# حلـــــول الكـــامـــل

2025
2026
الفصل الأول

الوحدة الأولى

## * تـــوجـــيهي

## الريـــــادة والأعمال

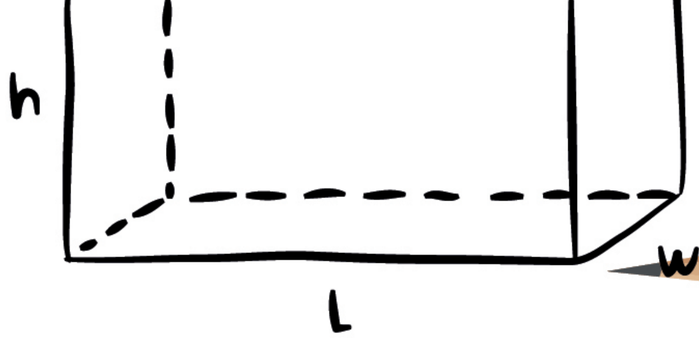
**

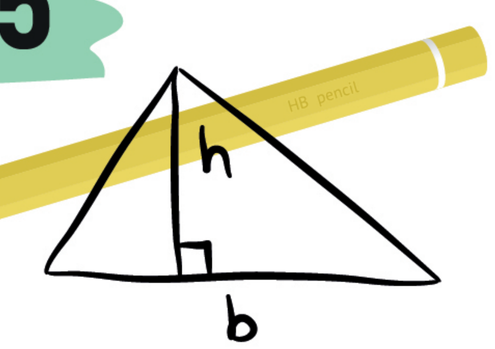
إعداد: مي عمار حواري

موقع قطرة التعليمي

Qatraedu.com

+972 59-276-7085



# مـقــدمـــــة

إيماناً منا بضـرورة توفير أفضـل المصـادر التعليمية لطلبتنا في مرحلة الثانوية العامة، يسّـر فريق موقع قطرة التعليمي تقديم الإجابات النموذجية لـ "كراسة الكامل" (تصنيف أسئلة السنوات السابقة).

تأتي هذه الحلول ضمن إطار جهودنا المستمرة في موقع قطرة التعليمي، الذي تأسس برؤية طموحة تهدف إلى تزويد طلاب التوجيهي بتعليم عالي الجودة، لا سيما في مادة الرياضيات، مستخدمين أحدث الأساليب والوسائل التعليمية العالمية.

وقد تم إعداد هذه الكراسة خصيصاً لطلاب فرع الريادة والأعمال، لتتضمن حلولاً مفصلة وشرحاً وافياً لكل الأسئلة، انطلاقاً من إيماننا بأن التعلم الرقمي يمنح الطالب مرونة الوصول إلى المعرفة في أي وقت ومن أي مكان.

وإننا في موقع قطرة التعليمي، نؤمن بأن وراء كل إنجاز عظيم جنوداً مجهولين؛ لذا نتقدم بأسـمى آيات الشـكر والتقدير للمعلّمة الفاضـلة **مي عمار حواري**، عضـو فريقنا المتميز، التي سـخرت وقتها وجهدها وخبرتها العميقة في إعداد هذه الحلول بدقة وإتقان. إن خبرتها الواسـعة تجلت في أسـلوب الشـرح المبسـط والواضـح الذي يضـع مصـلحة الطالب وتفوقه الأكاديمي في المقام الأول؛ فجزيل الشـكر لها، ونسـأل الله أن يجعل هذا العمل في ميزان حسناتها.

أتمنى أن تكون هذه الكراسـة عونًا لكم في رحلتكم نحو النجاح، وأن تسـاهم في تحقيق التفوق والتميز الذي تسعون إليه.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح الدائم.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

# إهـــــداء

إلى صاحبةُ القلبِ الأحنّ،

والأثر الأعمق،

إلى من كان حضورها فرقًا،

وكلماتها أثرًا لا يزول،

من غرست بداخلي حلمًا لا يزال يكبر،

ملهمتي وقدوتي... نجمتي اللامعة،

معلمتي الغالية **رولا بطة**، حفظكِ الله ورعاكِ دائمًا

أ. ميّ عمار حوّاري

## روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/riadi-kamel1

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath

# نصائح مهمة لكيفية دراسة الرياضيات؟

عزيزي الطالب/ عزيزتي الطالبة، إليك بعض النصائح التي ستساعدك على التفوق في دراستك لهذه المادة وتحقيق أفضل النتائج:

1. **إخلاص النية لله.**
2. **التوكل على الله** بالأخذ بجميع أسباب التفوق، والدعاء والالحاح فيه فهو من أعظم أسلحة المسلم.
3. **فهم الأساسيات أولًا:** تأكد من أنك تفهم الأساسيات بشكل جيد. ولضمان التمكن من الأساسيات فقد وفرنا دورة مجانية عبر موقع قطرة التعليمي.
4. **التدريب المستمر باستخدام الورقة والقلم:** الحل المتكرر هو الطريق إلى الإتقان، حل المسائل بانتظام وبشكل يومي سيعزز من فهمك ويساعدك على استيعاب المفاهيم بشكل أعمق.
5. **افهم المسألة قبل الحل:** لا تتسرع في حل المسألة دون فهم كامل لمتطلباتها، خذ وقتك في قراءة السؤال جيدًا، وفهم المطلوب قبل الشروع في الحل، التسرع قد يؤدي إلى أخطاء غير ضرورية.
6. **حل المسائل بطريقة منظمة:** نظم خطوات الحل بطريقة واضحة ومنهجية، تدوين الخطوات بتسلسل منطقي يساعدك على متابعة الحل والتعرف على أي خطأ قد يحدث بسهولة، هذا الأسلوب يعزز أيضًا من فرصك في الحصول على درجات كاملة.
7. **راجع بانتظام:** خصص وقتًا لمراجعة ما تعلمته بانتظام، ولا تترك الأمور تتراكم حتى اقتراب موعد الامتحانات، المراجعة المستمرة تسهل تذكر المعلومات وتجعلك أكثر استعدادًا للامتحان.
8. **لا تخجل من طلب المساعدة:** إذا واجهت صعوبة في فهم مفهوم معين أو في حل مسألة ما، لا تتردد في طلب المساعدة من معلمك أو زملائك، الحوار والتفاعل مع الآخرين قد يفتح لك آفاقًا جديدة لفهم المادة.
9. **حافظ على هدوئك وثقتك بنفسك:** التوتر قد يؤثر سلبًا على أدائك، حافظ على هدوءك وثقتك بنفسك أثناء الدراسة وفي الامتحانات، تذكر أن النجاح في الرياضيات يعتمد على الاستمرارية والعمل الجاد، وليس على الحفظ فقط.

10. **استعد للامتحانات بالتحضير المبكر:** لا تنتظر حتى اللحظة الأخيرة، ابدأ في التحضير للامتحانات قبل وقت كافٍ، وضع خطة دراسية تغطي جميع الوحدات بشكل متوازن، قم بحل أسئلة الامتحانات السابقة المرفقة في هذه الكراسة، وتأكد من مراجعة الحلول بعد الانتهاء.

11. **قم بتحليل الأخطاء:** عند ارتكاب خطأ في حل مسألة، لا تتجاهله. بدلاً من ذلك، عد إليه وحاول فهم سبب الخطأ وكيف يمكنك تجنبه في المستقبل، التعلم من الأخطاء يُعد أحد أفضل الطرق لتطوير مهاراتك الرياضية.

12. **اجعل لك دفتراً خاصاً لتدوين كل ما يتم دراسته واحرص على تدوين الملاحظات المهمة:** أثناء حل المسائل أو مشاهدة الفيديوهات، احرص على تدوين كل شيء لأنه سيكون من الصعب مشاهدة الفيديوهات في يوم واحد مثل يوم الامتحان، وكتابة الملاحظات المهمة تساعدك على تنظيم أفكارك وتذكر النقاط المهمة عند المراجعة لاحقًا.

