جاس)}{(جتاس-٢)(جتاس-١)} ءس$

$ل = \int \frac{٢جاس(جتاس-١) - جاس(جتاس-٢)}{(جتاس-٢)(جتاس-١)} ءس$

$ل = \int \frac{٢جاس(جتاس-١)}{(جتاس-٢)(جتاس-١)} ءس + \int \frac{-جاس(جتاس-٢)}{(جتاس-٢)(جتاس-١)} ءس$

$ل = \int \frac{٢جاس}{جتاس-٢} ءس + \int \frac{-جاس}{جتاس-١} ءس = -٢لو_{هـ}|جتاس-٢| + لو_{هـ}|جتاس-١| + جـ$

2008. إكمال/ جد $\int \frac{5\,\text{دس}}{\text{س} - \sqrt{\text{س}} - 6}$

الحل/ نفرض $(\sqrt{\text{س}} = \text{ص})^2 \Leftarrow \text{س} = \text{ص}^2 \Leftarrow \text{دس} = 2\text{ص}\,\text{دص}$

$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{5 \times 2\text{ص}\,\text{دص}}{\text{ص}^2 - \text{ص} - 6} = \int \frac{10\text{ص}\,\text{دص}}{(\text{ص}-3)(\text{ص}+2)}$

$* \quad \frac{10\text{ص}}{(\text{ص}-3)(\text{ص}+2)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-3} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+2}$

$\Leftarrow 10\text{ص} = \text{أ}(\text{ص}+2) + \text{ب}(\text{ص}-3)$

- عندما $\text{ص} = 3$ / $10 \times 3 = \text{أ}(3+2) \Leftarrow \frac{30}{5} = \frac{5\text{أ}}{5} \Leftarrow \text{أ} = 6$
- عندما $\text{ص} = -2$ / $10 \times -2 = \text{ب}(-2-3) \Leftarrow -20 = -5\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = 4$

$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{6}{\text{ص}-3}\,\text{دص} + \int \frac{4}{\text{ص}+2}\,\text{دص} = 6\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-3| + 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+2| + \text{جـ}$

$\Leftarrow \text{ل} = 6\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}}-3| + 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}}+2| + \text{جـ}$

طريقة(2):

$\int \frac{5\,\text{دس}}{\text{س} - \sqrt{\text{س}} - 6} = \int \frac{3+2}{(\sqrt{\text{س}})^2 - \sqrt{\text{س}} - 6}\,\text{دس} = \int \frac{3+2+\frac{6}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{6}{\sqrt{\text{س}}}}{(\sqrt{\text{س}}+2)(\sqrt{\text{س}}-3)}\,\text{دس}$

$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\left(3+\frac{6}{\sqrt{\text{س}}}\right) + \left(2-\frac{6}{\sqrt{\text{س}}}\right)}{(\sqrt{\text{س}}-3)(\sqrt{\text{س}}+2)}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \int \frac{\frac{6}{2\sqrt{\text{س}}}(\sqrt{\text{س}}+2) + \frac{4}{2\sqrt{\text{س}}}(\sqrt{\text{س}}-3)}{(\sqrt{\text{س}}-3)(\sqrt{\text{س}}+2)}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \int \frac{\frac{6}{2\sqrt{\text{س}}}(\sqrt{\text{س}}+2)}{(\sqrt{\text{س}}-3)(\sqrt{\text{س}}+2)}\,\text{دس} + \int \frac{\frac{4}{2\sqrt{\text{س}}}(\sqrt{\text{س}}-3)}{(\sqrt{\text{س}}-3)(\sqrt{\text{س}}+2)}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \int \frac{\frac{6}{2\sqrt{\text{س}}}}{(\sqrt{\text{س}}-3)}\,\text{دس} + \int \frac{\frac{4}{2\sqrt{\text{س}}}}{(\sqrt{\text{س}}+2)}\,\text{دس} = 6\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}}{\sqrt{\text{س}}-3}\,\text{دس} + 4\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}}{(\sqrt{\text{س}}+2)}\,\text{دس}$

$\Leftarrow \text{ل} = 6\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}}-3| + 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}}+2| + \text{جـ}$

2009. جد $\int \frac{\text{دس}}{\text{س} + 3\sqrt{\text{س}} + 2}$

الحل/ نفرض $(\sqrt{\text{س}} = \text{ص})^2 \Leftarrow \text{س} = \text{ص}^2 \Leftarrow \text{دس} = 2\text{ص}\,\text{دص}$

$\Leftarrow \int \frac{2\text{ص}\,\text{دص}}{\text{ص}^2 + 3\text{ص} + 2} = \int \frac{2\text{ص}}{(\text{ص}+2)(\text{ص}+1)}\,\text{دص} = \text{ل}$

* $\frac{2ص}{(ص+2)(ص+1)} = \frac{أ}{ص+2} + \frac{ب}{ص+1}$

$\Leftarrow 2ص = أ(ص+1) + ب(ص+2)$

• عندما $ص = -1 \Leftarrow -2 = ب(-1+2) \Leftarrow -2 = ب$

• عندما $ص = -2 \Leftarrow 2 \times -2 = أ(-2+1) \Leftarrow -4 = -أ \Leftarrow أ = 4$

$\Leftarrow ل = \int \frac{4}{ص+2}\, دص + \int \frac{-2}{ص+1}\, دص$

$ل = 4 لو_هـ |ص+2| - 2 لو_هـ |ص+1| + جـ$

$ل = 4 لو_هـ |\sqrt{س}+2| - 2 لو_هـ |\sqrt{س}+1| + جـ$

طريقة (2): $\int \frac{دس}{س+3\sqrt{س}+2} = \int \frac{2-1}{(\sqrt{س})^2+3\sqrt{س}+2}\, دس = \int \frac{2-1+\frac{2}{\sqrt{س}}-\frac{2}{\sqrt{س}}}{(\sqrt{س}+2)(\sqrt{س}+1)}\, دس$

$ل = \int \frac{\left(2+\frac{2}{\sqrt{س}}\right)+\left(-1-\frac{2}{\sqrt{س}}\right)}{(\sqrt{س}+2)(\sqrt{س}+1)}\, دس$

$ل = \int \frac{\frac{4}{2\sqrt{س}}(\sqrt{س}+1) - \frac{2}{2\sqrt{س}}(\sqrt{س}+2)}{(\sqrt{س}+2)(\sqrt{س}+1)}\, دس$

$ل = \int \frac{\frac{4}{2\sqrt{س}}\cancel{(\sqrt{س}+1)}}{(\sqrt{س}+2)\cancel{(\sqrt{س}+1)}}\, دس - \int \frac{\frac{2}{2\sqrt{س}}\cancel{(\sqrt{س}+2)}}{\cancel{(\sqrt{س}+2)}(\sqrt{س}+1)}\, دس$

$ل = 4\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{س}}}{\sqrt{س}+2}\, دس - 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{س}}}{\sqrt{س}+1}\, دس$

$ل = 4 لو_هـ |\sqrt{س}+2| - 2 لو_هـ |\sqrt{س}+1| + جـ$

• 2009 إكمال / جد $\int \frac{3}{س^2-2س}\, دس$

الحل/ $\int \frac{3}{س^2-2س}\, دس = \int \frac{3}{س(س-2)}\, دس$

* $\frac{3}{س(س-2)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-2} \Leftarrow \frac{3}{س(س-2)} = \frac{أ(س-2)+ب س}{س(س-2)}$

$\Leftarrow 3 = أ(س-2) + ب س$

عندما $س = 0 \Leftarrow 3 = أ(0-2) \Leftarrow 3 = -2أ \Leftarrow أ = \frac{-3}{2}$

عندما $س = 2 \Leftarrow 3 = 2ب \Leftarrow ب = \frac{3}{2}$

$$ل = \int \frac{-\frac{٣}{٢}}{س}\,دس + \int \frac{\frac{٣}{٢}}{س-٢}\,دس = -\frac{٣}{٢}\,لوهـ|س| + \frac{٣}{٢}\,لوهـ|س-٢| + جـ$$

الحل / طريقة (٢):

$$\int \frac{٣}{س^٢-٢س}\,دس = \int \frac{-\frac{٣}{٢}\times -٢}{س(س-٢)}\,دس = \int \frac{-\frac{٣}{٢}\times -٢ + \frac{٣}{٢}س - \frac{٣}{٢}س}{س(س-٢)}\,دس$$

$$\Leftarrow ل = \int \frac{(-\frac{٣}{٢}\times -٢ - \frac{٣}{٢}س) + \frac{٣}{٢}س}{س(س-٢)}\,دس = \int \frac{-\frac{٣}{٢}(س-٢) + \frac{٣}{٢}س}{س(س-٢)}\,دس$$

$$ل = \int \frac{-\frac{٣}{٢}\cancel{(س-٢)}}{س\cancel{(س-٢)}}\,دس + \int \frac{\frac{٣}{٢}\cancel{س}}{\cancel{س}(س-٢)}\,دس = \int \frac{-\frac{٣}{٢}}{س}\,دس + \int \frac{\frac{٣}{٢}}{س-٢}\,دس$$

$$\Leftarrow ل = -\frac{٣}{٢}\,لوهـ|س| + \frac{٣}{٢}\,لوهـ|س-٢| + جـ$$

• ٢٠١٠ / جد $\int \frac{س+١}{س^٢-٤}\,دس$

الحل / $\int \frac{س+١}{س^٢-٤}\,دس = \int \frac{(س+١)}{(س-٢)(س+٢)}\,دس = ل$

$$\frac{س+١}{(س-٢)(س+٢)} = \frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س+٢} \Leftarrow \frac{س+١}{(س-٢)(س+٢)} = \frac{أ(س+٢) + ب(س-٢)}{(س-٢)(س+٢)}$$

* ومنه $أ(س+٢) + ب(س-٢) = س+١$

عندما $س = ٢ \Leftarrow أ(٢+٢) = ٢+١ \Leftarrow ٤أ = ٣ \Leftarrow أ = \frac{٣}{٤}$

عندما $س = -٢ \Leftarrow أ(-٢+٢) + ب(-٢-٢) = -٢+١ \Leftarrow -٤ب = -١ \Leftarrow ب = \frac{١}{٤}$

$$\Leftarrow ل = \int \frac{\frac{٣}{٤}}{س-٢}\,دس + \int \frac{\frac{١}{٤}}{س+٢}\,دس = \frac{٣}{٤}\,لوهـ|س-٢| + \frac{١}{٤}\,لوهـ|س+٢| + جـ$$

طريقة (٢):

$$\int \frac{س+١}{(س^٢-٤)}\,دس = \int \frac{\frac{٣}{٤}س + \frac{١}{٤}س + \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}}{(س-٢)(س+٢)}\,دس = \int \frac{(\frac{٣}{٤}س + \frac{٣}{٢}) + (\frac{١}{٤}س - \frac{١}{٢})}{(س-٢)(س+٢)}\,دس$$

$$= \int \frac{\frac{٣}{٤}(س+٢) + \frac{١}{٤}(س-٢)}{(س-٢)(س+٢)}\,دس = \int \frac{\frac{٣}{٤}\cancel{(س+٢)}}{(س-٢)\cancel{(س+٢)}}\,دس + \int \frac{\frac{١}{٤}\cancel{(س-٢)}}{\cancel{(س-٢)}(س+٢)}\,دس$$

$$= \frac{٣}{٤}\int \frac{دس}{س-٢} + \frac{١}{٤}\int \frac{دس}{س+٢} = \frac{٣}{٤}\,لوهـ|س-٢| + \frac{١}{٤}\,لوهـ|س+٢| + جـ$$

• ٢٠١١ / جد $\int \frac{دس}{س^٢-س-٢}$

الحل / $\int \frac{دس}{س^٢-س-٢} = \int \frac{دس}{(س+١)(س-٢)} = ل$

* $\frac{١}{(س+١)(س-٢)} = \frac{أ}{س+١} + \frac{ب}{س-٢} \Leftarrow ١ = أ(س-٢) + ب(س+١)$

⇐ عندما $س=٢$ ⇐ $١ = أ(٢-٢) + ب(٢+١)$ ⇐ $١ = ٣ب$ ⇐ $ب = \frac{١}{٣}$

عندما $س=-١$ ⇐ $١ = أ(-١-٢)$ ⇐ $١ = -٣أ$ ⇐ $أ = \frac{-١}{٣}$

⇐ $ل = \int \frac{\frac{-١}{٣}}{س+١}\,دس + \int \frac{\frac{١}{٣}}{س-٢}\,دس = \frac{-١}{٣} لوهـ|س+١| + \frac{١}{٣} لوهـ|س-٢| + جـ$

طريقة (٢): $\int \frac{١\,دس}{س^٢-س-٢} = \int \frac{\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}س - \frac{١}{٣}س}{(س+١)(س-٢)}\,دس$

$= \int \frac{(\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣}س) + (\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}س)}{(س-٢)(س+١)}\,دس = \int \frac{\frac{-١}{٣}(س-٢) + \frac{١}{٣}(س+١)}{(س-٢)(س+١)}\,دس$

$ل = \int \frac{\frac{-١}{٣}(س-٢)}{(س-٢)(س+١)}\,دس + \int \frac{\frac{١}{٣}(س+١)}{(س-٢)(س+١)}\,دس = \frac{-١}{٣}\int \frac{١}{س+١}\,دس + \frac{١}{٣}\int \frac{١}{س-٢}\,دس$

$ل = \frac{-١}{٣} لوهـ|س+١| + \frac{١}{٣} لوهـ|س-٢| + جـ$

• 2012 / ص $\int \frac{٢}{١-س^٢}\,دس$

الحل / $\int \frac{٢}{١-س^٢}\,دس = \int \frac{-٢}{س^٢-١}\,دس = \int \frac{-٢}{(س-١)(س+١)}\,دس = ل$

⇐ $\frac{-٢}{(س-١)(س+١)} = \frac{أ}{س-١} + \frac{ب}{س+١}$

⇐ $-٢ = أ(س+١) + ب(س-١)$

• عندما $س = ١$ / $-٢ = أ(١+١)$ ⇐ $-٢ = ٢أ$ ⇐ $أ = -١$

• عندما $س = -١$ / $-٢ = ب(-١-١)$ ⇐ $-٢ = -٢ب$ ⇐ $ب = ١$

⇐ $ل = \int \frac{-١}{س-١}\,دس + \int \frac{١}{س+١}\,دس = -لوهـ|س-١| + لوهـ|س+١| + جـ$

$ل = لوهـ\left|\frac{س+١}{س-١}\right| + جـ$

طريقة (٢): * $\int \frac{-٢}{س^٢-١}\,دس = \int \frac{-١-١+س-س}{(س-١)(س+١)}\,دس = \int \frac{(-١-س)+(-١+س)}{(س-١)(س+١)}\,دس$