نتمنى لك التوفيق والنجاح في رحلتك الدراسية، ونتطلع لأن تكون هذه الكراسة عونًا لك في تحقيق أهدافك في مادة الرياضيات. تذكر أن كل مجهود تبذله اليوم سيثمر في المستقبل.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

# الدرس الأول | المصفوفة

## القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2019 دور أول / اذا كانت $\begin{bmatrix} س+٣ \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣س \end{bmatrix}$ ما قيمة س, ص على الترتيب :

أ/ ٢, -٦ ب/ -٦, ١٦ ج/ -٦, ١ د/ -٦, -٢

الحل/ $س+٣ = ٢ \Leftarrow$ س = -١ ، ص = ٣س $\Leftarrow$ ص = ٣×-١ = -٣

$(س, ص) = (-١, -٣)$

---

• 2019 دور ثاني / إذا كانت P مصفوفة من الرتبة ٢×٢ ما المصفوفة P حيث $P_{ij} = ي + ه$

أ/ $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل/ $P_{٢×٢} = \begin{bmatrix} P_{١١} & P_{١٢} \\ P_{٢١} & P_{٢٢} \end{bmatrix}$ $P_{ij} = ي + ه$

$P_{١١} = ١+١ = ٢$ ، $P_{٢١} = ١+٢ = ٣$ ، $P_{١٢} = ٢+١ = ٣$

$P_{٢٢} = ٢+٢ = ٤$

$\Leftarrow P_{٢×٢} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

---

• 2019 دور ثالث / إذا كان $\begin{bmatrix} س & ١ \\ ص & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ما قيمة (س+ص)

أ/ -٣ ب/ -١ ج/ ٤ د/ ١

الحل/ $س = ١$ ، $ص = -٢ \Leftarrow س+ص = ١-٢ = -١$

---

• 2020 دور أول / إذا كانت $P = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ -٣ & -٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ما قيمة $P_{١٣} - P_{٢٣}$

أ/ -٦ ب/ ٥- ج/ ٠ د/ -٤

الحل/ $P_{١٣}$ تقع في الصف الثاني العمود الأول $\Leftarrow P_{١٣} = -٣$

$P_{٢٣}$ تقع في الصف الثالث العمود الثاني $\Leftarrow P_{٢٣} = ٢$

$P_{١٣} - P_{٢٣} = -٣-٢ = -٤$

---

• 2020 دور ثاني / إذا كانت P من الرتبة ٢×٢ وعرفنا مدخلات المصفوفة P بحيث أن $P_{ij} = ي ه + ٢$ ما هي المصفوفة P

أ/ $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$

الحل/ $P_{2\times2} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$

$P_{11} = 1\times1+2 = 3$ / $P_{12} = 1\times2+2 = 4$ / $P_{21} = 2\times2+2 = 6$ / $P_{22} = 2\times3+2 = 8$

$\Leftarrow P_{2\times2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

---

• 2020 دورثالث/ ما قيمة ص حيث $\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص-س٥ \end{bmatrix}$

ب/ 4 ج/ 8 د/ 12

الحل/ $س = 4$ / $12 = ص - س٥ \Leftarrow 12 = ص - 4\times5 \Leftarrow 12 = ص - 20$

$\Leftarrow ص = 12+20 \Leftarrow ص = 8$

---

• 2020 دورثالث/ إذا عرّفت مدخلات المصفوفة P بالعلاقة $P_{ij} = 3ص_{ي} - ص_{ن}$ ما قيمة $P_{22}$

ب/ 1 ج/ 4 د/ 12

الحل/ $P_{22} = 3ص_{2} - ص_{2} \Leftarrow P_{22} = 3\times2 - 3 = 6-3 = 3$

---

• 2021 دورأول/ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 0 & 2- \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $P_{12} - P_{21}$

ب/ 1- ج/ 3- د/ 5-

الحل/ $P_{12}$ تقع في الصف الثاني العمود الأول $\Leftarrow P_{12} = -2$

$P_{21}$ تقع في الصف الأول العمود الثاني $\Leftarrow P_{21} = 3$

$P_{12} - P_{21} = -2-3 = -5$

---

• 2021 دورثاني/ إذا كان $\begin{bmatrix} س \\ 3+س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-ص \\ 2 \end{bmatrix}$ ، ما قيمة ص

ب/ 1 ج/ 3 د/ 1-

الحل/ $3+س = 2 \Leftarrow س = 1-$ ، $س = 1-ص \Leftarrow ص = 1-س \in (ص = -2-) \Leftarrow ص = 2$

---

• 2021 دورثاني/ إذا كانت P مصفوفة من الرتبة $2\times2$ ، ما المصفوفة P حيث $P = ي_{ن} + ص_{ن}$

أ/ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

مكرر من السؤال الثاني. (2019 دورثاني)

---

أ.مي حواري

• 2022 دور أول/ إذا كانت المصفوفة P من الرتبة ٢×٢ و عرّفت مدخلاتها بالصورة $P_{ij} = 2i - 3j$ و ما قيمة $P_{12}$

٣-/P ٢/ب ٣/ه ٦/د

الحل/ $P_{12} = 2\times2 - 1 = 4 - 1 = 3$ و $i = 2$ و $j = 1$

---

• 2022 دور ثاني/ ما قيمة س بحيث $\begin{bmatrix} ص \\ -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س - ١ \\ ٣ص \end{bmatrix}$

١-/P ١/ب ٢/ه ٣/د

الحل/ $3ص = -4 \Leftarrow ص = -\frac{4}{3}$

$س - ١ = ص \Leftarrow س = ص + ١ = -\frac{4}{3} + ١ = -\frac{1}{3}$

---

• 2023 دور أول/ اذا كانت $P = [2 \quad -1]$ و $ب = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$ و ما قيمة $ب_{12} - P_{21}$

٢-/P ب/ ٢ د/ ٣

الحل/ $ب_{12}$ تقع في الصف الثاني العمود الأول في ب $\Leftarrow ب_{12} = 1$

$P_{21}$ تقع في الصف الأول العمود الثاني في P $\Leftarrow P_{21} = -1$

$ب_{12} - P_{21} = 1 - -1 = 2$

---

• 2023 دور ثاني/ اذا كانت $P = \begin{bmatrix} ٤ & -١ & ٥ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ٢ & ٧ & -١ \end{bmatrix}$ و ما قيمة $P_{12} - P_{31} =$

٣-/P ب/-١ ه/١ د/ ٤

الحل/ $P_{12}$ تقع في الصف الثاني العمود الأول $\Leftarrow P_{12} = 6$

$P_{31}$ تقع في الصف الأول العمود الثالث $\Leftarrow P_{31} = 5$

$\Leftarrow P_{12} - P_{31} = 6 - 5 = 1$

أ.مي حواري

---

• 2024 دور ثاني/ إذا عرّفت مدخلات المصفوفة P بالعلاقة $P_{ij} = 2i - 3$ و ما قيمة $P_{22}$

١/P ب/-١ ه/٤ د/ ٧

الحل/ $P_{ij} = 2i - 3 \Leftarrow P_{22} = 2\times2 - 3 = 4 - 3 = 1$

---

• 2024 دور ثاني/ ما قيمة س في المعادلة $\begin{bmatrix} ٨ + ص \\ س^٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣س \\ -ص \end{bmatrix}$

الحل/ $-ص = س^٤ \Leftarrow ص = -س^٤$

$٣س = ص + ٨$ نعوض $ص = -س^٤ \Leftarrow ٣س = -س^٤ + ٨$

$\Leftarrow س^٤ + ٣س - ٨ = ٠ \Leftarrow (س - ٢)(س + ٤) = ٠$

إما $س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$ أو $س + ٤ = ٠ \Leftarrow س = -٤$

$\Leftarrow س = \{٢ ، -٤\}$

• 2024 دور ثالث/ إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ س+ص & ٣ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة ص .

الحل/ $س = ٢$ ، $١ = س + ص \Leftarrow ١ = ٢ + ص \Leftarrow ص = -١$ .

---

• 2024 دور ثالث/ المصفوفة جـ من الرتبة ٢×٢ حيث $ج_{ك هـ} = ك + هـ$ ، ما هي المصفوفة جـ

أ/ $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

(فكر حرية)

---

• 2025 دور أول/ إذا كانت $\begin{bmatrix} س-ص \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ س٣ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة ص

أ/ ٢ ب/ $-٢$ ج/ ٤ د/ $-٤$

الحل/ $\frac{٦}{٢} = \frac{س٣}{٢} \Leftarrow س = ٣$

$س - ص = ١ \Leftarrow ٣ - ص = ١ \Leftarrow ٣ - ١ = ٢ = ص$

---

• 2025 دور أول/ إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٣- & ٤ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $|س + ص|$

أ/ ١٨ ب/ ١٧ ج/ ٢ د/ ١٨

الحل/ $س_{٢١}$ تقع في الصف الأول ، العمود الثاني في س $\Leftarrow س_{٢١} = ١$

$س_{١٢}$ تقع في الصف الثاني ، العمود الأول في س $\Leftarrow س_{١٢} = ٣$

$ص_{٢١}$ تقع في الصف الأول ، العمود الثاني في ص $\Leftarrow ص_{٢١} = -٣$

$\Leftarrow$ المطلوب/ $|٥ ص_{٢١} - (س_{٢١} + س_{١٢})| = |٥ \times -٣ - (١ + ٣)| = |١٥ + ٤| = ١٧$

أ.مي حواري

---

• 2025 دور أول/ إذا كانت P مصفوفة من الرتبة ٣×٢ وعرفت مدخلاتها حسب العلاقة $P_{ك هـ} = ك - ٢هـ$ ، ما قيمة المدخلة $P_{٢٣}$

أ/ صفر ب/ ١- ج/ ٤- د/ ٤

الحل/ $P_{ك هـ} = ك - ٢هـ$ ، $ك = ٣ ، ك = ٢ \Leftarrow P$

$\therefore P_{٢٣} = ٢ - ٢ \times ٣ = ٢ - ٦ = -٤$

---

• 2025 دور ثاني/ ما المعكوس الجمعي للمصفوفة $P = \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ث & ١- \end{bmatrix}$

أ/ $\begin{bmatrix} ث & ١ \\ ١ & ث \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ث & ١ \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ث & ١ \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ١ & ث \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

الحل/ المعكوس الجمعي لـ $P = -P = -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

---

• 2024 طولكرم/ إذا كانت $\begin{bmatrix} 4 & ص+2 \\ 3س & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 9 & س+7 \end{bmatrix}$ فإن $(س+ص)^2$

٨-/P ٣٤/ب ٤/ص ٤-/د

الحل/ $ص+2 = -3 \Leftarrow ص = -5$

$3س = 9 \Leftarrow س = 3$ أو $س = -3$

$3 = س+7 \Leftarrow س = -3$

$س = \{-3\} \cap \{3، -3\} = \{-3\}$ نأخذ المشترك فقط

$(س+ص)^2 = (-3-5)^2 = (-8)^2 = 64$

---

• خارجي/ إذا كانت $س = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$ وما قيمة $2|س_{13}| - \frac{1}{2}(س_{21})^2 + |س_{23}| + 5$ =

١/P ٢/ب ٧/ص ٢٥/د

الحل/ $س_{13}$ تقع في الصف الثالث والعمود الأول $\Leftarrow س_{13} = 12$

$س_{21}$ تقع في الصف الأول والعمود الثاني $\Leftarrow س_{21} = -4$

$س_{23}$ تقع في الصف الثاني والعمود الثالث $\Leftarrow س_{23} = 8$

المطلوب/ $2|س_{13}| - \frac{1}{2}(س_{21})^2 + |س_{23}| + 5 = 2|12| - \frac{1}{2}(-4)^2 + |8| + 5$

$= 24 - \frac{1}{2} \times 16 + 2 + 5$

$= 24 - 8 + 2 + 5 = 23$

---

كلّ
ومتبع
لهواه
متأخّر
عن
مبتغاه!

أ. مَيّ حوّاري.

# الدرس الثاني | جمع المصفوفات وطرحها

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة:

• 2019 دور أول/ ما المصفوفة س بحيث $3\left(\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}-س\right)-2س=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

أ/ $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix}2\\\cdot\end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$

الحل/ $3س-2س+2س=\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ ⟵ $س=\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ ⟵ $س=\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10}{5}\\\frac{5}{5}\end{bmatrix}=س$ ⟵ $\frac{1}{5}\times$ ⟵ $5س=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$ ⟵

---

• 2019 دور ثاني/ إذا كان $\begin{bmatrix}2س\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2\\6ص\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}$ فما قيمة س، ص على الترتيب:

أ/ $-16$، $-10$ ب/ $-16$، $10$ ج/ $16$، $10$ د/ $16$، $-10$

الحل/ $\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2س+2\\6-6ص\end{bmatrix}$ ⟵ $2س=2$ ⟵ $س=1$

$2+2س=4$ ⟵ $-6ص=2$ ⟵ $ص=-1$

$(س،ص)=(16،-1)$

---

• 2020 دور أول/ إذا كان $3\begin{bmatrix}-1\\ب\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}س\\1\end{bmatrix}2=\begin{bmatrix}0\\11\end{bmatrix}$ فما قيمة س، ص على الترتيب:

أ/ $-16$، $-3$ ب/ $-16$، $3$ ج/ $16.4$، $3$ د/ $16$، $-3$

الحل/ $\begin{bmatrix}0\\11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\3ب\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2س\\2\end{bmatrix}$ ⟵

$2س+3=0$ ⟵ $2س=-3$ ⟵ $س=1$

$3ب-2=11$ ⟵ $-3ب=9$ ⟵ $ب=-3$

$(س،ص)=(16،-3)$

---

• 2020 دور أول/ إذا كان $P=\begin{bmatrix}-3&1\\2&0\end{bmatrix}$ و $ب=\begin{bmatrix}-1&ث\\1&2\end{bmatrix}$ فما قيمة $P-2ب$

أ/ $\begin{bmatrix}ث&1\\1&ث\end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix}-1&1\\ث&1\end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix}-5&1\\ث&1\end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix}-1&1\\4&9\end{bmatrix}$

الحل/ $P-2ب=\begin{bmatrix}-3&1\\2&0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1&ث\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1\\2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&ث\\2&4\end{bmatrix}$

$P-2ب=\begin{bmatrix}-1&1\\ث&1\end{bmatrix}$ ⟵

أ.مي حواري

• 2021 دور أول/ س ، ص مصفوفتين حيث س = [٣ -٥] ، ما الصورة الصحيحة للصفوفة الصفرية (و) في المعادلة س + ٢ص = و

أ/ $\begin{bmatrix} ؟ & ؟ \\ ؟ & ؟ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ؟ \\ ؟ \end{bmatrix}$ ج/ [؟ ؟] د/ [؟]

الحل/ س من الرتبة ٢×١

$س_{٢×١} + ٢ص_{٢×١} = و_{٢×١}$

بما أن عملية الجمع معرفة ⟸ المصفوفات كلها من نفس الرتبة

⟸ $و_{٢×١} = [؟ \quad ؟]$

---

• 2021 دور أول/ واحدة من العمليات التالية لا يمكن إجراؤها في المصفوفات :

أ/ $٥ + \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ب/ [٣][١ ٢] ج/ $٣ \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ د/ $م_{٢} + و_{٣}$

الحل/ أ/ لا يمكن جمع عدد و مصفوفة .

✓ ب/ $[٣]_{١×١} \times [١ \quad ٢]_{٢×١} = [٣ \quad ٦]_{٢×١}$

✓ ج/ $٣ \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١×٣ \\ ٢×٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

✓ د/ $م_{٤} + و_{٣}$ = م "من نفس الرتبة"

---

• 2021 دور ثالث/ أ ، ب مصفوفتان من الرتبة ٢×١ وكان أ − س = ب ، ما رتبة المصفوفة س في المعادلة :

أ/ ١×٢ ب/ ٢×١ ج/ ٢×٢ د/ ١×١

الحل/ $أ_{٢×١} - س = ب_{٢×١}$ ⟸ في عملية الطرح أو الجمع تكون المصفوفات من نفس الرتبة

⟸ $س_{٢×١}$

---

• 2023 دور ثاني/ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ؟ & ١ \end{bmatrix}$ ، ما المعكوس الجمعي للمصفوفة أ

أ/ $\begin{bmatrix} ١ & ؟ \\ ؟ & ١ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ؟ & -١ \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} -١ & -١ \\ ؟ & -١ \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} -١ & ؟ \\ -١ & -١ \end{bmatrix}$

الحل/ المعكوس الجمعي لـ أ = −أ = $-\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ؟ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ؟ & ١ \end{bmatrix}$

---

• 2024 دور أول/ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة ٢١ب − ٩(٢ب + أ) + ٨ب

أ/ $\begin{bmatrix} ٣ \\ -١ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ٢ \\ -١ \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}٣\\-١\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}١\\٢\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}٤\\١\end{bmatrix} = ب - ٢ = ٨ب + ٩ب - ٩٢ - ١٠٢ = ٨ب + (ب+٢)٩ - ١٠٢$$

---

• 2024 دورتاني/ إذا كان $٢ = \begin{bmatrix}١\\٣\end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix}٢\\٤\end{bmatrix}$ ، ما قيمة $٢+٣ب$

أ/ $\begin{bmatrix}٣\\٧\end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix}٥\\١١\end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix}٤\\١٠\end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix}٣\\٧\end{bmatrix}$

الحل/ $٢+٣ب = \begin{bmatrix}١\\٣\end{bmatrix} + ٣\begin{bmatrix}٢\\٤\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}١\\٣\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}٦\\١٢\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٧\\١٥\end{bmatrix}$

---

• 2024 بيت لحم/ إذا كان $٣\begin{bmatrix}٤ & ٠\\٢ & ٥\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}٣ & ٢\\٢ & ١\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}١ & ٥\\-٢ & ٠\end{bmatrix}$ ما قيمة $(ب+ج)$

أ/ ٤- ب/ ٧- ج/ ٥ د/ ٩

الحل/ $\begin{bmatrix}٨ & ٠\\٤ & ٣٥\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٣-٥ & ١-٢\\-٢ & ٣\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}٠\\٤\end{bmatrix}$

$ب + ج = -٦ + ١ = -٧$

---

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية:

• 2019 دورتاني/ إذا كانت $٢ = \begin{bmatrix}٤ & ٢\\٢ & ١\\٦ & ٧\end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix}-٦ & ٠\\٠ & ٥\\٤ & ٧\end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة $س$ بحيث $٢ - ٣س = ب$

الحل/ $٢ - ٣س = ب \Leftarrow ٣س = ٢ - ب \Leftarrow س = \frac{١}{٣}(٢ - ب)$

$$\Leftarrow س = \frac{١}{٣}\left(\begin{bmatrix}٤ & ٢\\٢ & ١\\٦ & ٧\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-٦ & ٠\\٠ & ٥\\٤ & ٧\end{bmatrix}\right) = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix}١٠ & ٢\\٢ & -٤\\٢ & ٠\end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow س = \begin{bmatrix}٥ & ١\\١ & -٢\\١ & ٠\end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

---

• 2020 دور أول/ حل المعادلة المصفوفية التالية: $س + \begin{bmatrix}٥ & -٢\\٧ & ٦\end{bmatrix} = ٢(\begin{bmatrix}٠ & ١\\٥ & ٢\end{bmatrix} - س)$

الحل/ $٣س - س = \begin{bmatrix}٠ & ٢\\١٠ & ٤\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}٥ & -٢\\٧ & ٦\end{bmatrix} + س$

$$\begin{bmatrix} ٥ & ؟ \\ ١٧ & ١٠ \end{bmatrix} = س \Leftarrow \begin{bmatrix} ؟ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix} = س - س٢ \Leftarrow$$