⇐ $ل = \int \frac{-(س+١)+(س-١)}{(س+١)(س-١)}\,دس = \int \frac{-\cancel{(س+١)}}{\cancel{(س+١)}(س-١)}\,دس + \int \frac{\cancel{(س-١)}}{(س+١)\cancel{(س-١)}}\,دس$

$ل = \int \frac{-١}{س-١}\,دس + \int \frac{١}{س+١}\,دس = -لوهـ|س-١| + لوهـ|س+١| + جـ$

• 2012 إكمال/ جد $\int \frac{12}{\text{س}^2-4}\,\text{دس}$

الحل/ $\int \frac{12}{\text{س}^2-4}\,\text{دس} = \int \frac{12}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}\,\text{دس} = \int \frac{\text{أ}}{\text{س}-2}\,\text{دس} + \int \frac{\text{ب}}{\text{س}+2}\,\text{دس} = \text{ل}$

$\Leftarrow 12 = \text{أ}(\text{س}+2) + \text{ب}(\text{س}-2)$

• عندما $\text{س} = 2 \Leftarrow 12 = \text{أ}(2+2) \Leftarrow 12 = 4\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = 3$

• عندما $\text{س} = -2 \Leftarrow 12 = \text{ب}(-2-2) \Leftarrow 12 = -4\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -3$

$\text{ل} = \int \frac{3}{\text{س}-2}\,\text{دس} + \int \frac{-3}{\text{س}+2}\,\text{دس} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+2| + \text{جـ} = 3\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+2|\right) + \text{جـ}$

$\text{ل} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{\text{س}-2}{\text{س}+2}\right| + \text{جـ}$

طريقة (2): $\int \frac{12}{\text{س}^2-4}\,\text{دس} = \int \frac{6+6+3\text{س}-3\text{س}}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}\,\text{دس} = \int \frac{(6+3\text{س})+(6-3\text{س})}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \int \frac{3(\text{س}+2) + -3(\text{س}-2)}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}\,\text{دس} = \int \frac{3\cancel{(\text{س}+2)}}{(\text{س}-2)\cancel{(\text{س}+2)}}\,\text{دس} + \int \frac{-3\cancel{(\text{س}-2)}}{(\text{س}+2)\cancel{(\text{س}-2)}}\,\text{دس}$

$\text{ل} = 3\int \frac{1}{\text{س}-2}\,\text{دس} + -3\int \frac{1}{\text{س}+2}\,\text{دس} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+2| + \text{جـ}$

• 2013 الإكمال/ جد $\int \frac{4}{\text{س}^2-2\text{س}}\,\text{دس}$

الحل/ $\int \frac{4}{\text{س}^2-2\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{4}{\text{س}(\text{س}-2)}\,\text{دس}$

$* \quad \frac{4}{\text{س}(\text{س}-2)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-2} \Leftarrow 4 = \text{أ}(\text{س}-2) + \text{ب}\,\text{س}$

• عندما $\text{س} = 0 \Leftarrow 4 = \text{أ}(0-2) \Leftarrow 4 = -2\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = -2$

• عندما $\text{س} = 2 \Leftarrow 4 = 2\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = 2$

$\text{ل} = \int \frac{-2}{\text{س}}\,\text{دس} + \int \frac{2}{\text{س}-2}\,\text{دس} = -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| + \text{جـ}$

طريقة (2): $\int \frac{4}{\text{س}^2-2\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{4+2\text{س}-2\text{س}}{\text{س}(\text{س}-2)}\,\text{دس} = \int \frac{(4-2\text{س}) + 2\text{س}}{\text{س}(\text{س}-2)}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \int \frac{-2\cancel{(\text{س}-2)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}-2)}}\,\text{دس} + \int \frac{2\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}(\text{س}-2)}\,\text{دس}$

$\text{ل} = -2\int \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} + 2\int \frac{1}{\text{س}-2}\,\text{دس} = -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| + \text{جـ}$

$\Leftarrow \text{ل} = 2\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\right) + \text{جـ} = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{\text{س}-2}{\text{س}}\right| + \text{جـ}$

• 2014 / جد $\int \frac{1}{\text{س}\sqrt{\text{س}+1}}\,\text{دس}$

الحل/ نفرض $(\text{ص} = \sqrt{\text{س}+1})^2 \Leftarrow \text{ص}^2 = \text{س}+1 \Leftarrow \text{دس} = 2\text{ص}\,\text{دص}$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{1}{\text{ص}(\text{ص}^2-1)} \times 2\text{ص}\,\text{دص} = \int \frac{2}{\text{ص}^2-1}\,\text{دص} = \int \frac{2}{(\text{ص}-1)(\text{ص}+1)}\,\text{دص}$$

$$* \quad \frac{2}{(\text{ص}-1)(\text{ص}+1)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-1} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+1}$$

$$\Leftarrow \quad 2 = \text{أ}(\text{ص}+1) + \text{ب}(\text{ص}-1)$$

• عندما ص = ١ / $2 = \text{أ}(1+1) \Leftarrow 2\text{أ} = 2 \Leftarrow \text{أ} = 1$

• عندما ص = −١ / $2 = \text{ب}(-1-1) \Leftarrow 2 = -2\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -1$

$$\text{ل} = \int \frac{1}{\text{ص}-1}\,\text{دص} + \int \frac{-1}{\text{ص}+1}\,\text{دص} = \text{لو}_\text{هـ}|\text{ص}-1| - \text{لو}_\text{هـ}|\text{ص}+1| + \text{جـ}$$

$$\text{ل} = \text{لو}_\text{هـ}\left|\sqrt{\text{س}+1}-1\right| - \text{لو}_\text{هـ}\left|\sqrt{\text{س}+1}+1\right| + \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \text{لو}_\text{هـ}\left|\frac{\sqrt{\text{س}+1}-1}{\sqrt{\text{س}+1}+1}\right| + \text{جـ}$$

• 2014 إكمال/ جد $\int \frac{2\,\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س} - \text{جتاس} - 2}\,\text{دس}$

الحل/ نفرض جتاس = ص $\Leftarrow -\text{جاس}\,\text{دس} = \text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$$\text{ل} = \int \frac{2\,\text{جاس}}{\text{ص}^2-\text{ص}-2} \times \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}} = \int \frac{-2\,\text{دص}}{\text{ص}^2-\text{ص}-2} = \int \frac{-2\,\text{دص}}{(\text{ص}+1)(\text{ص}-2)}$$

$$* \quad \frac{-2}{(\text{ص}+1)(\text{ص}-2)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}+1} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-2}$$

$$* \quad -2 = \text{أ}(\text{ص}-2) + \text{ب}(\text{ص}+1)$$

• عندما ص = ٢ / $-2 = \text{ب}(2+1) \Leftarrow -2 = 3\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{-2}{3}$

• عندما ص = −١ / $-2 = \text{أ}(-1-2) \Leftarrow -2 = -3\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{2}{3}$

$$\text{ل} = \int \frac{\frac{2}{3}}{\text{ص}+1}\,\text{دص} + \int \frac{\frac{-2}{3}}{\text{ص}-2}\,\text{دص} = \frac{2}{3}\text{لو}_\text{هـ}|\text{ص}+1| - \frac{2}{3}\text{لو}_\text{هـ}|\text{ص}-2| + \text{جـ}$$

$$\text{ل} = \frac{2}{3}\text{لو}_\text{هـ}|\text{جتاس}+1| - \frac{2}{3}\text{لو}_\text{هـ}|\text{جتاس}-2| + \text{جـ} = \frac{2}{3}\text{لو}_\text{هـ}\left|\frac{\text{جتاس}+1}{\text{جتاس}-2}\right| + \text{جـ}$$

طريقة (٢):

$$\int \frac{٢جاس}{قتا^٢س - قتاس - ٢}\,دس = \frac{٢}{٣}\int \frac{٣جاس}{(قتاس+١)(قتاس-٢)}\,دس = ل$$

$$\Leftarrow ل = \frac{٢}{٣}\int \frac{٢جاس + جاس - جاس\,قتاس + جاس\,قتاس}{(قتاس+١)(قتاس-٢)}\,دس$$

$$ل = \frac{٢}{٣}\int \frac{(٢جاس - جاس\,قتاس) + (جاس + جاس\,قتاس)}{(قتاس+١)(قتاس-٢)}\,دس$$

$$ل = \frac{٢}{٣}\int \frac{-جاس(قتاس-٢) + جاس(قتاس+١)}{(قتاس+١)(قتاس-٢)}\,دس$$

$$ل = \frac{٢}{٣}\left(\int \frac{-جاس\cancel{(قتاس-٢)}}{(قتاس+١)\cancel{(قتاس-٢)}}\,دس + \int \frac{جاس\cancel{(قتاس+١)}}{\cancel{(قتاس+١)}(قتاس-٢)}\,دس\right)$$

$$ل = \frac{٢}{٣}\int \frac{-جاس}{قتاس+١}\,دس + \frac{٢}{٣}\int \frac{جاس}{قتاس-٢}\,دس$$

$$ل = \frac{٢}{٣}لو_هـ|قتاس+١| - \frac{٢}{٣}لو_هـ|قتاس-٢| + ج$$

• 2015 / ص
$$\int \frac{س+٢}{س^٢-س}\,دس$$

الحل

$$\int \frac{س+٢}{س^٢-س}\,دس = \int \frac{س+٢}{س(س-١)}\,دس = ل$$

$$* \quad \frac{س+٢}{س(س-١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١} \Leftarrow \frac{س+٢}{س(س-١)} = \frac{أ(س-١) + ب\,س}{س(س-١)}$$

$$\Leftarrow س+٢ = أ(س-١) + ب\,س$$

• عندما $س = ١$ / $١+٢ = ب \Leftarrow ب = ٣$

• عندما $س = ٠$ / $٢ = أ(٠-١) \Leftarrow ٢ = -أ \Leftarrow أ = -٢$

$$\Leftarrow ل = \int \frac{-٢}{س}\,دس + \int \frac{٣}{س-١}\,دس = -٢لو_هـ|س| + ٣لو_هـ|س-١| + ج$$

طريقة (٢):

$$ل = \int \frac{س+٢}{س^٢-س}\,دس = \int \frac{٣س - ٢س + ٢}{س(س-١)}\,دس = \int \frac{٣س - ٢(س-١)}{س(س-١)}\,دس$$

$$\Leftarrow ل = \int \frac{٣\cancel{س}}{\cancel{س}(س-١)}\,دس + \int \frac{-٢\cancel{(س-١)}}{س\cancel{(س-١)}}\,دس = ٣لو_هـ|س-١| - ٢لو_هـ|س| + ج$$

• 2015 اكمال / ص
$$\int \frac{هـ^س}{هـ^{٢س} - ٣هـ^س - ٤}\,دس$$

الحل

نفرض $ص = هـ^س \Leftarrow دص = هـ^س\,دس \Leftarrow دس = \frac{دص}{هـ^س}$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}{\text{هـ}^{2\text{س}} - 3\text{هـ}^{\text{س}} - 4} \times \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}} = \int \frac{\text{د ص}}{(\text{ص}+1)(\text{ص}-4)}$$

$$* \quad \frac{1}{(\text{ص}+1)(\text{ص}-4)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}+1} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-4}$$

$$\Leftarrow 1 = \text{أ}(\text{ص}-4) + \text{ب}(\text{ص}+1)$$

- عندما $\text{ص} = 4 \Leftarrow 1 = \text{ب}(4+1) \Leftarrow 1 = 5\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{1}{5}$
- عندما $\text{ص} = -1 \Leftarrow 1 = \text{أ}(-1-4) \Leftarrow 1 = -5\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = -\frac{1}{5}$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{-\frac{1}{5}}{\text{ص}+1}\,\text{د ص} + \int \frac{\frac{1}{5}}{\text{ص}-4}\,\text{د ص}$$

$$\text{ل} = -\frac{1}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1| + \frac{1}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-4| + \text{جـ} = -\frac{1}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+1| + \frac{1}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}-4| + \text{جـ}$$

طريقة (٢):

$$\text{ل} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}} - 3\text{هـ}^{\text{س}} - 4}\,\text{د س} = \int \frac{\frac{4}{5}\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{1}{5}\text{هـ}^{\text{س}} - \frac{1}{5}\text{هـ}^{2\text{س}} + \frac{1}{5}\text{هـ}^{2\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)(\text{هـ}^{\text{س}}-4)}\,\text{د س}$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\left(\frac{4}{5}\text{هـ}^{\text{س}} - \frac{1}{5}\text{هـ}^{2\text{س}}\right) + \left(\frac{1}{5}\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{1}{5}\text{هـ}^{2\text{س}}\right)}{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)(\text{هـ}^{\text{س}}-4)}\,\text{د س}$$

$$\text{ل} = \int \frac{-\frac{1}{5}\text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\text{س}}-4) + \frac{1}{5}\text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\text{س}}+1)}{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)(\text{هـ}^{\text{س}}-4)}\,\text{د س} = \int \frac{-\frac{1}{5}\text{هـ}^{\text{س}}\cancel{(\text{هـ}^{\text{س}}-4)}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)\cancel{(\text{هـ}^{\text{س}}-4)}} + \frac{\frac{1}{5}\text{هـ}^{\text{س}}\cancel{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)}}{\cancel{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)}(\text{هـ}^{\text{س}}-4)}\,\text{د س}$$

$$\text{ل} = -\frac{1}{5}\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+1} + \frac{1}{5}\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}-4}\,\text{د س} = -\frac{1}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+1| + \frac{1}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}-4| + \text{جـ}$$

- 2016 / صيف $\int \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} + 5}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}\,\text{د س}$

الحل:

$$* \int \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} + 5}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3} = \int \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3 + 8}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}\,\text{د س}$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\cancel{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}}{\cancel{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}}\,\text{د س} + \int \frac{8}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}\,\text{د س}$$

$$\text{ل} = \int 1\,\text{د س} + \int \frac{2 + 6 - 2\text{س} + 2\text{س}}{(\text{س}-1)(\text{س}+3)}\,\text{د س} = \text{س} + \int \frac{(2\text{س}+6) + (2-2\text{س})}{(\text{س}+3)(\text{س}-1)}\,\text{د س}$$

$$\text{ل} = \text{س} + \int \frac{-2(\text{س}-1) + 2(\text{س}+3)}{(\text{س}+3)(\text{س}-1)}\,\text{د س} \Rightarrow \text{ل} = \int \frac{-2\cancel{(\text{س}-1)}}{(\text{س}+3)\cancel{(\text{س}-1)}}\,\text{د س} + \int \frac{2\cancel{(\text{س}+3)}}{\cancel{(\text{س}+3)}(\text{س}-1)}\,\text{د س} + \text{س}$$

$$\text{ل} = \text{س} + \int \frac{-2}{\text{س}+3}\,\text{د س} + \int \frac{2}{\text{س}-1}\,\text{د س} = -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+3| + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| + \text{س} + \text{جـ}$$

• طريقة (٢): بما أن درجة البسط = درجة المقام ⇐ قسمة طويلة.