---

• 2020 دورثاني/ حل المعادلة المصفوفية الآتية : $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ؟ \\ ٨ & ٧ \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} ٤- & ١ \\ ٣ & ٥ \\ ؟ & ٦ \end{bmatrix} ٢ - س \right) ٢$

أ.مي حواري

الحل/ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ؟ \\ ٨ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤- & ١ \\ ٣ & ٥ \\ ؟ & ٦ \end{bmatrix} ٤ - س٢$

$\begin{bmatrix} ١٦- & ٤ \\ ١٢ & ٢٠ \\ ؟ & ٢٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ؟ \\ ٨ & ٧ \end{bmatrix} = س٢ \Leftarrow \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ؟ \\ ٨ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦- & ٤ \\ ١٢ & ٢٠ \\ ؟ & ٢٤ \end{bmatrix} - س٢ \Leftarrow$

$\begin{bmatrix} \frac{١٥}{٢}- & ٣ \\ ٨ & ١٠ \\ ٤ & \frac{٣١}{٢} \end{bmatrix} = س \Leftarrow \frac{١}{٢} \times \left( \begin{bmatrix} ١٥- & ٦ \\ ١٦ & ٢٠ \\ ٨ & ٣١ \end{bmatrix} = س٢ \right) \Leftarrow$

---

• 2023 دورثالث/ ما حل المعادلة المصفوفية التالية : $٣ \left( س - [؟ \quad ١] \right) = -س٢$

الحل/ $٣س - [؟ \quad ٣] = -٢س \Leftarrow +٢س \quad +٢س \quad ٣س + ٢س = [؟ \quad ٣] \Leftarrow (٥س = [؟ \quad ٣]) \times \frac{١}{٥}$

$س = [\frac{٣}{٥} \quad ؟] \Leftarrow$

---

• 2024 دورأول/ إذا كانت $٢ \left( [٣] + ٣س \right) = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix} + ٢س$ و ض المصفوفة س

الحل/

$٦س + \begin{bmatrix} ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix} + س٢ \Leftarrow ٦س - ٢س = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ \\ ٨ \end{bmatrix}$

$\frac{١}{٤} \Leftarrow \left( \begin{bmatrix} ٢- \\ ٤- \end{bmatrix} = ٤س \right) \Leftarrow \begin{bmatrix} \frac{١}{٢}- \\ ٢ \\ ١- \end{bmatrix} = س$

.. مازاحم القرآن شيئًا ... إلا باركه ...

• 2024 دورة ثانية / ما حل المعادلة المصفوفية التالية :

$$\begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix} + س٢ = \left( \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix} ٣ - س٦ \right) \frac{١}{٢}$$

الحل/

$$\begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix} + س٢ = \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix} \frac{١}{٢} \times ٣ - س٣$$

$$\begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix} - س \Leftarrow$$

$$س = \begin{bmatrix} -٧ & ١٢ \\ ٨ & ١٦ \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix} = س \Leftarrow$$

$$\frac{٣}{٢} \times ٤ = ٦$$
$$\frac{٣}{٢} \times -٢ = -٣$$
$$\frac{٣}{٢} \times ٦ = ٩$$
$$\frac{٣}{٢} \times ٢ = ٣$$

---

• 2025 دورة ثاني / حل المعادلة المصفوفية الآتية :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} ٢ + س = (٣ + س + ص_{٢})٣$$

الحل/

$$\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & -٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} + س = ص_{٢}٣ + س٣$$
$$-س \qquad\qquad -س$$

$$\begin{bmatrix} -١ & -٦ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} ٣ + س٢ \Leftarrow \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & -٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} + س = ص_{٢}٣ + س٣ \Leftarrow$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & -٦ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix} = س٢ \Leftarrow \begin{bmatrix} -١ & -٦ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} + س٢ \Leftarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{١}{٢} & -\frac{٩}{٢} \\ ٠ & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix} = س \Leftarrow \frac{١}{٢} \times \left( \begin{bmatrix} -١ & -٩ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} = س٢ \right) \Leftarrow$$

---

• 2025 القدس الشريف / حل المعادلة المصفوفية التالية :

$$\left( \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & -٥ \end{bmatrix} ٢ + س٢ - \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٧ & -٩ \end{bmatrix} \right) ٢ = -س٢ + ٣ص_{٢} - ٤ص_{٤}$$

الحل/

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} ٤ - \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} ٣ + س٢ - = \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & -٥ \end{bmatrix} ٤ + س٤ - \begin{bmatrix} ١٠ & -٦ \\ ١٤ & -١٨ \end{bmatrix}$$
$$+س٤ \qquad\qquad +س٤$$

$$س٢ + \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & ١٦ \\ ٢٤ & -٢٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٠ & -٦ \\ ١٤ & -١٨ \end{bmatrix}$$

أ.ميّ حواري

$$\Leftarrow \quad \text{س}٣ + \begin{bmatrix} ٤- & \text{ب} \\ \text{ب} & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٦ \\ ٣٨- & ٣٨ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad \text{س}٣ = \begin{bmatrix} ٤- & \text{ب} \\ \text{ب} & ٤- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٠ & ٦ \\ ٣٨- & ٣٨ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad \text{س}٣ = \begin{bmatrix} ١٤ & ٦ \\ ٣٨- & ٤٢ \end{bmatrix} \quad / \times \frac{١}{٣}$$

$$\Leftarrow \quad \text{س} = \begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ١٩- & ٢١ \end{bmatrix}$$

---

• تفوق خارجي / حل المعادلة $\text{س}٣ + \text{ب}٣ = \text{ب} + \text{ص}$ حيث $\text{ص} = \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$

$$\frac{\text{ص}}{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & \text{ب} \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ص} = \text{ب} - \text{ص}$$

أ.ميّ حواري

الحل/ $\frac{\text{ص}}{٢} * = \begin{bmatrix} ٢ & \text{ب} \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} \Leftarrow \text{ص} = \begin{bmatrix} ٤ & \text{ب} \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix}$

$$* \quad \text{ص} = \text{ب} - \text{ص} \Leftarrow \text{ص} = \text{ص} + \text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & \text{ب} \\ ٢- & ٤- \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣- & ٧ \end{bmatrix}$$

$$* \quad \text{س}٢ + \text{ب}٣ = \text{ص} + \text{ب} \Leftarrow \text{س}٢ = \text{ص} - ٢\text{ب} \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٢}(\text{ص} - ٢\text{ب})$$

$$\Leftarrow \quad \text{س} = \frac{١}{٢}\left( \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣- & ٧ \end{bmatrix} ٢ - \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \right) - \left( \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٦- & ١٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \right) \frac{١}{٢}$$

$$\Leftarrow \quad \text{س} = \begin{bmatrix} ٢- & ٥- \\ ٢ & ٧ \\ ٩- & ٢ \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \quad \begin{bmatrix} ٢- & ٥- \\ ٩- & ٧ \end{bmatrix} \quad \frac{١}{٢} = \text{س} \quad \Leftarrow$$

„ وَأن ليسَ لِلإنسانِ إلّا ما سَعَىٰ „

# الدرس الثالث | ضرب المصفوفات

## • القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2019 دور أول / ما ناتج $\begin{bmatrix} ٢ \\ ب \\ ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٢- & ٣- \end{bmatrix}$

أ/ $\begin{bmatrix} ٨ & ٤- & ٦- \\ ب & ب & ب \\ ٤ & ٢- & ٣- \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ٤ & ٦- \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ٦- \\ ب \\ ٤ \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ٢- \end{bmatrix}$

الحل/ $\begin{bmatrix} ٢ \\ ب \\ ١ \end{bmatrix}_{٣\times١} \begin{bmatrix} ٤ & ٢- & ٣- \end{bmatrix}_{١\times٣} = \begin{bmatrix} ٤\times٢ & ٢-\times٢ & ٣-\times٢ \\ ب\times٤ & ب\times٢- & ب\times٣- \\ ٤\times١ & ٢-\times١ & ٣-\times١ \end{bmatrix}_{٣\times٣}$

$= \begin{bmatrix} ٨ & ٤- & ٦- \\ ب & ب & ب \\ ٤ & ٢- & ٣- \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

∴ بما أنه المصفوفة الأولى من الرتبة ١×٣ والثانية من الرتبة ٣×١ ← ناتج ضربهم ٣×٣ ← S د

---

• 2019 دور ثاني / إذا كانت $ج = \begin{bmatrix} ٢ & ب \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$ ، ما هي المصفوفة $ج^٢$

أ/ $\begin{bmatrix} ب & ٤ \\ ٩ & ١٠ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ب & ٤ \\ ٩ & ١٠- \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ب & ٤ \\ ٦ & ٤- \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ب & ٤ \\ ٩ & ١٠ \end{bmatrix}$

الحل/

$ج^٢ = ج \times ج = \begin{bmatrix} ٢ & ب \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ب \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$ (انتبه لا يجوز تربيع المدخلات)

$\leftarrow ج^٢ = \begin{bmatrix} (٢\times٢)+(ب\times٣) & (٢\times ب)+(ب\times٢-) \\ (٣\times٢)+(٢-\times٣) & (٣\times ب)+(٢-\times٢-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} صفر & ٤ \\ ٩ & ١٠- \end{bmatrix}$

---

• 2019 دور ثاني / إذا كان $P_{٣\times٣}$ ، $U_{٢\times٣}$ ، $ج_{٣\times٢}$ ، ما رتبة المصفوفة $U \times ج - P$

أ/ $٣\times٢$ ب/ $٢\times٣$ ج/ $٢\times٢$ د/ $٣\times٣$

الحل/ $U \times ج - P = S \rightarrow$ $_{٣\times٣}S = _{٣\times٢}U \times _{٢\times٣}ج - _{٣\times٣}P = _{٣\times٣}ش$

---

• 2020 دور أول / إذا كانت $ب = \begin{bmatrix} ١- & ٣ & ٥ \\ ١- & ١ & ٢- \\ ش & ٣- & ١- \end{bmatrix}$ ، $P = \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٤ \\ ١ & ١ & ٢- \end{bmatrix}$

وكانت جـ = أ × ب وما قيمة $جـ_{11}$

أ/ ٣ × ٢ ب/ ٢ × ٤ جـ/ ٣ × ٤ د/ ٣ × ٦

الحل/ $جـ_{11}$ ناتج ضرب مدخلات الصف الأول في أ في العمود الأول في ب .

$$د_{11} = \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٤ \\ ٣- & ١ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١- \\ ٠ \\ ١- \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow جـ_{11} = (٢ \times ١-) + (١- \times ٠) + (٤ \times ١-) = ٢- + ٤- = ٦-$$

---

• 2020 دور أول/ إذا كان أ، ب، جـ ثلاث مصفوفات حيث أ × ب = جـ وكانت أ من الرتبة ٣ × ٢ ، جـ من الرتبة ٣ × ٤ ما رتبة المصفوفة ب

أ/ ٣ × ٢ ب/ ٤ × ٣ جـ/ ٣ × ٤ د/ ٢ × ٤

الحل/ أ × ب = جـ

$٣ \times ٢ \quad ٤ \times ٣ \quad ٣ \times ٤$

عدد صفوف ب = عدد أعمدة أ = ٢

$$\Leftarrow \underset{٣ \times ٢}{أ} \times \underset{٤ \times ٣}{ب} = \underset{٣ \times ٤}{جـ} \Leftarrow \underset{٤ \times ٢}{ب}$$

---

• 2020 دور ثالث/ ما رتبة المصفوفة س حيث $أ_{٢} \times س = ب$

$$ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢- & ٤ & ٠ \\ ٣ & ٥- & ٦ & ٨ \end{bmatrix} \quad أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

ب/ ٢ × ٤ جـ/ ٢ × ٤ د/ ٤ × ٤

الحل/ $أ_{٢} \times س = ب$

$٢ \times ٢ \quad ٢ \times ٤ \quad ٢ \times ٤$

$$\Leftarrow س = \underset{٢ \times ٤}{د} \quad \text{لا تؤثر في الرتبة}$$

$$\Leftarrow \underset{٢ \times ٤}{س}$$

أ.مي حواري

---

• 2020 دور ثالث/ إذا كانت $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$ وما قيمة $ب^{٢٠٢٥}$

أ/ ب ب/ ٢ × ٢ جـ/ ٢ × ٢ د/ ٢ × ٢

الحل/ $ب^{٢} = ب \times ب = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$

$$\Leftarrow ب^{٢} = \begin{bmatrix} (١ \times ١) + (٠ \times ٠) & (١ \times ٠) + (٠ \times ١-) \\ (٠ \times ١) + (١- \times ٠) & (٠ \times ٠) + (١- \times ١-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = م$$

---

• 2021 دور ثالث/ ما المصفوفة الناتجة من عملية الضرب $\begin{bmatrix} ١ \\ ٩ \end{bmatrix} [١ \quad ٣]$

أ/ $\begin{bmatrix} ٢٤ \\ ٩ \end{bmatrix}$ ب/ $[٩ \quad ٢٤]$ جـ/ $\begin{bmatrix} ٨ & ٢٤ \\ ٩ & ٢٧ \end{bmatrix}$ د/ $[٣٣]$

الحل/ $[٣\ \ ١]_{١\times٢} \times \begin{bmatrix} ٨ \\ ٩ \end{bmatrix}_{٢\times١} = [(٣\times٨)+(١\times٩)]_{١\times١} = [٣٣]$

أو مباشرة نختار المصفوفة التي رتبتها $١\times١ \leftarrow s$

---

• 2021 دورثاني/ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} ١ & \div \\ -٣\sqrt{} & -١ \end{bmatrix}$ و ما قيمة $P^٢$

أ/ $P_{٢\times٢}$ ب/ $P$ ج/ $P^٢$ د/ $P^٢$

الحل/ $P^٢ = P \times P = \begin{bmatrix} ١ & \div \\ -٣\sqrt{} & -١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & \div \\ -٣\sqrt{} & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (١\times١)+(\div\times-٣\sqrt{}) & (١\times\div)+(\div\times-١) \\ (-٣\sqrt{}\times١)+(-١\times-٣\sqrt{}) & (-٣\sqrt{}\times\div)+(-١\times-١) \end{bmatrix}$

$\leftarrow P^٢ = \begin{bmatrix} ١ & \div \\ \div & ١ \end{bmatrix} = I_٢$

---

• 2022 دورثاني/ إذا كانت $ج = \begin{bmatrix} -١ \\ ③ \\ ④ \end{bmatrix}$ و ما قيمة $ج_{١٢}$ $[٢\ \ ③\ \ ٤]$

أ/ $P_{٤\times١}$ ب/ $-١$ ج/ ٦ د/ ٨

الحل/ $ج_{١٢}$ ناتج ضرب (مدخلات الصف الثاني في P) X (مدخلات العمود الأول في ب)

$= ٢\times٣ = ٦$

أ.مي حواري

---

• 2023 دورأول/ ما ناتج $[٢\ \ \overset{P}{\div}\ \ ١] \times [-٣\ \ ٢\ \ \overset{ب}{٤}]$

أ/ $[٤\ \ \div\ \ -٦]$ ب/ $\begin{bmatrix} -٦ \\ \div \\ ٤ \end{bmatrix}$ ج/ $[-٢]$ د/ غير معرفة

الحل/ $P_{١\times٣} \times ب_{٣\times١} =$ غير معرفة لأن عدد أعمدة $P \neq$ عدد صفوف ب

---

• 2023 دورثاني/ إذا كانت $[٥\ \ \overset{P}{١}] \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix}_{\overset{ب}{}} = س$ و ما رتبة المصفوفة س:

أ/ $P_{١\times١}$ ب/ $ب_{٢\times١}$ ج/ $١\times٢$ د/ $٢\times٢$

الحل/ $P_{١\times٢} \times ب_{٢\times١} = س_{١\times١} \leftarrow ٢\times١ = ٥\times ب$

---

• 2023 دورثالث/ إذا كانت المصفوفة $س = [-١\ \ ٢\ \ ٣]$ والمصفوفة $ص = \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$

و المصفوفة $ع = س \times ص$ و ما رتبة المصفوفة ع :

أ/ $٣\times١$ ب/ $١\times١$ ج/ $١\times٣$ د/ $٣\times٣$

الحل/ $ع_{١\times١} = س_{١\times٣} \times ص_{٣\times١} \leftarrow$

• 2023 دور ثالث / اذا كانت P، ب، ج مصفوفات ، ع عدد حقيقي بحيث أن عملية الضرب والجمع معرّفة ، ما العبارة الصحيحة دائماً من العبارات الآتية :

أ/ P.(ب.ج) = (ج.ب).P ب/ P.(ب+ج) = (ب+ج).P

ج/ ع.(ب.P) = (ع.ب).P د/ P-م = م-P

الحل/ P.(ب.ج) = (ب.ج).P / P ← عملية الضرب غير تبديلية في المصفوفات X عملية الضرب غير تبديلية

ب/ P.(ب+ج) = (ب+ج).P ← عملية ضرب المصفوفات غير تبديلية .

ج/ ع.(ب.P) = (ع.P).ب = ب.(ع.P) ✓

د/ P-م = م-P ← طرح المصفوفات غير تبديلي X

---

• 2023 دور ثالث / إذا كانت $س = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ما المصفوفة $س^2$

أ/ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ث & ث \\ ث & ث \end{bmatrix}$

الحل/ $س^2 = س \times س = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow س^2 = \begin{bmatrix} (1\times1)+(-1\times-1) & (1\times-1)+(-1\times1) \\ (-1\times1)+(1\times-1) & (-1\times-1)+(1\times1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

---

• خارجي/ اذا كانت $P = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 \\ ع & 1 & ث \end{bmatrix}$ وكانت ب مصفوفة وكان $P_{2\times5} \times ب_{5\times ن} = ص_{2\times5}$

ماقيمة (ن-ص)

أ/ -2 ب/ 2 ج/ 3 د/ -3

الحل/ $P_{2\times3} \times ب_{5\times ن} = ص_{2\times5}$

عدد صفوف ب = عدد أعمدة P ← ن = 3 ، ص = 5

← ن-ص = 3-5 = -2

---

• خارجي/ إذا كانت $س = \begin{bmatrix} 1 & ث \\ ث & 1 \end{bmatrix}_P \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ ، ما رتبة المصفوفة س .