$$\Leftarrow \int \frac{\text{س}^2+2\text{س}+5}{\text{س}^2+2\text{س}-3}\,\text{دس} = \int 1\,\text{دس} + \int \frac{8}{\text{س}^2+2\text{س}-3}\,\text{دس}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline \text{س}^2+2\text{س}+5 & \text{س}^2+2\text{س}-3 \\ -(\text{س}^2+2\text{س}-3) & \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$\text{ق} = \text{س} + \int \frac{8}{(\text{س}-1)(\text{س}+3)}\,\text{دس}$$

$$* \quad \frac{8}{(\text{س}+3)(\text{س}-1)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-1} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+3}$$

$$8 = \text{أ}(\text{س}+3) + \text{ب}(\text{س}-1)$$

• عندما $\text{س}=1 \Leftarrow 8 = \text{أ}(1+3) \Leftarrow 8 = 4\text{أ} \Leftarrow \text{أ}=2$

• عندما $\text{س}=-3 \Leftarrow 8 = \text{ب}(-3-1) \Leftarrow 8=-4\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=-2$

$$\Leftarrow \text{ق} = \text{س} + \int \frac{2}{\text{س}-1}\,\text{دس} + \int \frac{-2}{\text{س}+3}\,\text{دس} = \text{س} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+3| + \text{جـ}$$

$$\text{ق} = \text{س} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{\text{س}-1}{\text{س}+3}\right| + \text{جـ}$$

• 2017/ $\displaystyle\int \frac{12}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-3)(1-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}\,\text{دس}$

الحل/ نفرض $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = \text{ص} \Leftarrow \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} = \text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \text{س}\,\text{دص}$

$$\text{ق} = \int \frac{12}{\text{س}(\text{ص}-3)(1-\text{ص})} \times \text{س}\,\text{دص} = \int \frac{12\,\text{دص}}{(\text{ص}-3)(1-\text{ص})}$$

$$\frac{12}{(\text{ص}-3)(1-\text{ص})} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-3} + \frac{\text{ب}}{1-\text{ص}}$$

$$\Leftarrow 12 = \text{أ}(1-\text{ص}) + \text{ب}(\text{ص}-3)$$

• عندما $\text{ص}=1 \,/\, 12 = \text{ب}(1-3) \Leftarrow 12 = -2\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -6$

• عندما $\text{ص}=3 \,/\, 12 = \text{أ}(1-3) \Leftarrow 12 = -2\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = -6$

$$\Leftarrow \text{ق} = \int \frac{-6}{\text{ص}-3}\,\text{دص} + \int \frac{-6}{1-\text{ص}}\,\text{دص} = -6\int \frac{1}{\text{ص}-3}\,\text{دص} + 6\int \frac{-1}{1-\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$\text{ق} = -6\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-3| + 6\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1-\text{ص}| + \text{جـ} \Leftarrow \text{ق} = -6\,\text{لو}_{\text{هـ}}|(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})-3| + 6\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$$

• طريقة (٢):

$$\text{ق} = \int \frac{12}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-3)(1-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}\,\text{دس} = \int \frac{\frac{12}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-3)(1-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}\,\text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\frac{١٨}{\text{س}} - \frac{٦}{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{٦}{\text{س}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٣)(١-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}\,\text{ءس} = \int \frac{\left(-\frac{٦}{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right) + \left(\frac{١٨}{\text{س}} - \frac{٦}{\text{س}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٣)(١-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}\,\text{ءس}$$

$$\text{ل} = \int \frac{-\frac{٦}{\text{س}}(١-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) + -\frac{٦}{\text{س}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٣)}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٣)(١-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}\,\text{ءس}$$

$$\text{ل} = \int \frac{-\frac{٦}{\text{س}}\cancel{(١-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٣)\cancel{(١-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}}\,\text{ءس} + \int \frac{-\frac{٦}{\text{س}}\cancel{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٣)}}{\cancel{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٣)}(١-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}\,\text{ءس}$$

$$\text{ل} = -٦\int \frac{\frac{١}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٣)}\,\text{ءس} + ٦\int \frac{\frac{١}{\text{س}}}{١-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ل} = -٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٣| + ٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}|١-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$$

• 2018 دورة ثاني / ص $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} - ٢}\,\text{ءس}$

الحل/

$$\text{ل} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} - ٢}\,\text{ءس}$$

نفرض $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \text{ءص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\text{ءص}}{\text{ص}^٢ - \text{ص} - ٢} = \int \frac{\text{ءص}}{(\text{ص}+١)(\text{ص}-٢)}$$

$$* \quad \frac{١}{(\text{ص}+١)(\text{ص}-٢)} = \frac{\text{أ}}{(\text{ص}+١)} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-٢} \Leftarrow ١ = \text{أ}(\text{ص}-٢) + \text{ب}(\text{ص}+١)$$

• عندما $\text{ص} = ٢$ / $١ = \text{ب}(٢+١) \Leftarrow ١ = ٣\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{١}{٣}$

• عندما $\text{ص} = -١$ / $١ = \text{أ}(-١-٢) \Leftarrow ١ = -٣\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = -\frac{١}{٣}$

$$\text{ل} = \int \frac{-\frac{١}{٣}}{\text{ص}+١}\,\text{ءص} + \int \frac{\frac{١}{٣}}{\text{ص}-٢}\,\text{ءص} = -\frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+١| + \frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-٢| + \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{ل} = -\frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+١| + \frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}-٢| + \text{جـ}$$

طريقة (٢):

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}})^٢ - \text{هـ}^{\text{س}} - ٢}\,\text{ءس} = \int \frac{\frac{٢}{٣}\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}} - \frac{١}{٣}\text{هـ}^{٢\text{س}} + \frac{١}{٣}\text{هـ}^{٢\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}-٢)(\text{هـ}^{\text{س}}+١)}\,\text{ءس}$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\left(-\frac{١}{٣}\text{هـ}^{٢\text{س}} + \frac{٢}{٣}\text{هـ}^{\text{س}}\right) + \left(\frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{١}{٣}\text{هـ}^{٢\text{س}}\right)}{(\text{هـ}^{\text{س}}-٢)(\text{هـ}^{\text{س}}+١)}\,\text{ءس}$$

$$\text{ل} = \int \frac{-\frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\text{س}}-٢) + \frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}}(١+\text{هـ}^{\text{س}})}{(\text{هـ}^{\text{س}}-٢)(\text{هـ}^{\text{س}}+١)}\,\text{ءس} = \int \frac{-\frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}}\cancel{(\text{هـ}^{\text{س}}-٢)}}{\cancel{(\text{هـ}^{\text{س}}-٢)}(\text{هـ}^{\text{س}}+١)}\,\text{ءس} + \int \frac{\frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}}\cancel{(١+\text{هـ}^{\text{س}})}}{(\text{هـ}^{\text{س}}-٢)\cancel{(\text{هـ}^{\text{س}}+١)}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ل} = -\frac{1}{3}\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+1}\,\text{دس} + \frac{1}{3}\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}-2}\,\text{دس} = -\frac{1}{3}\text{لوهـ}|\text{هـ}^{\text{س}}+1| + \frac{1}{3}\text{لوهـ}|\text{هـ}^{\text{س}}-2| + \text{ج}$$

• 2019 دور أول / جد $\int \frac{4\text{جاس}}{3+\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

الحل/ $\int \frac{4\text{جاس}}{3+(1-\text{جتا}^2\text{س})}\,\text{دس} = \int \frac{4\text{جاس}}{4-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \text{ل}$

نفرض $\text{ص} = \text{جتاس} \Leftarrow \text{دص} = -\text{جاس دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{4\text{جاس}}{4-\text{ص}^2} \times \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}} = \int \frac{4\,\text{دص}}{\text{ص}^2-4} = \int \frac{4\,\text{دص}}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+2)}$$

$$\frac{4}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+2)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-2} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+2}$$

$\Leftarrow 4 = \text{أ}(\text{ص}+2) + \text{ب}(\text{ص}-2)$

• عندما ص = 2 / $4 = \text{أ}(2+2) \Leftarrow 4 = 4\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = 1$

• عندما ص = -2 / $4 = \text{ب}(-2-2) \Leftarrow 4 = -4\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -1$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{1}{\text{ص}-2} + \frac{-1}{\text{ص}+2}\,\text{دص} = \text{لوهـ}|\text{ص}-2| - \text{لوهـ}|\text{ص}+2| + \text{ج}$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \text{لوهـ}|\text{جتاس}-2| - \text{لوهـ}|\text{جتاس}+2| + \text{ج} = \text{لوهـ}\left|\frac{\text{جتاس}-2}{\text{جتاس}+2}\right| + \text{ج}$$

• 2019 دور ثاني / جد $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^4+\text{س}^2}\,\text{دس}$

الحل/ $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^4+\text{س}^2}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}}{\text{س}^4(1+\frac{1}{\text{س}^2})}\,\text{دس} = \int \frac{1}{\text{س}^3(1+\frac{1}{\text{س}^2})}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = 1+\frac{1}{\text{س}^2} \Leftarrow \text{دص} = \frac{-2}{\text{س}^3}\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{س}^3\,\text{دص}}{-2}$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{1}{\text{س}^3 \times \text{ص}} \times \frac{\text{س}^3\,\text{دص}}{-2} = \int \frac{-1}{2\text{ص}}\,\text{دص} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$\text{ل} = -\frac{1}{2}\text{لوهـ}|\text{ص}| + \text{ج} = -\frac{1}{2}\text{لوهـ}\left|1+\frac{1}{\text{س}^2}\right| + \text{ج} = -\frac{1}{2}\text{لوهـ}\left|\frac{\text{س}^2+1}{\text{س}^2}\right| + \text{ج}$$

$$\Leftarrow \text{ل} = -\frac{1}{2}\text{لوهـ}|\text{س}^2+1| + \frac{1}{2}\text{لوهـ}|\text{س}^2| + \text{ج}$$

• طريقة (2): $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^4+\text{س}^2}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}+\text{س}^3-\text{س}^3}{\text{س}^2(\text{س}^2+1)}\,\text{دس} = \int \frac{-\text{س}^3+(\text{س}+\text{س}^3)}{\text{س}^2(\text{س}^2+1)}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \int \frac{-\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٤}(\text{س}^{٤}+١)}\,\text{دس} + \int \frac{\text{س}(\text{س}^{٤}+١)}{\text{س}^{٤}(\text{س}^{٤}+١)}\,\text{دس} \Leftarrow \text{ل} = \int \frac{-\text{س}}{\text{س}^{٤}+١}\,\text{دس} + \int \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\Leftarrow \text{ل} = -\frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٤}+١| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ج}$

• 2019 دورة ثانية / جد $\int \frac{٢\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٤}\,\text{دس}$

الحل / $\int \frac{٢\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٤}\,\text{دس} = \int \frac{٢\text{س}-٢}{(\text{س}-٤)(\text{س}+١)}\,\text{دس} = \text{ل}$

$* \quad \frac{٢\text{س}-٢}{(\text{س}-٤)(\text{س}+١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٤} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+١}$

$\Leftarrow ٢\text{س}-٢ = \text{أ}(\text{س}+١) + \text{ب}(\text{س}-٤)$

• عندما (س = -١) / $٢\times -١ - ٢ = \text{ب}(-١-٤) \Leftarrow -٤ = -٥\text{ب} \Leftarrow \frac{٤}{٥} = \text{ب}$

• عندما (س = ٤) / $٢\times ٤ - ٢ = \text{أ}(٤+١) \Leftarrow ٦ = ٥\text{أ} \Leftarrow \frac{٦}{٥} = \text{أ}$

$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\frac{٦}{٥}}{\text{س}-٤}\,\text{دس} + \int \frac{\frac{٤}{٥}}{\text{س}+١}\,\text{دس} = \frac{٦}{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٤| + \frac{٤}{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \text{ج}$

طريقة (٢): $\int \frac{٢\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٤}\,\text{دس} = \int \frac{(\frac{٦}{٥}\text{س}+\frac{٤}{٥}\text{س}) + (\frac{٦}{٥}-\frac{١٦}{٥})}{(\text{س}-٤)(\text{س}+١)}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \int \frac{(\frac{٦}{٥}\text{س}+\frac{٦}{٥}) + (\frac{٤}{٥}\text{س}-\frac{١٦}{٥})}{(\text{س}-٤)(\text{س}+١)}\,\text{دس} = \int \frac{\frac{٦}{٥}(\text{س}+١) + \frac{٤}{٥}(\text{س}-٤)}{(\text{س}-٤)(\text{س}+١)}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \int \frac{\frac{٦}{٥}\cancel{(\text{س}+١)}}{(\text{س}-٤)\cancel{(\text{س}+١)}}\,\text{دس} + \int \frac{\frac{٤}{٥}\cancel{(\text{س}-٤)}}{\cancel{(\text{س}-٤)}(\text{س}+١)}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \frac{٦}{٥}\int \frac{١}{\text{س}-٤}\,\text{دس} + \frac{٤}{٥}\int \frac{١}{\text{س}+١}\,\text{دس} = \frac{٦}{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٤| + \frac{٤}{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \text{ج}$

• 2022 دورة ثانية / جد $\int \frac{٢}{\text{س} - \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}}\,\text{دس}$

الحل / $\int \frac{٢}{\text{س} - \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}}\,\text{دس} = \int \frac{٢}{\text{س}(١-(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢})}\,\text{دس} = \text{ل}$

نفرض $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = \text{ص} \Leftarrow \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس} = \text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \text{س}\,\text{دص}$

$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{٢}{\cancel{\text{س}}(١-\text{ص}^{٢})} \times \cancel{\text{س}}\,\text{دص} = \int \frac{٢}{١-\text{ص}^{٢}}\,\text{دص} = \int \frac{-٢}{\text{ص}^{٢}-١}\,\text{دص}$

$* \quad \frac{-٢}{(\text{ص}-١)(\text{ص}+١)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-١} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+١}$

$\Leftarrow -2 = \text{أ}(\text{ص}+1) + \text{ب}(\text{ص}-1)$

• عندما ص = 1 / $-2 = \text{أ}(1+1) \Leftarrow -2 = 2\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = -1$

• عندما ص = -1 / $-2 = \text{ب}(-1-1) \Leftarrow -2 = -2\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = 1$

$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{-1}{\text{ص}-1}\,\text{دص} + \int \frac{1}{\text{ص}+1}\,\text{دص} = -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1| + \text{ج}$

$\Leftarrow \text{ل} = -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - 1| + \text{لو}_{\text{هـ}}|1+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{ج}$

• 2023 دور ثاني / جد $\int \frac{1}{\text{س}^2-9}\,\text{دس}$

الحل

$\text{ل} = \int \frac{1}{\text{س}^2-9}\,\text{دس} = \int \frac{1}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}\,\text{دس}$

$* \quad \frac{1}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-3} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+3}$

$\Leftarrow 1 = \text{أ}(\text{س}+3) + \text{ب}(\text{س}-3)$

• عندما س = 3 / $1 = \text{أ}(3+3) \Leftarrow 1 = 6\text{أ} \Leftarrow \frac{1}{6} = \text{أ}$

• عندما س = -3 / $1 = \text{ب}(-3-3) \Leftarrow 1 = -6\text{ب} \Leftarrow \frac{-1}{6} = \text{ب}$

$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\frac{1}{6}}{\text{س}-3}\,\text{دس} + \int \frac{-\frac{1}{6}}{\text{س}+3}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-3| - \frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+3| + \text{ج} = \frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{\text{س}-3}{\text{س}+3}\right| + \text{ج}$

طريقة (2):

$\int \frac{1}{\text{س}^2-9}\,\text{دس} = \int \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\text{س}-\frac{1}{6}\text{س}}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}\,\text{دس} = \int \frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\text{س}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\text{س})}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \int \frac{\frac{1}{6}(\text{س}+3) - \frac{1}{6}(\text{س}-3)}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}\,\text{دس}$

$\text{ل} = \int \frac{\frac{1}{6}\cancel{(\text{س}+3)}}{\cancel{(\text{س}+3)}(\text{س}-3)}\,\text{دس} + \int \frac{-\frac{1}{6}\cancel{(\text{س}-3)}}{(\text{س}+3)\cancel{(\text{س}-3)}}\,\text{دس} = \frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-3| - \frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+3| + \text{ج}$

• 2023 دور ثاني / جد $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1)\,\text{دس}$

الحل / $\text{ل} = \int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1)\,\text{دس}$

$\text{هـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1) \qquad \text{دع} = \text{دس}$

$\text{دهـ} = \frac{2\text{س}}{\text{س}^2-1}\,\text{دس} \qquad \text{ع} = \text{س}$

$\text{ل} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1) - \int \frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-1}\,\text{دس}$

طريقة (2): القسمة الطويلة.