أ/ 1×1 ب/ 2×2 ج/ 2×1 د/ 1×2

في الطرح الناتج من نفس الرتبة

$س = P_{2\times2} \times ب_{2\times1} \Leftarrow س_{2\times1}$

أ.ميّ حواري

• خارجي/ ما قيمة/ قيم س التي تجعل $[-3 \quad س] \times \begin{bmatrix} ٤ \\ س \end{bmatrix} = [٤]$

٤/P ب/ ٤- ج/ ٤ ± د/ ١٦ ±

الحل/ $[(-٣ \times ٤) + (س \times س)] = [٤]$

$س^{٢} = ٤ + ١٢ \Leftarrow ٤ = س^{٢} - ١٢$ $\Leftarrow س^{٢} = ١٦$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$س = \pm ٤ \Leftarrow س = \pm \sqrt{١٦}$

---

• خارجي/ إذا كانت P مصفوفة من الرتبة ٣×٢ و م محايدة ضربية و ما العبارة الصحيحة دائماً فيما يلي :

أ/ (م+P) معرفة ب/ (م.P = P.م = P) ج/ م.P معرفة د/ P.P معرفة

الحل/ ✗ (م+P) غير معرفة لأنه رتبة م ≠ رتبة P

✗ ب/ P.م = م.P = P ⇐ P.م غير معرفة لأنه عدد أعمدة P ≠ عدد صفوف م

✓ ج/ م.P معرفة ⇐ معرفة لأنه عدد أعمدة م = عدد صفوف P

✗ د/ P.P معرفة ⇐ غير معرفة ⇐ أعمدة P ≠ صفوف P "غير مربعة"

---

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية :

• 2020 دور أول/ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٣ \\ ٥ & ب & ١ \end{bmatrix}$ و $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٥ & ب \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ و جد P×ب

الحل/ $P_{٢\times٣} \times ب_{٣\times٢}$

$\begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٥ & ب \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ١- & ٢ \\ ١ & ب & ٥ \end{bmatrix}$

$P \times ب = \begin{bmatrix} (٢\times-١)+(-١\times ب)+(٣\times٢) & (٢\times٤)+(-١\times٥)+(٣\times-١) \\ (١\times-١)+(ب\times ب)+(٥\times٢) & (١\times٤)+(ب\times٥)+(٥\times-١) \end{bmatrix}$

$P \times ب = \begin{bmatrix} ٤ & ب \\ ١٩ & ٣- \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

---

• 2020 دور ثاني/ حل المعادلة المصفوفية التالية :

$٣س - \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١- & ٣ \\ ب & ٤ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ب \\ ٢ & ب \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix}$

الحل/ $٣س - \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (١\times١)+(-١\times ب)+(٣\times٥) & (١\times ب)+(-١\times٢)+(٣\times٤) \\ (ب\times١)+(٤\times ب)+(٣\times٥) & (ب\times ب)+(٤\times٢)+(٣\times٤) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٧- \\ ٢٣ & ١٢- \end{bmatrix} = س٣ \Leftarrow \quad \begin{bmatrix} ٨ & ٧- \\ ٢٣ & ١٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} - س٣ \Leftarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{١٠}{٣} & ٢- \\ ٩ & ٣- \end{bmatrix} = س \Leftarrow \quad \frac{١}{٣} \times \begin{bmatrix} ١٠ & ٦- \\ ٢٧ & ٩- \end{bmatrix} - \frac{س٣}{٣} \Leftarrow$$

---

• 2022 دورثاني/ إذا كانت س ، ص مصفوفتين من المرتبة الثانية 6 حيث $٣س - ٢(و + س) = ص^{٢}$ و بين أن $س ص = ص س$.

الحل/ $٣س - ٢(و + س) = ص^{٢} \Leftarrow ٣س - ٢و - ٢س = ص^{٢}$

$\Leftarrow (٣س - ٢س) - ٦ = ص^{٢}$

$\Leftarrow س - ٦ = ص^{٢}$

$س = ص^{٢}$

$\Leftarrow \begin{cases} س \times س = ص \times س = س \\ س \times ص = ص \times ص = س \end{cases} \Rightarrow س ص = ص س = س$ #

(ن ∈ ط ، ن ≥ ٤ ، ن = ٦)

(س ∈ ط ، س = ٦ ± س ومحايدة ضائع)

---

• 2024 دورأول/ ليكن $\begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٤ & ب \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} أ & ب \\ ا & ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١٦- \\ ب & ٨- \end{bmatrix}$ و ما قيمة أ+ب.

الحل/

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} ٦ + أ٨ & ٦ + ب٨ \\ ب٤ + ا٢٤ & ٤ب + ا٢٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦- & ٦ \\ ٨- & ب \end{bmatrix}$$

من تساوي المصفوفتين ينتج أن :

$أ٨ + ٦ = ٦ \Leftarrow أ٨ = ٠ \Leftarrow أ = ٠$ و $ب٤ = ب \Leftarrow ب = ٠$

$\frac{أ٨}{٨} = \frac{-١٦}{٨} \Leftarrow ب = -٢$ و $\frac{ب٤}{٤} = \frac{-٨}{٤} \Leftarrow ب = -٢$

وضنه $أ + ب = ٠ + -٢ = -٢$

أ.مي حواري

---

• 2025 دورأول/ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٣ \\ ٣- & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ و $ب = \begin{bmatrix} ٣- \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$ و جد:

١/ ما رتبة المصفوفتين

٢/ جد أ.ب "إن أمكن"

٣/ ما قيمة $ب^{١٣} - أ^{١٢}$

الحل/

١/ أ تتكون من صفين وثلاثة أعمدة ← رتبة أ = ٢×٣

ب تتكون من ٣ صفوف وعمود ← رتبة ب = ٣×١

٣/ $ب^{١٣} - أ^{١٢} = ١ - ٥ = -٤$

/٣ $ب.أ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٥ & ٤ & -٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -٣ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٣\times٢)+(٠\times-١)+(١\times٣) \\ (٣\times٥)+(٤\times٠)+(-٢\times١) \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ب.أ = \begin{bmatrix} -٣ \\ -١٧ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

• قباطية 2024/ إذا كان $\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ ٥- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٣ \\ ٣ & -٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$

الحل/ $\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ ٥- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٣\times٤)+(٣\times٣)+(-٦\times٠) & (٤\times١)+(٣\times٣)+(-٦\times٢) \\ (٣\times٥)+(٠\times٣)+(٤\times٠) & (-١\times٥)+(٢\times٣)+(١\times٠) \end{bmatrix}$

من تساوي المصفوفات /

* $٤+٣س-١٨=-٢ \Leftarrow ٣س-١٤=-٢ \Leftarrow \frac{٣س}{٣}=\frac{١٢}{٣} \Leftarrow س=٣$

* $-٢٠+٠+٣ص=-٢ \Leftarrow \frac{٣ص}{٣}=\frac{-١٨}{٣} \Leftarrow ص=-٦$

• بيت لحم/ 2024 اذا كانت $أ+ب = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ و $جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

ما المصفوفة التي تمثل $أجـ+بجـ$

الحل/ $أجـ+بجـ = (أ+ب)\times جـ$ اخراج جـ عامل مشترك من اليسار

$\Leftarrow أجـ+بجـ = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-١\times١)+(٠\times-٣) & (-١\times٢)+(٠\times١) \\ (٢\times١)+(١\times-٣) & (٢\times٢)+(١\times١) \end{bmatrix}$

$\Leftarrow أجـ+بجـ = \begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$

• القدس 2025/ إذا كان $\begin{bmatrix} س & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ٢س \end{bmatrix} = [٠]$ و ما قيمة س.

الحل/ $[(س\times س)+(٢\times٢س)] = [٠] \Leftarrow س^{٢}+٤س=٠$

$\Leftarrow س^{٢}+٤س-٥=٠ \Leftarrow (س+٥)(س-١)=٠$

إما $س-١=٠ \Leftarrow س=١$

أو $س+٥=٠ \Leftarrow س=-٥$ $\Leftarrow س=\{-٥,١\}$

شو المانع أنك تحاول مرّة و مرتين و ألف ؟!

• خارجي/ إذا كان $P = [3 \quad -1]$ ، $ج = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & ن \end{bmatrix}$ ، $P \cdot (ب + ج) = [-4 \quad 2]$

جد المصفوفة $و_{2\times1} = (ب \cdot P)$

الحل/

$P \cdot ج = [3 \quad -1] \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ ن & 1 \end{bmatrix} = [(3\times-2)+(-1\times ن) \quad (3\times3)+(-1\times1)]$

$\Leftarrow P \cdot ج = [-7 \quad 9]$

$P \cdot (ب + ج) = P \cdot ب + P \cdot ج = [2 \quad -4]$

$P \cdot ب = [2 \quad -4] - [-7 \quad 9]$

$\Leftarrow P \cdot ب = [9 \quad -13]$

$\Leftarrow و_{2\times1} = (ب \cdot P) - = (ب \cdot P) - = \begin{bmatrix} 9 \\ -13 \end{bmatrix} = [13 \quad -9]$

أ.ميّ حواري

طيب وبعدين؟ الخطوة يلّي بنأجّلها كلّ مرّة بدون سبب واضح، متىٰ، وأنت عارف إنّه حيكون لها تأثير ضخم بحياتك، بس بدها شويّة شجاعة وكتير إيمان، وتحكي بسم الله وتبدأ، يااااا خي ابدأ.. وربك ييسّر الخير!

# الدرس الرابع | المحددات

## • القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2019 دور أول / اذا كانت $\begin{vmatrix} 3 & -12 \\ -3 & 3x \end{vmatrix} = 6$ ما قيمة x

أ/ -5 ب/ 6 ج/ 7 د/ 5

الحل/ $= (3x \times 3) - (-12 \times -3) = 6$

$3x = 6 + 36 \Leftarrow 36 - 3x = 6 \Leftarrow \frac{-6x}{-6} = \frac{30}{-6} \Leftarrow x = 5$

---

• 2020 / إذا كانت $P = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ وكان $|P| = 1$ فما قيمة x

أ/ 1 ب/ -5 ج/ $\frac{13}{2}$ د/ 5

الحل/ $|P| = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (3x3) - (2x) = 1$

$3x = 14 - 1 \Leftarrow \frac{3x}{3} = \frac{15}{3} \Leftarrow x = 5$

---

• 2020 دور ثالث / ما قيمة x حيث $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7$

أ/ 1 ب/ -1 ج/ 3 د/ $\frac{11}{3}$

الحل/ $(3x \times 1) - (4 \times -1) = 7 \Leftarrow 3x + 4 = 7 \Leftarrow \frac{3x}{3} = \frac{3}{3} \Leftarrow x = 1$

---

• 2022 دور أول / إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ x & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ وكان $|B| = 2$ فما قيمة x

أ/ 3,5 ب/ 1 ج/ 2 د/ 1,5

الحل/ $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (3 \times \frac{1}{2}) - (1 \times x) = 2$

$x = 1,5 - 2 \Leftarrow x = 3,5$

---

• 2022 دور أول / ماذا يسمى المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

أ/ صفرية ب/ محايدة ج/ مربعة د/ مفردة

الحل/ ✗ أ/ صفرية _ بما أن تكون كل عناصر المصفوفة (صفر)

✗ ب/ المحايدة = $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

✓ ج/ مربعة / عدد الصفوف = عدد الأعمدة

✗ د/ مفردة $|A| = 0 \Leftarrow (2 \times 2) - (1 \times 1) = 3 - 1 = 2$ ليست مفردة

أ.مي حواري

---

أنت تحاول .. وكم للمحاولات من تفاصيل وكم للتفاصيل من أجر .. يا فتى !

• 2023 دور أول/ إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٥- \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $|٣س|$

٣/P ب/ ١٢ ج/ ٦ د/ ٢٨-

الحل/ م م : $|لـ س| = لـ^{ن} |س|$ ، لـ ∈ ح ، ن ∈ ط ، ن رتبة المصفوفة.

$|س| = \begin{vmatrix} ٢ & ٥- \\ ١ & ١- \end{vmatrix} = (٢- \times ١) - (١- \times ٥) = -٢ + ٥ = ٣$ (نأخذ الإشارة +)

رتبة المصفوفة ٢

$|٣س| = ٣^{٢} |س| = ٩ \times ٣ = ٢٧$

---

• 2025 دور أول/ $P_٣$ مصفوفة مفردة ، $م_٣$ محايدة ضربية ، ما قيمة $|P_٣ + م_٣|$

١/P الحل/ ب/ صفر ج/ ٢ د/ ٣

$|م_٣| =$ صفر لأنها مفردة

$|م_ن| = ١$ دائماً

$\Leftarrow |P_٣ + م_٣| = ن + ١ = ١$

أ.مي حواري

---

• 2025 القدس الشريف/ إذا كان $\begin{vmatrix} ٧ & ٣ \\ ٣س- & ٤- \end{vmatrix} = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ٤س & س- \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix}$ ، ما قيمة الثابت س

١٤/P ب/ ٧- ج/ ٢٨ د/ ٧

الحل/ $(٨- \times ٤) - (٣- \times ٣س) = \frac{١}{٢} ((٤س \times ٢) - (٦ \times س-))$

$-٢٨ + ٩س = \frac{١}{٢} (٨س + ٦س)$

$-٢٨ + ٩س = \frac{١}{٢} \times ١٤س \Leftarrow -٢٨ + ٩س = ٧س$ (÷ -٢) $\Leftarrow ١٤ = س$

$-٩س \quad -٩س$

---

• 2025 شمال الخليل/ إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ١- & ٤- \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix}$ ، وكان $|لـ س| = ٤٨$ ، ما قيمة الثابت لـ

١/P ب/ ٢ ج/ ١٤١- د/ ٦٢-٢

الحل/ $|س| = (٣- \times ٨) - (٩ \times ٤-) = ٢٤ + ٣٦ = ١٢$

$|لـ س| = لـ^{٢} |س| = لـ^{٢} \times ١٢ = ٤٨ \Leftarrow لـ^{٢} = \frac{٤٨}{١٢} = ٤$ ← بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$لـ = \pm ٢ \Leftarrow لـ = ٦٢-٢$

---

• خارجي/ إذا كانت المصفوفة $P_٣$ مصفوفة مفردة ، $م_٣$ محايدة ضربية ، ما قيمة

$٢|P_٣| + |-٣م_١| + |أ_٣|$

١/P ب/ ٢ ج/ ٤

الحل/ $P_٣$ مفردة $\Leftarrow |P_ن| = ٠$ ، $|م_ن| = ١$ دائماً ، $|أ_ن| = ن$

$\Leftarrow ٢|P_٣| + |-٣م_١| + |أ_٣| = ٢ \times (٠) + (-٣)^{٣} |م_١| + ٣$

$= ٠ + (٤ \times ١) + (٤ \times ١) = ٤$

• خارجي/ اذا كان $\vec{P}$ و $\vec{b}$ متعامدتين من الرتبة $3\times2$ و $|\vec{P}|=8$ و $|\vec{P}-\vec{b}|^2=50$
ما قيمة $|\vec{P}-\vec{b}|$

د/ -3 ج/ 3 ب/ $\frac{1}{3}$ أ/ $-\frac{1}{3}$

الحل/ $|\vec{P}|^2=|\vec{P}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{P}||\vec{b}|\cos\theta$

$50=64+|\vec{b}|^2-2\times8\times|\vec{b}|\times\frac{-4}{8}$

$|\vec{b}|^2+8|\vec{b}|-14=0$

$(|\vec{b}|+7)(|\vec{b}|-2)=0$

$|\vec{b}|=2$

$|\vec{P}-\vec{b}|=|-\vec{b}|=|\vec{b}|=2$

---

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية :

• 2019 دور أول/ جد قيمة س التي تجعل

$$\begin{vmatrix} س & -2 & 1 \\ ث & 1 & -1 \\ ث & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل/

$$س\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & ث \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} ث & -1 \\ 5 & ث \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} ث & ث \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (3\times3)-(-1\times2)$$

$$س(ث-6)+2(ث^2+5)+(6ث-5ث)=11$$

$$س(ث-6)+2ث^2+ث+10=11$$

$$س(ث-6)+2ث^2+ث-1=0$$

$$(ث+1)(2ث-1)=0$$

$$ث=-1 \quad \text{أو} \quad ث=\frac{1}{2}$$

$$-س-6-2+1=11 \Rightarrow -س-7=11 \Rightarrow -س=18 \Rightarrow س=-18$$

$$\frac{1}{2}س-3-1=11 \Rightarrow \frac{1}{2}س=15 \Rightarrow س=30$$

---

• 2020 دور أول/ جد قيمة

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ ث & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

الحل/

$$1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} ث & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} ث & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=((4\times-1)-(-2\times5))+2((ث\times-1)-(5\times1))+3((ث\times-2)-(4\times1))$$

$$=(-4+10)+2(-ث-5)+3(-2ث-4)$$

$$=6-10-12=-16$$

---

• 2020 دور ثاني/ ما قيمة س حيث

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ س & 2 & ث \\ ث & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

الحل/

$$-3\begin{vmatrix} 2 & ث \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} س & ث \\ ث & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} س & 2 \\ ث & 3 \end{vmatrix} = (5\times1)-(4\times-1)$$

$\leftarrow -3\left|\begin{matrix}(-4\times2) & (-3\times3)\\ (-3\times1) & (-2\times4)\end{matrix}\right| + 2\left|\begin{matrix}(-3\times3) & (-2\times4)\\ (-3\times4) & (-2\times5)\end{matrix}\right| = -4$

$-3\left|\begin{matrix}-8 & -3\\ -4 & -3\end{matrix}\right| + 2\left|\begin{matrix}-3 & -4\\ -3 & -5\end{matrix}\right| = 9$

$-24 + 8w + 3w = 9 \leftarrow \frac{11w}{11} = \frac{33}{11} \leftarrow w = 3$

---

• 2020 دورثاني/ إذا كانت $P$ و $B$ مصفوفتان مربعتان من الرتبة $2\times2$ وكان $|AB| = 7$ ، $|P| = 3$ ، أوجد قيمة كل من $|2AB|$ ، $|P^{-1}|$

أ.ميّ حواري

الحل/ $|P||AB| = 7 \quad \ldots(1)$

$|2AB| = 4 \quad \ldots(2)$

$(1)-(2) \leftarrow |AB| - 2|AB| = 7-4 \leftarrow -|AB| = 3 \leftarrow |AB| = -3$

نعوض $|AB|$ في (1):