$2\text{س}^2 \div (\text{س}^2-1)$: الناتج 2، نطرح 2س^2-2، الباقي 2

$* \quad \int \frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-1}\,\text{دس} = \int 2\,\text{دس} + \int \frac{2}{\text{س}^2-1}\,\text{دس}$

كسور جزئية

$\text{ل} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - \int \frac{2\text{س}^2-2+2}{\text{س}^2-1}\, \text{دس}$

$\text{ل} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - \int \frac{2(\text{س}^2-1)+2}{\text{س}^2-1}\, \text{دس} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - \int \frac{2\cancel{(\text{س}^2-1)}}{\cancel{(\text{س}^2-1)}}\, \text{دس} + \int \frac{-2}{\text{س}^2-1}\, \text{دس}$

$\text{ل} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - 2\text{س} + \int \frac{-2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)}\, \text{دس}$

ل_1 "كسور جزئية"

$* \quad \frac{-2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-1} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+1}$

$-2 = \text{أ}(\text{س}+1) + \text{ب}(\text{س}-1)$

- عندما $\text{س} = 1$ / $-2 = \text{أ}(1+1) \Leftarrow -2 = 2\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = -1$
- عندما $\text{س} = -1$ / $-2 = \text{ب}(-1-1) \Leftarrow -2 = -2\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = 1$

$\Leftarrow \text{ل} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - 2\text{س} + \int \frac{-1}{\text{س}-1}\, \text{دس} + \int \frac{1}{\text{س}+1}\, \text{دس}$

$\text{ل} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - 2\text{س} - \text{لوهـ}|\text{س}-1| + \text{لوهـ}|\text{س}+1| + \text{ج}$

- **طريقة (2):** $\int \text{لوهـ}(\text{س}^2-1)\, \text{دس} = \int \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) + \frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-1} - \frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-1}\, \text{دس}$

$\Leftarrow \text{ل} = \int \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) + \frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-1}\, \text{دس} - \int \frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-1}\, \text{دس}$

$\text{ل} = \int \left(\text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1)\right)'\, \text{دس} - \int \frac{2\text{س}^2-2+2}{\text{س}^2-1}\, \text{دس}$

$\text{ل} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - \int \frac{2\cancel{(\text{س}^2-1)}}{\cancel{\text{س}^2-1}} + \frac{2}{\text{س}^2-1}\, \text{دس} \Leftarrow \text{ل} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - \int 2\, \text{دس} + \int \frac{-2}{\text{س}^2-1}\, \text{دس}$

$\text{ل} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - 2\text{س} + \int \frac{-1-1+\text{س}-\text{س}}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)}\, \text{دس}$

$\text{ل} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - 2\text{س} + \int \frac{(\text{س}-1)+(-1-\text{س})}{(\text{س}+1)(\text{س}-1)}\, \text{دس} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - 2\text{س} + \int \frac{(\text{س}-1)-(\text{س}+1)}{(\text{س}+1)(\text{س}-1)}\, \text{دس}$

$\text{ل} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - 2\text{س} + \int \frac{-\cancel{(\text{س}+1)}}{\cancel{(\text{س}+1)}(\text{س}-1)}\, \text{دس} + \int \frac{\cancel{(\text{س}-1)}}{(\text{س}+1)\cancel{(\text{س}-1)}}\, \text{دس}$

$\text{ل} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - 2\text{س} + \int \frac{-1}{\text{س}-1}\, \text{دس} + \int \frac{1}{\text{س}+1}\, \text{دس}$

$\text{ل} = \text{س}\ \text{لوهـ}(\text{س}^2-1) - 2\text{س} - \text{لوهـ}|\text{س}-1| + \text{لوهـ}|\text{س}+1| + \text{ج}$

- 2023 دورة ثالثة / جد $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}^3+\text{س}}$

الحل / $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}(1+\text{س}^2)} = \text{ل}$

نفرض $ص = \frac{1}{س^6} + 1 \Leftarrow دص = \frac{-6}{س^7} دس \Leftarrow دس = \frac{س^7 دص}{-6}$

$$\Leftarrow ل = \int \frac{1}{\cancel{س^7} \times ص} \times \frac{\cancel{س^7} دص}{-6} = \frac{-1}{6} \int \frac{1}{ص} دص = \frac{-1}{6} لو_هـ|ص| + ج$$

$$ل = \frac{-1}{6} لو_هـ\left|\frac{1}{س^6} + 1\right| + ج = \frac{-1}{6} لو_هـ\left|\frac{س^6+1}{س^6}\right| + ج = \frac{-1}{6} لو_هـ|س^6+1| + \frac{1}{6} لو_هـ|س|^6 + ج$$

$$\Leftarrow ل = \frac{-1}{6} لو_هـ(س^6+1) + لو_هـ(س) + ج$$

$$ل = \int \frac{1\, دس}{س^7 + س} = \int \frac{-س^6 + س^6 + 1}{س^7 + س} دس = \int \frac{-س^6 + (س^6+1)}{س(س^6+1)} دس$$

$$ل = \int \frac{-\cancel{س^6}\, س^5}{(س^6+1)\cancel{س}} دس + \int \frac{\cancel{(س^6+1)}}{\cancel{(س^6+1)}\, س} دس = \int \frac{-س^5 دس}{س^6+1} + \int \frac{1}{س} دس$$

$$= \frac{-1}{6} لو_هـ(س^6+1) + لو_هـ(س) + ج$$

• 2024 دور ثاني / جد $\int \frac{1 - 2س}{س^2 - 7س + 10} دس$

الحل/ $\int \frac{1-2س}{س^2-7س+10} دس = \int \frac{1-2س}{(س-2)(س-5)} دس = ل$

$$* \quad \frac{1-2س}{(س-2)(س-5)} = \frac{أ}{س-2} + \frac{ب}{س-5}$$

$$\Leftarrow 1 - 2س = أ(س-5) + ب(س-2)$$

• عندما $س = 5$ / $1 - 2\times5 = ب(5-2) \Leftarrow -9 = 3ب \Leftarrow ب = -3$

• عندما $س = 2$ / $1 - 2\times2 = أ(2-5) \Leftarrow -3 = -3أ \Leftarrow أ = 1$

$$ل = \int \frac{1}{س-2} دس + \int \frac{-3}{س-5} دس = لو_هـ|س-2| - 3لو_هـ|س-5| + ج$$

طريقة (2): $\int \frac{1-2س}{س^2-7س+10} دس = \int \frac{6 - 5 + س - 3س}{(س-2)(س-5)} دس = \int \frac{(س-5) + (6-3س)}{(س-2)(س-5)} دس$

$$\Leftarrow ل = \int \frac{\cancel{(س-5)}}{\cancel{(س-5)}(س-2)} دس + \int \frac{-3\cancel{(س-2)}}{\cancel{(س-2)}(س-5)} دس$$

$$ل = \int \frac{1}{س-2} دس + \int \frac{-3}{س-5} دس = لو_هـ|س-2| - 3لو_هـ|س-5| + ج$$

استودع الله ! .. دينك .. وإخلاص قلبك ، فإنها تمطر فتنًا ...

• 2024 دور ثالث/ جد $\int \frac{3س-2}{س^2-س-2}\,دس$

الحل/ $\int \frac{3س-2}{(س^2-س-2)}\,دس = \int \frac{3س-2}{(س+1)(س-2)}\,دس = ل$

* $\frac{3س-2}{(س+1)(س-2)} = \frac{أ}{س+1} + \frac{ب}{س-2}$

$\Leftarrow 3س-2 = أ(س-2) + ب(س+1)$

• عندما $س=2$ / $3\times2-2 = ب(2+1) \Leftarrow 4 = 3ب \Leftarrow ب = \frac{4}{3}$

• عندما $س=-1$ / $3\times-1-2 = أ(-1-2) \Leftarrow -5 = -3أ \Leftarrow أ = \frac{5}{3}$

$ل = \int \frac{\frac{5}{3}}{س+1}\,دس + \int \frac{\frac{4}{3}}{س-2}\,دس = \frac{5}{3} لو_{هـ}|س+1| + \frac{4}{3} لو_{هـ}|س-2| + جـ$

• طريقة (2):

$\int \frac{3س-2}{س^2-س-2}\,دس = \int \frac{\frac{5}{3}س + \frac{4}{3}س + \frac{4}{3} - \frac{10}{3}}{(س-2)(س+1)}\,دس$

$\Leftarrow ل = \int \frac{(\frac{5}{3}س - \frac{10}{3}) + (\frac{4}{3}س + \frac{4}{3})}{(س-2)(س+1)}\,دس$

$ل = \int \frac{\frac{5}{3}(س-2) + \frac{4}{3}(س+1)}{(س-2)(س+1)}\,دس = \int \frac{\frac{5}{3}\cancel{(س-2)}}{(س+1)\cancel{(س-2)}}\,دس + \int \frac{\frac{4}{3}\cancel{(س+1)}}{\cancel{(س+1)}(س-2)}\,دس$

$ل = \frac{5}{3}\int \frac{1}{س+1}\,دس + \frac{4}{3}\int \frac{1}{س-2}\,دس = \frac{5}{3} لو_{هـ}|س+1| + \frac{4}{3} لو_{هـ}|س-2| + جـ$

• 2025 دور أول/ إذا كان $ق(س) = \int \frac{\sqrt{س}}{س-3\sqrt{س}+2}\,دس$ ، جد $ق(س)$

الحل/

نفرض $\sqrt{س} = ص \Leftarrow س = ص^2 \Leftarrow دس = 2ص\,دص$

* $\int \frac{ص}{ص^2-3ص+2} \times 2ص\,دص = \int \frac{2ص^2}{(ص^2-3ص+2)}\,دص$

درجة البسط = درجة المقام ⇐ نلجأ للقسمة الطويلة

$2ص^2 \div (ص^2-3ص+2) = 2$

$2ص^2-6ص+4$

الباقي: $6ص-4$

$ق(س) = \int 2\,دص + \int \frac{6ص-4}{ص^2-3ص+2}\,دص$

$ق(س) = 2ص + \int \frac{6ص-4}{ص^2-3ص+2}\,دص$

$ل_1$ "كسور جزئية"

$ل_1 = \int \frac{6ص-4}{(ص-1)(ص-2)}\,دص = \int \frac{أ}{(ص-1)}\,دص + \int \frac{ب}{ص-2}\,دص$

$\Leftarrow 6ص-4 = أ(ص-2) + ب(ص-1)$

• عندما $ص=1$ / $6-4 = أ(1-2) \Leftarrow 2 = -أ \Leftarrow أ = -2$

• عندما $ص = ٢$ / $٦ \times ٢ - ٤ = ب(٢-١) \Leftarrow ب = ٨$

$\Leftarrow ل_١ = \int \frac{-٢}{ص-١} \, دص + \int \frac{٨}{ص-٢} \, دص = -٢ لو_هـ |ص-١| + ٨ لو_هـ |ص-٢| + جـ$

$ل_١ = -٢ لو_هـ |\sqrt{س}-١| + ٨ لو_هـ |\sqrt{س}-٢| + جـ$

$\Leftarrow ل = ٢\sqrt{س} - ٢ لو_هـ |\sqrt{س}-١| + ٨ لو_هـ |\sqrt{س}-٢| + جـ$

• 2025 دور أول / إذا كان $\int ق(س) \, دس = س \, لو_هـ س + جـ$ جد $\int \frac{ق(س^٢)}{س} \, دس$

الحل /

$\int ق(س) \, دس = س \, لو_هـ س + جـ$ نشتق الطرفين

$ق(س) = \frac{س}{س} + لو_هـ س \Leftarrow ق(س) = ١ + لو_هـ س$

$ل = \int \frac{ق(س^٢)}{س} \, دس = \int \frac{١ + لو_هـ س^٢}{س} \, دس = \int \frac{١ + ٢ لو_هـ س}{س} \, دس = \int \left(\frac{١}{س} + \frac{٢}{س} لو_هـ س\right) دس$

$ل = \int \frac{١}{س} \, دس + \int \frac{٢}{س} لو_هـ س \, دس = لو_هـ |س| + ٢ \underbrace{\int \frac{١}{س} لو_هـ س \, دس}_{ل_١}$

نفرض $لو_هـ س = ص \Leftarrow \frac{١}{س} \, دس = دص$

$دس = س \, دص$

$ل_١ = \int \frac{١}{س} \times ص \times س \, دص = \int ص \, دص = \frac{ص^٢}{٢} + جـ = \frac{١}{٢} (لو_هـ س)^٢ + جـ$

$\Leftarrow ل = لو_هـ |س| + ٢ \times \frac{١}{٢} (لو_هـ س)^٢ + جـ \Leftarrow ل = لو_هـ |س| + (لو_هـ س)^٢ + جـ$

• 2025 دور ثالث / جد $\int \frac{س+٥}{س - س^٢} \, دس$

الحل /

$ل = \int \frac{س+٥}{س(١-س)} \, دس = \int \frac{أ}{س} \, دس + \int \frac{ب}{١-س} \, دس$