$3|P| = 7 \leftarrow |P| = \frac{7}{3}$

---

• 2020 دورثالث/ جد قيمة $s$ حيث $\left|\begin{matrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 0 & t\\ -3 & 1 & s\end{matrix}\right| = 7$

الحل/ $1\left|\begin{matrix}0 & t\\ 1 & s\end{matrix}\right| - 2\left|\begin{matrix}2 & 0\\ -3 & s\end{matrix}\right| + 4\left|\begin{matrix}2 & t\\ -3 & 1\end{matrix}\right| = 7$

$(0\times s) - (t\times1) + 2[(2\times s) - (0\times-3)] + 4[(2\times1) - (t\times-3)] = 7$

$-t + 2(2s) + 8 + 4t = 7$

$-t + 4s + 8 + 4t = 7$

$3t + 4s + 8 = 7 \Rightarrow 3t + 4s = -1$

$3t + 4s = -1 \Leftarrow t = \frac{-1-4s}{3} = -1 - \frac{4}{3}s$

---

• 2021 دورأول/ جد قيمة $s$ حيث $\left|\begin{matrix}s & 1\\ 3 & 2\end{matrix}\right| + 2\left|\begin{matrix}3 & 2\\ 1 & -s\end{matrix}\right| = 13$

الحل/ $(2\times s) - (1\times3) + 2[(3\times-s) - (2\times1)] = 13$

$(2s-3) + 2(-3s-2) = 13$

$2s - 3 - 6s - 4 = 13 \leftarrow -4s = 20 \leftarrow s = -5$

---

• 2020 دورأول/ ما قيمة $\left|\begin{matrix}1 & -2 & 4\\ 4 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 5\end{matrix}\right|$

الحل/ $1\left|\begin{matrix}-3 & 1\\ -1 & 2\end{matrix}\right| - 2\left|\begin{matrix}4 & 1\\ 5 & 2\end{matrix}\right| + 4\left|\begin{matrix}4 & -3\\ 5 & -1\end{matrix}\right|$

$= (-٦-١) + ٢/١ \times ٨ - ٥٠٢ + ٤(-٤-١٠٥)$

$= -٥ + (٢/٧٥ \times ٢) + ٤(-٢١٠)$

$= -٥ + ١٥ - ١٠ = -١٠ + ١٠ = ب$

• 2021 دورثاني / إذا كانت $ب = \begin{bmatrix} س & ١ & -٢ \\ ١-س & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة $|ا ب|$

الحل/ $|ا ب| = س \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - ١- \begin{vmatrix} ١-س & ٤ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} + ٢- \begin{vmatrix} ١-س & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix}$

$\Leftarrow |ا ب| = س(٣ \times ١ - ٢ \times ٤) - (١ - س - ٤ \times ٥) - ٢(٢ - ٥(١-س))$

$= س(٣-٨) - (١-س-٢٠) - ٢(٢-٥س+١٥)$

$= -٥س - (-١٩-س) - ٢(-١٣-٥س)$

$= -٥س + ١٩ + س + ٢٦ + ١٠س$

$= (-٥س + س + ١٠س) + (١٩ + ٢٦) = ٦ب + ٤٥ = ٤٥$

أ.مي حواري

• 2021 دورثالث/ إذا كانت $\begin{vmatrix} س & -٢ & ١ \\ ب & ١ & -١ \\ ٥ & ٦ & ب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & -١ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix}$ ما قيمة س

الحل/ $م \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ب & ٦ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} -١ & ب \\ ب & ٥ \end{vmatrix} + ٢- \begin{vmatrix} ١ & ب \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = (٢ \times م) - (-١ \times ٥)$

$م(١ \times ب - (٦ \times -١)) + ١(ب \times ب) - (-١ \times ٥)) + ٢-(١ \times ٦) - (٥ \times ب)) = ٢م + ٥$

$م(ب + ٦) + ١(ب^٢ + ٥) + ٢-(٦ - ٥ب) = ٢م + ٥$

$٦م + ب - ٥ = ٢م + ٥ \Leftarrow ٦م + ب = ٢م + ١٠$

$\Leftarrow ٦م = ٢م \Leftarrow \frac{٦م}{ب} = \frac{٢م}{ب} \Leftarrow م = ب$

• 2022 دورأول/ جد قيمة س التي تجعل $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & ب & س \\ ١ & -٢ & ٢س+١ \end{vmatrix} = -٣٥$

الحل/ $٢ \begin{vmatrix} ب & س \\ -٢ & ٢س+١ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ١ & س \\ ١ & ٢س+١ \end{vmatrix} + ١- \begin{vmatrix} ١ & ب \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = -٣٥$

$٢(ب(٢س+١) - (-٢ \times س)) - ٣(١ \times ٢س+١ - (١ \times س)) - ١(-٢ - (١ \times ب)) = -٣٥$

$٢(ب(٢س+١) + ٢س) - ٣(٢س+١-س) - (-٢-ب) = -٣٥$

$٢ب(٢س+١) + ٤س - ٣(س+١) + ٢ = -٣٥$

$٤س - ٣س^{٣} + ٢ = -٣٥ \Leftarrow س_{١+}-١=-٣٥_{١+} \Leftarrow س = -٣٤$

• 2022 دورثاني/ إذا كانت P، ب مصفوفتان حيث ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -س & ٠ \\ ٠ & س^{٢} & ٢ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix}$ و P مصفوفة مربعة

ثنائية منفردة ماهيمة/ قيم التي تجعل |P| = |ا ب|

الحل/ P منفردة $\Leftarrow$ |P| = ٠

|P| = |ا ب| = ٠ $\Leftarrow$ |ا| = ٠

$$|ا| = ٢\begin{vmatrix} س^{٢} & ٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} - س\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} + ٠\begin{vmatrix} ٠ & س^{٢} \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

$٢(س^{٢} \times ١) - (٢ \times ٠) - س(٠ \times ١) - (٢ \times ١) + ٠ = ٠$

$٢(س^{٢}) + س \times -٢ = ٠$

$٢س^{٣} - ٢س = ٠ \Leftarrow$ اخراج ٢س عامل مشترك.

$٢س(س - ١) = ٠$

إما $\frac{٢س}{٢} = \frac{٠}{٢} \Leftarrow س = ٠$ أو $س - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$

$\Leftarrow س = \{١، ٠\}$

أ.مي حواري

• 2023 دور أول/ حل المعادلة $\begin{vmatrix} س & ٣ & -١ \\ ١ & -٣ & ٢ \\ ٠ & -٢ & ٥ \end{vmatrix} = -٣٥$

الحل/

$$س\begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ٥ \end{vmatrix} - ٣\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix} - ١\begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٠ & -٢ \end{vmatrix} = -٣٥$$

$س(٥ \times ٣-) - (٢ \times ٢-) - ٣(٥ \times ١) - (٠ \times ٢) - ١(٠ \times ٣-) - (٢- \times ١) = -٣٥$

$س(١٥- - ٤) - ٣(٥ - ٠) - (٠ - ٢-) = -٣٥$

$-١١س - ١٥ + ٢ = -٣٥ \Leftarrow -١١س = -١٣ - ٣٥ \Leftarrow \frac{-١١س}{-١١} = \frac{-٢٢}{-١١} \Leftarrow س = ٢$

• 2023 دورثاني/ جد قيمة محددة المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & -٣ & ٢ \\ ٠ & -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

الحل/ |ب| = $٢\begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ٥ \end{vmatrix} - ٣\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix} - ١\begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٠ & -٢ \end{vmatrix}$

$= ٢(-١٥ - ٤) - ٣(٥ - ٠) - (-٢ - ٠)$

$= ٢ \times -١١ - ١٥ = -٢٢ - ١٥ + ٢ = -٣٥$

• 2023 دور ثاني/ حل المعادلة $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١- \\ ١ & ٣- & ٢ \\ ك & ٢- & ٥ \end{vmatrix} = س - ٣٠$

الحل/ ← تم إيجاد قيمتها في السؤال السابق (-٣٥)

$\Leftarrow -٣٥ = ٣٠ - س \Leftarrow س = ٣٠ + ٣٥- \Leftarrow س = ٥-$

---

• 2024 دور أول/ اذا كان $\begin{vmatrix} ٣- & ٢- & ١ \\ س & ٢ & ١- \\ ٤ & ٣ & ٢- \end{vmatrix} = ٢-$ جد قيمة الثابت س

الحل/ $٣- \begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٣ & ٢- \end{vmatrix} - ٢- \begin{vmatrix} س & ١- \\ ٤ & ٢- \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٢-$

$-٣ ((٢ \times ٢-) - (١ \times ٣-)) + ٢ (-٢س - (٤ \times ١-)) + (٣س - ٢ \times ٤) = ٢-$

$-٣ (-٤ + ٣) + ٢ (-٢س + ٤) + (٣س - ٨) = ٢-$

$(-٣ \times ١-) + ٣س - ٨ + ٤س - ٨ = ٢-$

$٣ - ٤س + ٣س = ٢- \Leftarrow \frac{٣-}{٣-} = \frac{س ٣-}{١-} = \frac{٢-}{١-} \Leftarrow س = ٥$

---

• 2024 دور أول/ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} ٣ & س \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$ و $ب = \begin{bmatrix} ؟ & ٥- \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$ وكانت

$|