$\Leftarrow س + ٥ = أ(١-س) + ب س$

• عندما $س = ١$ / $١ + ٥ = ب \Leftarrow ب = ٦$

• عندما $س = ٠$ / $٥ = أ(١-٠) \Leftarrow أ = ٥$

$ل = \int \frac{٥}{س} \, دس + \int \frac{٦}{١-س} \, دس = ٥ لو_هـ |س| - ٦ لو_هـ |١-س| + جـ$

• طريقة (٢):

$ل = \int \frac{س+٥}{س - س^٢} \, دس = \int \frac{٦س - ٥س + ٥}{س(١-س)} \, دس = \int \frac{٦س + (-٥س+٥)}{س(١-س)} \, دس$

$\Leftarrow ل = \int \frac{٥(١-س) + ٦س}{س(١-س)} \, دس = \int \frac{٥\cancel{(١-س)}}{س\cancel{(١-س)}} \, دس + \int \frac{٦\cancel{س}}{\cancel{س}(١-س)} \, دس$

$\Leftarrow ل = ٥ لو_هـ |س| - ٦ لو_هـ |١-س| + جـ$

• نابلس 2021 / جد $\int \frac{2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-2)^2}\,د\text{س}$

الحل /

$\text{ق} = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$, $دع = (\text{س}-2)^{-2}\,د\text{س}$

$د\text{ق} = \frac{2}{\text{س}}\,د\text{س}$, $ع = \frac{-1}{(\text{س}-2)}$

$\text{ل} = \frac{-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-2} + \int \frac{2}{\text{س}(\text{س}-2)}\,د\text{س}$

تجزئة كسور جزئية

* $\int \frac{2}{\text{س}(\text{س}-2)}\,د\text{س} = \int \frac{أ}{\text{س}}\,د\text{س} + \int \frac{ب}{\text{س}-2}\,د\text{س}$

$2 = أ(\text{س}-2) + ب\,\text{س}$

• عندما $\text{س}=0$ / $2 = أ(0-2) \Leftarrow 2 = -2أ \Leftarrow أ = -1$

• عندما $\text{س}=2$ / $2 = 2ب \Leftarrow ب = 1$

$\text{ل} = \frac{-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-2} + \int \frac{-1}{\text{س}}\,د\text{س} + \int \frac{1}{\text{س}-2}\,د\text{س}$

$\text{ل} = \frac{-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-2} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| + ج$

طريقة (2) /

$\int \frac{2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-2)^2}\,د\text{س} = \int \frac{2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-2)^2} + \frac{-2}{\text{س}(\text{س}-2)} + \frac{2}{\text{س}(\text{س}-2)}\,د\text{س}$

$\text{ل} = \int \left(\frac{-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})}{\text{س}-2}\right)' د\text{س} + \int \frac{2-\text{س}+\text{س}}{\text{س}(\text{س}-2)}\,د\text{س}$

$\text{ل} = \frac{-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-2} + \int \frac{-(\text{س}-2)+\text{س}}{\text{س}(\text{س}-2)}\,د\text{س}$

$\text{ل} = \frac{-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-2} + \int \frac{-(\text{س}-2)}{\text{س}(\text{س}-2)}\,د\text{س} + \int \frac{\text{س}}{\text{س}(\text{س}-2)}\,د\text{س}$

$\text{ل} = \frac{-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-2} + -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| + ج$

• نابلس 2024 / جد $\int \frac{1}{\text{هـ}^{-\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}}\,د\text{س}$

الحل / $\int \frac{1}{\text{هـ}^{-\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}}\,د\text{س} = \int \frac{1 \times \text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{-\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{هـ}^{\text{س}}}\,د\text{س} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{1 - (\text{هـ}^{\text{س}})^2}\,د\text{س}$

نفرض $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{س}}\,د\text{س} = د\text{ص} \Leftarrow د\text{س} = \frac{د\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}{1-\text{ص}^2} \times \frac{د\text{ص}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}} = \int \frac{د\text{ص}}{1-\text{ص}^2} = \int \frac{د\text{ص}}{(1-\text{ص})(1+\text{ص})}$

$ل = \int \frac{دص}{(1+ص)(1-ص)} = \int \frac{أ}{1-ص}\,دص + \int \frac{ب}{1+ص}\,دص$

$\Leftarrow 1 = أ(1+ص) + ب(1-ص)$

• عندما $ص = 1$ / $1 = أ(1+1) \Leftarrow 1 = 2أ \Leftarrow أ = \frac{1}{2}$

• عندما $ص = -1$ / $1 = أ(1-1) + ب(1+1) \Leftarrow 1 = 2ب \Leftarrow ب = \frac{1}{2}$

$ل = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-ص}\,دص + \int \frac{\frac{1}{2}}{1+ص}\,دص = -\frac{1}{2} لو_{هـ}|1-ص| + \frac{1}{2} لو_{هـ}|1+ص| + ج$

$ل = -\frac{1}{2} لو_{هـ}|1-هـ^{س}| + \frac{1}{2} لو_{هـ}|1+هـ^{س}| + ج \Leftarrow ل = \frac{1}{2} لو_{هـ}\left|\frac{1+هـ^{س}}{1-هـ^{س}}\right| + ج$

طريقة (2) /

$\int \frac{هـ^{س}}{1-(هـ^{س})^2}\,دس = \int \frac{\frac{هـ^{س}}{2} + \frac{هـ^{س}}{2} + \frac{1}{2}هـ^{2س} - \frac{1}{2}هـ^{2س}}{(1-هـ^{س})(1+هـ^{س})}\,دس = ل$

$\Leftarrow ل = \int \frac{\left(\frac{1}{2}هـ^{س} + \frac{1}{2}هـ^{2س}\right) + \left(\frac{1}{2}هـ^{س} - \frac{1}{2}هـ^{2س}\right)}{(1-هـ^{س})(1+هـ^{س})}\,دس$

$ل = \int \frac{\frac{1}{2}هـ^{س}(1+هـ^{س}) + \frac{1}{2}هـ^{س}(1-هـ^{س})}{(1-هـ^{س})(1+هـ^{س})}\,دس = \int \frac{\frac{1}{2}هـ^{س}\cancel{(1+هـ^{س})}}{(1-هـ^{س})\cancel{(1+هـ^{س})}}\,دس + \int \frac{\frac{1}{2}هـ^{س}\cancel{(1-هـ^{س})}}{\cancel{(1-هـ^{س})}(1+هـ^{س})}\,دس$

$\Leftarrow ل = -\frac{1}{2} لو_{هـ}|1-هـ^{س}| + \frac{1}{2} لو_{هـ}|1+هـ^{س}| + ج$

• رام الله 2024 / جد $\int \frac{جتاس}{1+3جاس - جتا(2س)}\,دس$

الحل / $\int \frac{جتاس}{1+3جاس - (1-2جا^2س)}\,دس = \int \frac{جتاس}{2جا^2س + 3جاس}\,دس$

نفرض $جاس = ص \Leftarrow جتاس\,دس = دص$

$ل = \int \frac{دص}{2ص^2 + 3ص} = \int \frac{دص}{ص(2ص+3)} = \int \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{2ص+3}\,دص$

$* \quad 1 = أ(2ص+3) + ب\,ص$

• عندما $ص = 0$ / $1 = 3أ \Leftarrow أ = \frac{1}{3}$

• عندما $ص = -\frac{3}{2}$ / $1 = -\frac{3}{2}ب \Leftarrow ب = -\frac{2}{3}$

$ل = \int \frac{\frac{1}{3}}{ص}\,دص + \int \frac{-\frac{2}{3}}{2ص+3}\,دص = +\frac{1}{3} لو_{هـ}|ص| - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} لو_{هـ}|2ص+3| + ج$

$\Leftarrow ل = +\frac{1}{3} لو_{هـ}|جاس| - \frac{1}{3} لو_{هـ}|2جاس+3| + ج$

• نابلس 2024 / جد $\int \frac{\text{جا}(٢\text{س})}{\text{جتا}(٢\text{س}) - ٩\text{جتاس} + ٥}\, \text{دس}$

الحل /

$$\int \frac{٢\text{جاس جتاس}}{(٢\text{جتا}^٢\text{س} - ١) - ٩\text{جتاس} + ٥}\, \text{دس} = \int \frac{٢\text{جاس جتاس}}{٢\text{جتا}^٢\text{س} - ٩\text{جتاس} + ٤}\, \text{دس}$$

نفرض $\text{جتاس} = \text{ص} \Leftarrow -\text{جاس دس} = \text{دص} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$$\text{ل} = \int \frac{\cancel{٢\text{جاس}} \times \text{ص}}{٢\text{ص}^٢ - ٩\text{ص} + ٤} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{-\text{جاس}}} = \int \frac{-٢\text{ص}}{٢\text{ص}^٢ - ٩\text{ص} + ٤}\, \text{دص}$$

$$\text{ل} = \int \frac{-٢\text{ص}}{(٢\text{ص} - ١)(\text{ص} - ٤)}\, \text{دص}$$

$$* \quad \frac{\text{أ}}{٢\text{ص} - ١} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} - ٤} = \frac{-٢\text{ص}}{(٢\text{ص} - ١)(\text{ص} - ٤)}$$

$\Leftarrow \text{أ}(\text{ص} - ٤) + \text{ب}(٢\text{ص} - ١) = -٢\text{ص}$

• عندما $\text{ص} = ٤$ / $\text{ب}(٢ \times ٤ - ١) = -٢ \times ٤ \Leftarrow ٧\text{ب} = -٨ \Leftarrow \text{ب} = \frac{-٨}{٧}$

• عندما $\text{ص} = \frac{١}{٢}$ / $\text{أ}(\frac{١}{٢} - ٤) = -٢ \times \frac{١}{٢} \Leftarrow -\frac{٧}{٢}\text{أ} = -١ \Leftarrow \text{أ} = \frac{٢}{٧}$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\frac{٢}{٧}}{٢\text{ص} - ١}\, \text{دص} + \int \frac{\frac{-٨}{٧}}{\text{ص} - ٤}\, \text{دص} = \frac{١}{٧} \text{لو}_\text{هـ}|٢\text{ص} - ١| - \frac{٨}{٧} \text{لو}_\text{هـ}|\text{ص} - ٤| + \text{ج}$$

$$\text{ل} = \frac{١}{٧} \text{لو}_\text{هـ}|٢\text{جتاس} - ١| - \frac{٨}{٧} \text{لو}_\text{هـ}|\text{جتاس} - ٤| + \text{ج}$$

• سلفيت 2025 / جد $\int \frac{\text{ظاس}}{٢٥ - (\text{لو}_\text{هـ}\text{جتاس})^٢}\, \text{دس}$

الحل / نفرض $\text{لو}_\text{هـ}\text{جتاس} = \text{ص} \Leftarrow \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}\, \text{دس} = \text{دص} \Leftarrow -\text{ظاس دس} = \text{دص}$

$\Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{ظاس}}$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int \frac{\cancel{\text{ظاس}}}{٢٥ - \text{ص}^٢} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{-\text{ظاس}}} = \int \frac{\text{دص}}{\text{ص}^٢ - ٢٥}$$

$$\text{ل} = \int \frac{\text{دص}}{(\text{ص} - ٥)(\text{ص} + ٥)} = \int \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٥}\, \text{دص} + \int \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٥}\, \text{دص}$$

$\Leftarrow \text{أ}(\text{ص} + ٥) + \text{ب}(\text{ص} - ٥) = ١$

• عندما $\text{ص} = ٥$ / $\text{أ}(٥ + ٥) = ١ \Leftarrow ١٠\text{أ} = ١ \Leftarrow \text{أ} = \frac{١}{١٠}$

• عندما $\text{ص} = -٥$ / $\text{ب}(-٥ - ٥) = ١ \Leftarrow -١٠\text{ب} = ١ \Leftarrow \text{ب} = \frac{-١}{١٠}$

$\Leftarrow$ $ل = \int \frac{\frac{1}{10}}{ص-5} \, دص + \int \frac{\frac{-1}{10}}{ص+5} \, دص$

$ل = \frac{1}{10} لوهـ|ص-5| + \frac{-1}{10} لوهـ|ص+5| + جـ$

$ل = \frac{1}{10} لوهـ|(لوقباس) - 5| - \frac{1}{10} لوهـ|(لوقباس)+5| + جـ$

• سؤال الحلل 2025 / إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالقاعدة $\left(\frac{س+2}{س^2+س}\right)$ جد قاعدة ق(س) علماً بأن $ق(1) = لوهـ\left(\frac{هـ}{2}\right)$

الحل/ ميل المماس $= قَ(س) = \frac{س+2}{س^2+س}$

$\Leftarrow$ $\int قَ(س) \, دس = \int \frac{س+2}{س(س+1)} \, دس$

$ق(س) = \int \frac{س+2}{س(س+1)} \, دس$ "كسور جزئية"

$ق(س) = \int \frac{س+2}{س(س+1)} \, دس = \int \frac{أ}{س} \, دس + \int \frac{ب}{س+1} \, دس$

$\Leftarrow$ $س+2 = أ(س+1) + ب س$

• عندما س = 0 / أ = 2

• عندما س = −1 / $-1+2 = -ب \Leftarrow 1 = -ب \Leftarrow ب = -1$

$ق(س) = \int \frac{2}{س} \, دس + \int \frac{-1}{س+1} \, دس = 2لوهـ|س| - لوهـ|س+1| + جـ$

$ق(1) = 2لوهـ(1) - لوهـ(1+1) + جـ \Leftarrow لوهـ\left(\frac{هـ}{2}\right) = -لوهـ2 + جـ$

$\Leftarrow$ $\cancel{لوهـ هـ} - \cancel{لوهـ2} = -لوهـ2 + جـ \Leftarrow 1 = جـ$

$\Leftarrow$ $ق(س) = 2لوهـ|س| - لوهـ|س+1| + 1$

• طولكرم 2025 / إذا كان ق(س) متصل على ح وكان $\frac{س^2 قَ(س)}{4} - 2 = ق(س) + قَ(س)$ جد قاعدة ق(س) علماً بأن ق يمر ب (0، −1) ، ق(س) > −2

الحل/ $\frac{س^2 قَ(س)}{4} - 2 = ق(س) + قَ(س) \Leftarrow \frac{س^2 قَ(س)}{4} - قَ(س) = ق(س) + 2$

$\Leftarrow$ $قَ(س)\left(\frac{س^2}{4} - 1\right) = ق(س) + 2 \Leftarrow قَ(س)\left(\frac{س^2-4}{4}\right) = ق(س)+2$

$\Leftarrow$ $\frac{قَ(س)}{ق(س)+2} = \frac{4}{س^2-4} \Leftarrow \int \frac{قَ(س)}{ق(س)+2} \, دس = \int \frac{4}{س^2-4} \, دس$

$\Leftarrow$ $لوهـ|ق(س)+2| = \int \frac{4}{(س-2)(س+2)} \, دس$

كسور جزئية

$$* \quad \frac{4}{(س-2)(س+2)} = \frac{أ}{س-2} + \frac{ب}{س+2}$$

$$\Leftarrow 4 = أ(س+2) + ب(س-2)$$

• عندما س = 2 / $4 = أ(2+2) \Leftarrow 4 = 4أ \Leftarrow أ = 1$

• عندما س = -2 / $4 = أ(\cancel{-2+2}) + ب(-2-2) \Leftarrow 4 = -4ب \Leftarrow -1 = ب$

$$ل = \int \frac{1}{س-2}\,دس + \int \frac{-1}{س+2}\,دس = لوھ|س-2| - لوھ|س+2| + جـ = لوھ\left|\frac{س-2}{س+2}\right| + جـ$$

$$\Leftarrow لوھ(ق(س)+2) = لوھ\left|\frac{س-2}{س+2}\right| + جـ$$

ق(س) يمر ب (0، -1) $\Leftarrow$ ق(0) = -1

$$لوھ(ق(0)+2) = لوھ\left|\frac{0-2}{0+2}\right| + جـ \Leftarrow لوھ(-1+2) = لوھ 1 + جـ \Leftarrow جـ = صفر$$

$$\Leftarrow لوھ(ق(س)+2) = لوھ\left|\frac{س-2}{س+2}\right| \Leftarrow ق(س)+2 = \left|\frac{س-2}{س+2}\right|$$

$$\Leftarrow ق(س) = \left|\frac{س-2}{س+2}\right| - 2$$

.. أسئلة للمهتمين للوحدة الرابعة ..

1/ $\int س \sqrt[3]{\frac{1}{س^3} - \frac{1}{س^2}}\ دس$.

الحل/ $\int س \sqrt[3]{\frac{1}{س^3} - \frac{س}{س^3}}\ دس = \int س \sqrt[3]{\frac{1-س}{س^3}}\ دس = \int س \times \frac{\sqrt[3]{(1-س)}}{\sqrt[3]{س^3}}\ دس = \int \cancel{\frac{س}{س}} (1-س)^{\frac{1}{3}}\ دس$

$= \int (1-س)^{\frac{1}{3}}\ دس = -\frac{3}{4}(1-س)^{\frac{4}{3}} + جـ$

$\Leftarrow ل = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-س)^4} + جـ$

2/ إذا كان $م(س) = قتاس + ظتاس + س$ أصليًا للاقتران $ق(س) = \frac{م\ جتاس}{1 - جتاس}$ ، $س \in]0, \frac{\pi}{2}[$
ما قيمة الثابت م

الحل/ $م(س)$ اقتران أصلي لـ $ق(س) \Leftarrow م'(س) = ق(س)$

$م(س) = قتاس + ظتاس + س$

$م'(س) = -قتاس ظتاس - قتا^2س + 1 = -\frac{1}{جاس} \times \frac{جتاس}{جاس} - \frac{1}{جا^2س} + 1$

$\Leftarrow م'(س) = \frac{-جتاس}{جا^2س} - \frac{1}{جا^2س} + 1$

$م'(س) = \frac{-(جتاس + 1)}{جا^2س} + 1 = \frac{-(جتاس+1)}{1 - جتا^2س} + 1 = \frac{-\cancel{(جتاس+1)}}{(1-جتاس)\cancel{(1+جتاس)}} + 1$

$م'(س) = \frac{-1}{1-جتاس} + 1 = \frac{\cancel{-1+1}-جتاس}{1-جتاس} = \frac{-جتاس}{1-جتاس}$

$\therefore م'(س) = ق(س) \Leftarrow \frac{-جتاس}{1-جتاس} = \frac{م\ جتاس}{1-جتاس}$ وبالمقارنة $م = -1$

3/ إذا كان ميل المماس لمنحنى $قَ(س)$ عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $م(س) = 18 + 192 س^{-4}$
أوجد قاعدة الاقتران $ق(س)$ الذي يقطع محور السينات عند (س = 1) ، (س = $\frac{4}{3}$)

الحل/ ميل المماس لـ $قَ(س) = قً(س) = 18 + 192 س^{-4}$

$\int قً(س)\ دس = \int 18 + 192 س^{-4}\ دس \Leftarrow قَ(س) = 18س + 192 \times \frac{س^{-3}}{-3} + جـ_1$

$\Leftarrow قَ(س) = 18س - 64 س^{-3} + جـ_1$

$\int قَ(س)\ دس = \int 18س - 64 س^{-3} + جـ_1\ دس \Leftarrow ق(س) = 9س^2 - \frac{64 س^{-2}}{-2} + جـ_1 س + جـ_2$

$\Leftarrow ق(س) = 9س^2 + 32 س^{-2} + جـ_1 س + جـ_2$

$\Leftarrow$ ق(س) يقطع محور السينات عند(س) = 1 ، $\frac{4}{3}$ $\Leftarrow ق(1) = 0$ ، $ق(\frac{4}{3}) = 0$

$ق(1) = 9 + 32 + جـ_1 + جـ_2 \Leftarrow 0 = 41 + جـ_1 + جـ_2 \Leftarrow -41 = جـ_1 + جـ_2 \longleftarrow$ معادلة (1)

$ق(\frac{4}{3}) = 9(\frac{4}{3})^2 + 32(\frac{4}{3})^{-2} + \frac{4}{3}جـ_1 + جـ_2 \Leftarrow 0 = 16 + \cancel{32} \times \frac{9}{\cancel{16}} + \frac{4}{3}جـ_1 + جـ_2$

$\Leftarrow -34 = \frac{4}{3}جـ_1 + جـ_2 \longleftarrow$ معادلة (2)

(٢) − (١) / $-34 - -41 = \frac{4}{3}ج_1 - ج_1 \Leftarrow 7 = \frac{1}{3}ج_1 \Leftarrow 21 = ج_1$

نعوض ($ج_1 = 21$) في (١) / $-41 = 21 + ج_2 \Leftarrow ج_2 = -62$

$\Leftarrow$ ق(س) = $9س^4 + 32س^2 + 21س - 62$

٤/ إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة يعطى بالقاعدة $-\frac{جتا^2س}{جا^2س}$ جد قاعدة الاقتران المار بالنقطة (٠، ١)

الحل/ ميل العمودي = $-\frac{جتا^2س}{جا^2س}$ $\Leftarrow$ ميل المماس = ق'(س) = $\frac{جا^2س}{جتا^2س}$

$\Leftarrow \int ق'(س)\,دس = \int \frac{جا^2س}{جتا^2س}\,دس \Leftarrow ق(س) = \int \frac{جا^2س \times جا^2س}{جتا^2س}\,دس$

$\Leftarrow ق(س) = \int \frac{(1 - جتا^2س)}{جتا^2س} \times جا^2س\,دس = \int \left(\frac{1}{جتا^2س} - \frac{جتا^2س}{جتا^2س}\right) \times جا^2س\,دس$

$ق(س) = \int (قا^2س - 1)\,جا^2س\,دس = \int قا^2س\,جا^2س - جا^2س\,دس = \int \frac{جا^2س}{جتا^2س} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}جتا(2س)\right)دس$

$ق(س) = \int ظا^2س - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}جتا(2س)\,دس$

$ق(س) = \int (قا^2س - 1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}جتا(2س)\,دس = \int قا^2س - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}جتا(2س)\,دس$

$ق(س) = ظاس - \frac{3}{2}س + \frac{1}{4}جا(2س) + ج$

ق(س) يمر بـ (٠، ١) $\Leftarrow ق(0) = \cancel{ظا(0)} + \cancel{\frac{1}{4}جا(0)} + ج$

$ج = 1$

$\Leftarrow ق(س) = ظاس - \frac{3}{2}س + \frac{1}{4}جا(2س) + 1$

٥/ إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالقاعدة $ل(س) = 2س\sqrt{14 + 2لو_ھ س}$ جد قاعدة الاقتران ق(س) المار بالنقطة (ھ، ٢)

الحل/ ميل المماس = ق'(س) = $\frac{-1}{\text{ميل العمودي}}$ $\Leftarrow$ ق'(س) = $\frac{-1}{2س\sqrt{14 + 2لو_ھ س}}$

$\Leftarrow \int ق'(س)\,دس = \int \frac{-1}{2س\sqrt{14 + 2لو_ھ س}}\,دس = \int \frac{-2}{4س} \times (14 + 2لو_ھ س)^{-\frac{1}{2}}\,دس$

• لاحظ $(14 + 2لو_ھ س)' = \frac{2}{س}$

نطبق $\int ق^ن(س)\,ق'(س)\,دس = \frac{ق^{ن+1}(س)}{ن+1} + ج$

$\Leftarrow ق(س) = -\frac{1}{4}\frac{(14 + 2لو_ھ س)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + ج \Leftarrow -\frac{1}{2}\sqrt{14 + 2لو_ھ س} + ج = ق(س)$

$ق(ھ) = -\frac{1}{2}\sqrt{14 + 2لو_ھ ھ} + ج \Leftarrow 2 = -\frac{1}{2}\sqrt{14 + 2} + ج \Leftarrow 2 = -2 + ج \Leftarrow ج = 4$

⇐ ق(س) = −$\frac{1}{2}$ √(٤١ + ٢ لوهـ س) + ٤

• ملاحظة / يمكن حل التكامل عن طريق فرض ص = √(٤١ + ٢ لوهـ س)

١٦/ اذا كان م(س)، ل(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س) المرسوم فوق محور السينات
إذا علمت أن ق(س) يمر ب (١، ٤) والمماس المرسوم له عند (٢، ٤) يصنع مع محور السينات السالب
زاوية مقدارها ٤٥ درجة، جد قَ(١) علماً بأن م³(س) − هـ³(س) = ٨س³ + ٢، ق(س) ≠ ٠

الحل/ * م(س)، هـ(س) اقترانين أصليين لـ ق(س) ⇐ مَ(س) = هـَ(س) = ق(س)

* ق(س) يمر ب (١، ٤) ⇐ ق(١) = ٤

* المماس المرسوم لـ ق عند (٢، ٤) يصنع (∠٤٥°) مع س− ⇐ ظا(١٨٠ − ٤٥) = قَ(٢)
ظا١٣٥ = −١ = قَ(٢)

(٢، ٤) نقطة تماس ⇐ ق(٢) = ٤ = مَ(٢) = هـَ(٢)

* م³(س) − هـ³(س) = ٨س³ + ٢   "فرق مكعبين"

(م(س) − هـ(س)) (م²(س) + م(س) هـ(س) + هـ²(س)) = ٨س³ + ٢

⇐ جـ ((م(س) − هـ(س))² + ٢هـ(س)م(س) + م(س)هـ(س)) = ٨س³ + ٢

جـ (جـ² + ٣م(س) هـ(س)) = ٨س³ + ٢   نشتق

[جـ (٠ + ٣م(س)هـَ(س) + ٣مَ(س) هـ(س)) = ٨ × ٣س²] ÷ ٣

جـ (م(س)هـَ(س) + مَ(س)هـ(س)) = ٨س²

جـ (ق(س) م(س) + ق(س) هـ(س)) = ٨س²

⇐ جـ ق(س)(م(س) + هـ(س)) = ٨س²   نشتق

جـ ق(س)[مَ(س) + هـَ(س)] + جـ قَ(س)[م(س) + هـ(س)] = ١٦س

جـ ق(٢)(مَ(٢) + هـَ(٢)) + جـ قَ(٢)(م(٢) + هـ(٢)) = ١٦ × ٢

جـ(٤)(٤ + ٤) + −١(٨) = ٣٢

٣٢جـ − ٨ = ٣٢ ⇐ ٣٢جـ = ٤٠ ⇐ جـ = $\frac{٥}{٤}$

جـ ق(س)(م(س) + هـ(س)) = ٨س²

جـ ق(٢)(م(٢) + هـ(٢)) = ٨ × ٢²

جـ × ~~٤~~ (م(٢) + هـ(٢)) = ٨ × ~~٤~~

⇐ جـ (م(٢) + هـ(٢)) = ٨

جـ ق(١)(م(١) + هـ(١)) = ٨

$\frac{٥}{٤}$ × ~~٤~~ (م(١) + هـ(١)) = ٨

م(١) + هـ(١) = $\frac{٨}{٥}$

عندما س = ١

$\frac{٥}{٤}$ ق(١)(٢ق(١)) + $\frac{٥}{٤}$ قَ(١)(م(١) + هـ(١)) = ١٦ × ١

($\frac{٥}{٤}$ × ٢ × ٤ × ٤) + $\frac{٥}{٤}$ قَ(١) × $\frac{٨}{٥}$ = ١٦

٤٠ + ٢قَ(١) = ١٦

٢قَ(١) = −٢٤ ⇐ قَ(١) = −١٢

١٧/ ق(س) قابلاً للاشتقاق حتى المشتقة الثانية وكان ق(س) ، ق′(س) ، ق″(س) موجبات دائماً
أجد قاعدة ق(س) علماً بأن $\text{ق}(\text{س})\text{ق}''(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})\text{ق}'(\text{س}) - (\text{ق}'(\text{س}))^2 = ٠$
حيث $\text{ق}(٠) = \text{ق}'(٠) = \text{هـ}$

الحل/

$$\text{ق}(\text{س})\text{ق}''(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})\text{ق}'(\text{س}) - (\text{ق}'(\text{س}))^2 = \text{صفر}$$

$$\frac{\text{ق}(\text{س})\text{ق}''(\text{س}) - (\text{ق}'(\text{س}))^2}{\text{ق}^2(\text{س})} = \frac{\text{ق}(\text{س})\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}^2(\text{س})}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{ق}(\text{س})\text{ق}''(\text{س}) - (\text{ق}'(\text{س}))^2}{\text{ق}^2(\text{س})} = \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}$$

$$\Leftarrow \left(\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\right)' = \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} \Leftarrow \frac{\left(\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\right)'}{\left(\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\right)} = 1$$

بأخذ التكامل للطرفين

$$\Leftarrow \int \frac{\left(\frac{\text{ق}'}{\text{ق}}\right)'}{\left(\frac{\text{ق}'}{\text{ق}}\right)}\, \text{دس} = \int \text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\left(\frac{\text{ق}'}{\text{ق}}\right)(\text{س})\right| = \text{س} + \text{جـ} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{ق}'(٠)}{\text{ق}(٠)}\right) = ٠ + \text{جـ} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{هـ}}{\text{هـ}}\right) = \text{جـ} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}} 1 = \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{صفر} = \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\right) = \text{س} \Leftarrow \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ق}(\text{س})) = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ق}(٠) = \text{هـ}^{٠} + \text{جـ} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = 1 + \text{جـ} \Leftarrow \cancel{1} = \cancel{1} + \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{جـ} = ٠$$

$$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$$

١٨/ إذا كان $\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{س}$ وكان $\text{ق}(\text{هـ}) = \text{هـ}^{\text{هـ}}$ وكذلك $\text{ق}(\text{هـ}^2) = \text{ق}(\text{هـ}^{\text{ن}})$
ما قيمة الثابت ن

الحل/

$$\left[\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})\,\text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{س}\right] \div \text{س} \quad ، \text{س} \neq ٠$$

$$\text{ق}'(\text{س})\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{ق}(\text{س}) \times \frac{1}{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{س}}$$

$$(\text{ق}(\text{س})\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})' = \text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\Leftarrow \int (\text{ق}(\text{س})\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})'\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} \Leftarrow \text{ق}(\text{س})\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}(\text{هـ})\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{هـ}} + \text{جـ} \Leftarrow \cancel{\text{هـ}^{\text{هـ}}} = \cancel{\text{هـ}^{\text{هـ}}} + \text{جـ} \Leftarrow ٠ = \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{ق}(\text{س})\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \Leftarrow \text{ق}(\text{هـ}^2) = \frac{\text{هـ}^{\text{هـ}^2}}{\cancel{\text{لو}_{\text{هـ}}}\text{هـ}^2} = \frac{\text{هـ}^{\text{هـ}^2}}{2}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{ن}}}}{\text{ن}} = \text{ق}(\text{هـ}^{\text{ن}})$$

⇐ ق $(هـ^{٢})$ = ق $(هـ^{ن})$ ⇐ $\frac{هـ^{٢}}{٢} = \frac{هـ^{ن}}{ن}$ ⇐ $ن = ٢$

/٩ إذا كان $\int (س^{٣} هـ^{س}) \, دس = أ س^{٣} هـ^{س} + ب س^{٢} هـ^{س} + جـ س هـ^{س} + د هـ^{س} + ل$
ما قيمة المقدار $\frac{أ د}{ب + جـ}$

الحل/ $[\int (س^{٣} هـ^{س}) \, دس = أ س^{٣} هـ^{س} + ب س^{٢} هـ^{س} + جـ س هـ^{س} + د هـ^{س} + ل]'$

$س^{٣} هـ^{س} = أ س^{٣} هـ^{س} + ٣أ س^{٢} هـ^{س} + ب س^{٢} هـ^{س} + ٢ب س هـ^{س} + جـ س هـ^{س} + جـ هـ^{س} + د هـ^{س}$

⇐ $س^{٣} هـ^{س} = هـ^{س} \left(أ س^{٣} + (٣أ + ب) س^{٢} + (٢ب + جـ) س + (جـ + د)\right)$

⇐ $س^{٣} = أ س^{٣} + (٣أ + ب) س^{٢} + (٢ب + جـ) س + (جـ + د)$ بالمقارنة

* $س^{٣} = أ س^{٣}$ ⇐ $\boxed{أ = ١}$
* $٠ = ٣أ + ب$ ⇐ $٠ = ٣ + ب$ ⇐ $\boxed{ب = -٣}$
* $٠ = ٢ب + جـ$ ⇐ $٠ = -٢ \times ٣ + جـ$ ⇐ $\boxed{جـ = ٦}$
* $٠ = جـ + د$ ⇐ $٠ = ٦ + د$ ⇐ $\boxed{د = -٦}$

المطلوب/ $\frac{أ د}{ب + جـ} = \frac{١ \times -٦}{-٣ + ٦} = \frac{-٦}{٣} = -٢$

/١٠ $\int \sqrt{قتا^{٢}س + قا^{٢}س} \, دس$ ، $س \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

الحل/ $\int \sqrt{قتا^{٢}س + قا^{٢}س} \, دس = \int \sqrt{ظتا^{٢}س + ١ + ظا^{٢}س + ١} \, دس = \int \sqrt{ظا^{٢}س + ٢ + ظتا^{٢}س} \, دس$

⇐ $ل = \int \sqrt{(ظاس + ظتاس)^{٢}} \, دس = \int |ظاس + ظتاس| \, دس$ وبما أن $س \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

⇐ $ل = \int ظاس + ظتاس \, دس = \int \frac{جاس}{جتاس} + \frac{جتاس}{جاس} \, دس$

$ل = -لو_{هـ}|جتاس| + لو_{هـ}|جاس| + جـ = لو_{هـ}\left|\frac{جاس}{جتاس}\right| + جـ$ ⇐ $ل = لو_{هـ}|ظاس| + جـ$

/١١ جد $\int \frac{٤ظا^{٢}س}{١ - ٢ظا^{٢}س + ظا^{٤}س} \, دس$

متطابقة

$ل = \int \frac{٤ظا^{٢}س}{(١ - ظا^{٢}(س))^{٢}} \, دس = \int \left(\frac{٢ظاس}{١ - ظا^{٢}س}\right)^{٢} دس = \int (ظا(٢س))^{٢} \, دس$

$ل = \int ظا^{٢}(٢س) \, دس = \int قا^{٢}(٢س) - ١ \, دس = \frac{١}{٢} ظا(٢س) - س + جـ$

/١٢ إذا كان $\int \frac{ق(س)}{جا^{٥}س} \, دس = \frac{١}{٤} قتا^{٤}س + جـ$ ، جد $\int ق(س) \, دس$

الحل/ $2)\ \int \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{جا}^5\text{س}}\,\text{دس} = \frac{1}{4}\,\text{قتا}^4\text{س} + \text{جـ}$ ⇐ $\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{جا}^5\text{س}} = \text{قتا}^3\text{س} \times -\text{قتاس ظتاس}$

⇐ $\text{ق}(\text{س}) = -\text{قتا}^4\text{س ظتاس} \times \text{جا}^5\text{س}$ ⇐ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{-1}{\text{جا}^4\text{س}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \times \text{جا}^5\text{س}$

⇐ $\text{ق}(\text{س}) = -\text{جتاس}$

المطلوب/ $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int -\text{جتاس}\,\text{دس} = -\text{جاس} + \text{جـ}$

13/ $\int \frac{\text{س}}{1+\text{س}^4 - \sqrt{1+\text{س}^4}}\,\text{دس}$

الحل/ $\int \frac{\text{س}}{(\sqrt{1+\text{س}^4})^2 - \sqrt{1+\text{س}^4}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}}{\sqrt{1+\text{س}^4}\,(\sqrt{1+\text{س}^4} - 1)}\,\text{دس}$

نفرض $\text{س}^2 = \text{ص}$ ⇐ $2\text{س}\,\text{دس} = \text{دص}$

⇐ $\text{ل} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{دص}}{\sqrt{1+\text{ص}^2}\,(\sqrt{1+\text{ص}^2} - 1)} \times \frac{(\sqrt{1+\text{ص}^2} + 1)}{(\sqrt{1+\text{ص}^2} + 1)}$

$\text{ل} = \frac{1}{2}\int \frac{(\sqrt{1+\text{ص}^2} + 1)\,\text{دص}}{\sqrt{1+\text{ص}^2}\,(\cancel{1}+\text{ص}^2 - \cancel{1})} = \int \frac{\sqrt{1+\text{ص}^2} + 1}{2\text{ص}^2\sqrt{1+\text{ص}^2}}\,\text{دص}$

$\text{ل} = \int \frac{\cancel{\sqrt{1+\text{ص}^2}}}{2\text{ص}^2\cancel{\sqrt{1+\text{ص}^2}}}\,\text{دص} + \int \frac{1}{2\text{ص}^2\sqrt{1+\text{ص}^2}}\,\text{دص}$

$\text{ل} = \int \frac{1}{2}\text{ص}^{-2}\,\text{دص} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{-\sqrt{\text{ص}^2+1}}{\text{ص}}\right)'\,\text{دص}$

$\text{ل} = \frac{-1}{2\text{ص}} + \frac{-\sqrt{\text{ص}^2+1}}{2\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{-1}{2\text{س}^2} - \frac{\sqrt{\text{س}^4+1}}{2\text{س}^2} + \text{جـ}$

$\text{ل} = \frac{-1}{2\text{س}^2}\left(1 + \sqrt{\text{س}^4+1}\right) + \text{جـ}$

طريقة (2)/ $\int \frac{1}{2\text{ص}^2\sqrt{1+\text{ص}^2}}\,\text{دص} = \int \frac{1}{2\text{ص}^2\sqrt{\text{ص}^2(\text{ص}^{-2}+1)}}\,\text{دص}$

$\text{ل} = \int \frac{1}{2\text{ص}^2\sqrt{\text{ص}^2}\sqrt{\text{ص}^{-2}+1}}\,\text{دص} = \int \frac{1}{2\text{ص}^3\sqrt{\text{ص}^{-2}+1}}\,\text{دص}$

نفرض $\left(\sqrt{\text{ص}^{-2}+1} = \text{ع}\right)^2$ ⇐ $\text{ص}^{-2} + 1 = \text{ع}^2$ ⇐ $-\cancel{2}\text{ص}^{-3}\,\text{دص} = \cancel{2}\text{ع}\,\text{دع}$

⇐ $\text{دص} = -\text{ع}\,\text{ص}^3\,\text{دع}$

$\text{ل} = \int \frac{1}{2\cancel{\text{ص}^3} \times \cancel{\text{ع}}} \times -\cancel{\text{ع}}\,\cancel{\text{ص}^3}\,\text{دع} = \int -\frac{1}{2}\,\text{دع} = -\frac{1}{2}\text{ع} + \text{جـ}$

$\text{ل} = -\frac{1}{2}\sqrt{\text{ص}^{-2}+1} + \text{جـ} = -\frac{1}{2}\sqrt{\text{س}^{-4}+1} + \text{جـ}$

١٤/ $\int \text{هـ}^{س} \left(\dfrac{1+\text{جاس}}{1+\text{جتاس}}\right) \text{دس}$

الحل/ $ل = \int \text{هـ}^{س} \left(\dfrac{1+\text{جاس}}{1+\text{جتاس}}\right) \text{دس} = \int \dfrac{\text{هـ}^{س} + \text{هـ}^{س}\text{جاس}}{1+\text{جتاس}} \text{دس}$

$ل = \int \dfrac{\text{هـ}^{س}}{1+\text{جتاس}} \text{دس} + \int \dfrac{\text{هـ}^{س}\text{جاس}}{1+\text{جتاس}} \text{دس}$

أجزاء

* $ص = \dfrac{\text{جاس}}{1+\text{جتاس}}$ ، $\text{دع} = \text{هـ}^{س} \text{دس}$

$\text{دص} = \dfrac{1}{1+\text{جتاس}} \text{دس}$ ، $ع = \text{هـ}^{س}$

$ل = \cancel{\int \dfrac{\text{هـ}^{س}}{1+\text{جتاس}} \text{دس}} + \dfrac{\text{هـ}^{س}\text{جاس}}{1+\text{جتاس}} - \cancel{\int \dfrac{\text{هـ}^{س}}{1+\text{جتاس}} \text{دس}}$

$\Leftarrow ل = \dfrac{\text{هـ}^{س}\text{جاس}}{\text{جتاس}+1} + ج$

* $ص = \dfrac{\text{جاس}}{1+\text{جتاس}}$

$\text{دص} = \dfrac{(1+\text{جتاس})\,\text{جتاس} - \text{جاس} \times -\text{جاس}}{(1+\text{جتاس})^2} \text{دس}$

$\text{دص} = \dfrac{\text{جتاس} + \text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}}{(1+\text{جتاس})^2} \text{دس}$

$\text{دص} = \dfrac{\text{جتاس}+1}{(1+\text{جتاس})^2} \text{دس}$

$\text{دص} = \dfrac{1}{(\text{جتاس}+1)} \text{دس}$

طريقة (٢):

$\int \text{هـ}^{س} \left(\dfrac{1+\text{جاس}}{1+\text{جتاس}}\right) \text{دس} = \int \text{هـ}^{س} \left(\dfrac{1+2\text{جا}(\frac{س}{2})\text{جتا}(\frac{س}{2})}{\cancel{1}+2\text{جتا}^2(\frac{س}{2})\cancel{-1}}\right) \text{دس}$

$ل = \int \text{هـ}^{س} \left(\dfrac{1}{2\text{جتا}^2\frac{س}{2}} + \dfrac{\cancel{2}\text{جا}\frac{س}{2}\,\cancel{\text{جتا}(\frac{س}{2})}}{\cancel{2}\text{جتا}^{\cancel{2}}(\frac{س}{2})}\right) \text{دس}$

$ل = \int \text{هـ}^{س} \left(\tfrac{1}{2}\text{قا}^2(\tfrac{س}{2}) + \text{ظا}(\tfrac{س}{2})\right) \text{دس} = \int \left(\text{هـ}^{س}\text{ظا}\tfrac{س}{2}\right)' \text{دس} = \text{هـ}^{س}\text{ظا}\tfrac{س}{2} + ج$

أو

$ل = \int \tfrac{1}{2}\text{هـ}^{س}\text{قا}^2(\tfrac{س}{2}) \text{دس} + \int \text{هـ}^{س}\text{ظا}(\tfrac{س}{2}) \text{دس}$ "أجزاء"

$ص = \text{هـ}^{س}$ ، $\text{دع} = \tfrac{1}{2}\text{قا}^2(\tfrac{س}{2}) \text{دس}$

$\text{دص} = \text{هـ}^{س} \text{دس}$ ، $ع = \text{ظا}(\tfrac{س}{2})$

$ل = \text{هـ}^{س}\text{ظا}(\tfrac{س}{2}) - \cancel{\int \text{هـ}^{س}\text{ظا}(\tfrac{س}{2}) \text{دس}} + \cancel{\int \text{هـ}^{س}\text{ظا}(\tfrac{س}{2}) \text{دس}} = \text{هـ}^{س}\text{ظا}(\tfrac{س}{2}) + ج$

١٥/ $\int \left(\dfrac{1-\text{جاس}}{1+\text{جاس}}\right)^7 \text{قا}^2\text{س} \, \text{دس}$

الحل/ $\dfrac{1-\text{جاس}}{1+\text{جاس}} = \dfrac{(1-\text{جاس})(1-\text{جاس})}{(1+\text{جاس})(1-\text{جاس})} = \dfrac{1-2\text{جاس}+\text{جا}^2\text{س}}{1-\text{جا}^2\text{س}} = \dfrac{1-2\text{جاس}+\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$$\Leftarrow \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} - \frac{2\,\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} + \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \text{قا}^2\text{س} - 2\,\text{ظاس قاس} + \text{ظا}^2\text{س} = (\text{قاس} - \text{ظاس})^2$$

$$\Leftarrow \int \left(\frac{1-\text{جاس}}{1+\text{جاس}}\right)^7 \text{قا}^2\text{س}\,\text{ءس} = \int \left((\text{قاس}-\text{ظاس})^2\right)^7 \text{قا}^2\text{س} = \text{ل}$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \int (\text{قاس} - \text{ظاس})^{14}\,\text{قا}^2\text{س}\,\text{ءس}$$

نفرض $\text{قاس} - \text{ظاس} = \text{ص}$

$$(\text{قاس ظاس} - \text{قا}^2\text{س})\,\text{ءس} = \text{ءص} \Leftarrow \text{قاس}(\text{ظاس} - \text{قاس})\,\text{ءس} = \text{ءص}$$

$$\text{ل} = \int (\text{قاس} - \text{ظاس})^{13} \times (\text{قاس} - \text{ظاس}) \times \text{قاس}\,\text{ءس}$$

$$\text{ل} = \int -\text{ص}^{13}\,\text{ءص} = -\frac{1}{14}\text{ص}^{14} + \text{ج} = \frac{-1}{14}(\text{قاس} - \text{ظاس})^{14} + \text{ج}$$

16/ $\int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{(\text{جاس} + \text{جتاس})^4}\,\text{ءس}$

الحل/ $\text{ل} = \int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{(\text{جاس} + \text{جتاس})^4}\,\text{ءس}$ اخراج جتاس عامل مشترك من المقام

$$\text{ل} = \int \frac{\cancel{\text{جتا}^2\text{س}}}{(\text{جتاس})^{\cancel{4}}(\text{ظاس}+1)^4}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{ل} = \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} \times \frac{1}{(\text{ظاس}+1)^4}\,\text{ءس}$$

$$\text{ل} = \int \text{قا}^2\text{س} \times (\text{ظاس}+1)^{-4}\,\text{ءس} = \frac{(\text{ظاس}+1)^{-3}}{-3} + \text{ج} = \frac{-1}{3(\text{ظاس}+1)^3} + \text{ج}$$

مشتقة بجانبه

ملاحظة: لتأكيد الحل نفرض ($\text{ظاس} + 1 = \text{ص}$)

17/ جـ $\int \frac{1 + \text{جاس} - \text{جتاس}}{1 + \text{جاس} + \text{جتاس}}\,\text{ءس}$

الحل/ $\text{ل} = \int \frac{1+\text{جاس}-\text{جتاس}}{1+\text{جاس}+\text{جتاس}}\,\text{ءس} = \int \frac{1 + 2\text{جا}(\frac{\text{س}}{2})\text{جتا}(\frac{\text{س}}{2}) - (1 - 2\text{جا}^2(\frac{\text{س}}{2}))}{1 + 2\text{جا}(\frac{\text{س}}{2})\text{جتا}(\frac{\text{س}}{2}) + (2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2}) - 1)}\,\text{ءس}$

$$\text{ل} = \int \frac{\cancel{1} + 2\text{جا}(\frac{\text{س}}{2})\text{جتا}(\frac{\text{س}}{2}) - \cancel{1} + 2\text{جا}^2(\frac{\text{س}}{2})}{2\text{جتا}(\frac{\text{س}}{2})\text{جا}(\frac{\text{س}}{2}) + 2\text{جتا}^2(\frac{\text{س}}{2})}\,\text{ءس}$$

$$\text{ل} = \int \frac{2\text{جا}(\frac{\text{س}}{2})\cancel{\left(\text{جتا}(\frac{\text{س}}{2}) + \text{جا}(\frac{\text{س}}{2})\right)}}{2\text{جتا}(\frac{\text{س}}{2})\cancel{\left(\text{جا}(\frac{\text{س}}{2}) + \text{جتا}(\frac{\text{س}}{2})\right)}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{جا}(\frac{\text{س}}{2})}{\text{جتا}(\frac{\text{س}}{2})}\,\text{ءس}$$

$$\text{ل} = -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{جتا}(\tfrac{\text{س}}{2})\right| + \text{ج}$$

طريقة (2): $\text{ل} = \int \frac{1+\text{جاس}-\text{جتاس}}{1+\text{جاس}+\text{جتاس}}\,\text{ءس} = \int \frac{1}{1+\text{جاس}+\text{جتاس}}\,\text{ءس} + \int \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{1+\text{جاس}+\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

$$ل = \int \frac{1}{\cancel{1} + 2\,جا(\frac{س}{2})\,جتا(\frac{س}{2}) + 2\,جتا^2(\frac{س}{2}) \cancel{- 1}} \quad + س - لو_{هـ}|1 + جاس + جتاس| + ج$$

$$ل = \int \frac{1}{جتا^2(\frac{س}{2})\,(2\,ظا(\frac{س}{2}) + 2)}\,دس - لو_{هـ}|1 + جاس + جتاس| + ج$$

$$ل = \int \frac{قا^2(\frac{س}{2})}{2\,ظا(\frac{س}{2}) + 2}\,دس - لو_{هـ}|1 + جاس + جتاس| + ج$$

$$ل = لو_{هـ}|2\,ظا(\frac{س}{2}) + 2| - لو_{هـ}|1 + جاس + جتاس| + ج$$

١٨/ $\int (س^3 + س^6)\sqrt[3]{2 + س^3}\,دس$

الحل/ $\int س(س^2 + س^5)\sqrt[3]{2 + س^3}\,دس = \int \sqrt[3]{س^3}\,(س^2 + س^5)\sqrt[3]{2 + س^3}\,دس$

$$ل = \int (س^2 + س^5)\sqrt[3]{س^3(2 + س^3)}\,دس = \int (س^2 + س^5)\sqrt[3]{2س^3 + س^6}\,دس$$

نفرض $\sqrt[3]{2س^3 + س^6} = ص \Leftarrow 2س^3 + س^6 = ص^3$

$$(6س^2 + 6س^5)\,دس = 3ص^2\,دص$$

$$دس = \frac{3ص^2\,دص}{6(س^2 + س^5)}$$

$$\Leftarrow ل = \int \cancel{(س^2 + س^5)} \times ص \times \frac{3ص^2\,دص}{6\cancel{(س^2 + س^5)}} = \int \frac{1}{2} ص^3\,دص = \frac{ص^4}{2 \times 4} + ج$$

$$ل = \frac{1}{8}(2س^3 + س^6)^{\frac{4}{3}} + ج$$

١٩/ ص $\int \frac{هـ^س\,جاس}{1 + جا(2س)}\,دس$

الحل/ $\int \frac{هـ^س\,جاس}{1 + 2\,جاس\,جتاس}\,دس = \frac{1}{2}\int \frac{2\,هـ^س\,جاس}{جا^2س + جتا^2س + 2\,جاس\,جتاس}\,دس = ل$

$$\Leftarrow ل = \frac{1}{2}\int \frac{هـ^س\,جاس + هـ^س\,جاس + هـ^س\,جتاس - هـ^س\,جتاس}{(جاس + جتاس)^2}\,دس$$

$$ل = \frac{1}{2}\int \frac{هـ^س(جاس + جتاس) - هـ^س(جتاس - جاس)}{(جاس + جتاس)^2}\,دس$$

$$ل = \frac{1}{2}\int \left(\frac{هـ^س}{جاس + جتاس}\right)'\,دس = \frac{1}{2}\left(\frac{هـ^س}{جاس + جتاس}\right) + ج$$

٢٠/ إذا كان $\int \frac{دس}{(جا^{٣}س\ جتا^{٥}س)^{\frac{1}{2}}} = أ\sqrt{ظتاس} + ب\sqrt{ظا^{٣}س} + جـ$ ، بيّن أن المقدار $\frac{أ}{ب} = -٣$

الحل/

$\int \frac{دس}{جا^{\frac{3}{2}}س\ جتا^{\frac{5}{2}}س} = أ\sqrt{ظتاس} + ب(ظاس)^{\frac{3}{2}} + جـ$ نشتق الطرفين

$\Leftarrow \frac{1}{جا^{\frac{3}{2}}س\ جتا^{\frac{5}{2}}س} = \frac{أ \times -قتا^{٢}س}{٢\sqrt{ظتاس}} + \frac{٣}{٢}ب(ظاس)^{\frac{1}{2}}قا^{٢}س$

$\Leftarrow جا^{-\frac{3}{2}}س\ جتا^{-\frac{5}{2}}س = -\frac{أ}{٢} \times \frac{1}{جا^{٢}س} \times \sqrt{ظاس} + \frac{٣}{٢}ب \times \frac{1}{جتا^{٢}س}\sqrt{ظاس}$

$\Leftarrow جا^{-\frac{3}{2}}س\ جتا^{-\frac{5}{2}}س = \frac{1}{٢}\sqrt{ظاس}\left(\frac{-أ}{جا^{٢}س} + \frac{٣ب}{جتا^{٢}س}\right)$

$\Leftarrow جا^{-\frac{3}{2}}س\ جتا^{-\frac{5}{2}}س = \frac{1}{٢}\left(\frac{جاس}{جتاس}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-أ\ جتا^{٢}س + ٣ب\ جا^{٢}س}{جا^{٢}س\ جتا^{٢}س}\right)$

$\cancel{جا^{-\frac{3}{2}}س}\ \cancel{جتا^{-\frac{5}{2}}س} = \frac{1}{٢}\ \cancel{جا^{-\frac{3}{2}}س} \times \cancel{جتا^{-\frac{5}{2}}س}\ (-أ\ جتا^{٢}س + ٣ب\ جا^{٢}س)$

$\Leftarrow ٢ = -أ\ جتا^{٢}س + ٣ب\ جا^{٢}س$

$٢(جا^{٢}س + جتا^{٢}س) = -أ\ جتا^{٢}س + ٣ب\ جا^{٢}س$

$٢جا^{٢}س + ٢جتا^{٢}س = -أ\ جتا^{٢}س + ٣ب\ جا^{٢}س$ بالمقارنة

* $٢ = ٣ب \Leftarrow ب = \frac{٢}{٣}$ / $٢ = -أ \Leftarrow أ = -٢$

* $\frac{أ}{ب} = \frac{-٢}{\frac{٢}{٣}} = -٢ \times \frac{٣}{٢} = -٣$ #

٢١/ أثبت أن $\int \left(جتا^{ن}س - \frac{ن-١}{ن}جتا^{ن-٢}س\right)دس = \frac{1}{ن}جاس\ جتا^{ن-١}س + جـ$

الحل/ $ل = \underbrace{\int جتا^{ن}س\ دس}_{ل_{١}} - \frac{ن-١}{ن}\int جتا^{ن-٢}س\ دس$

$ل_{١} = \int جتا^{ن}س\ دس = \int جتا^{ن-١}س \times جتاس\ دس$ "أجزاء"

$هـ = جتا^{ن-١}س$ ، $دع = جتاس\ دس$

$-(ن-١)جتا^{ن-٢}س\ جاس\ دس = دهـ$ ، $ع = جاس$

$ل_{١} = جتا^{ن-١}س\ جاس + (ن-١)\int جتا^{ن-٢}س\ جا^{٢}س\ دس$

$ل_{١} = جتا^{ن-١}س\ جاس + (ن-١)\int جتا^{ن-٢}س(١ - جتا^{٢}س)\ دس$

$$ل_ن = \text{قتا}^{ن-١}س\ \text{جاس} + (ن-١)\int \text{قتا}^{ن-٢}س - \text{قتا}^{ن}س\ دس$$

$$\Leftarrow ل_ن = \text{قتا}^{ن-١}س\ \text{جاس} + (ن-١)\int \text{قتا}^{ن-٢}س\ دس - (ن-١)\int \underbrace{\text{قتا}^{ن}س\ دس}_{ل_ن}$$

$$ل_ن + (ن-١)ل_ن = \text{قتا}^{ن-١}س\ \text{جاس} + (ن-١)\int \text{قتا}^{ن-٢}س\ دس$$

$$\left[ل_ن(١+ن-١) = \text{قتا}^{ن-١}س\ \text{جاس} + (ن-١)\int \text{قتا}^{ن-٢}س\ دس\right] \div ن$$

$$ل_ن = \frac{١}{ن}\text{جاس}\ \text{قتا}^{ن-١}س + \frac{ن-١}{ن}\int \text{قتا}^{ن-٢}س\ دس$$

$$\int \text{قتا}^{ن}س\ دس - \frac{(ن-١)}{ن}\int \text{قتا}^{(ن-٢)}س\ دس = \frac{١}{ن}\text{جاس}\ \text{قتا}^{(ن-١)}س + ج \quad \#$$

٢٣/ اذا كان $ق(س) \neq ٠$ ، $ق(س) = \acute{ق}(س)$ ، $ق(٠) = ١$ أثبت أن

$$\int \frac{ق(س)}{٤ق(س)+٣}\,دس = \text{لو}_{هـ}\sqrt[٤]{٨هـ^{س}+٣} + ج$$

الحل/ $ق(س) = \acute{ق}(س) \Leftarrow \frac{\acute{ق}(س)}{ق(س)} = ١ \Leftarrow \int \frac{\acute{ق}(س)}{ق(س)}\,دس = \int ١\,دس$

$$\Leftarrow \text{لو}_{هـ}|ق(س)| = س + ج \Big|_{س=٠} \Leftarrow \text{لو}_{هـ}|ق(٠)| = ج \Leftarrow \text{لو}_{هـ}١ = ج \Leftarrow \text{صفر} = ج$$

$$\Leftarrow \text{لو}_{هـ}|ق(س)| = س \Leftarrow هـ^{س} = |ق(س)| \Leftarrow \pm هـ^{س} = ق(س)$$

وبما أن $ق(٠) = ١ > ٠ \Leftarrow ق(س) = هـ^{س}$

$$* \int \frac{ق(س)}{٤ق(س)+٣}\,دس = \int \frac{هـ^{س}}{٤هـ^{س}+٣}\,دس = \frac{١}{٤}\text{لو}_{هـ}|٤هـ^{س}+٣| + ج$$

$$= \text{لو}_{هـ}(٤هـ^{س}+٣)^{\frac{١}{٤}} + ج$$

$$= \text{لو}_{هـ}\sqrt[٤]{٤هـ^{س}+٣} + ج$$

٢٤/ جد $\int \sqrt[٣]{س^{-\frac{٣}{٤}}+١}\,دس$

الحل/

$$ل = \int \sqrt[٣]{(س^{-\frac{٣}{٤}}+١)}\,دس$$

$$ل = \int \sqrt[٣]{\frac{١}{س^{\frac{٣}{٤}}}+١}\,دس = \int \sqrt[٣]{\frac{١+س}{س^{\frac{٣}{٤}}}}\,دس = \int \frac{\sqrt[٣]{١+س^{\frac{٣}{٤}}}}{\sqrt[٣]{س^{\frac{٣}{٤}}}}\,دس$$

$$ل = \int س^{-\frac{١}{٤}}\sqrt[٣]{١+س^{\frac{٣}{٤}}}\,دس \quad \text{نفرض } ص = ١+س^{\frac{٣}{٤}} \Leftarrow دص = \frac{٣}{٤}س^{-\frac{١}{٤}}\,دس$$

$$\Leftarrow ل = \frac{٤}{٣}\int ص^{\frac{١}{٣}}\,دص = \frac{٤}{٣} \times ص^{\frac{٤}{٣}} \times \frac{٣}{٤} + ج = (١+س^{\frac{٣}{٤}})^{\frac{٤}{٣}} + ج$$

روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/kamel4

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath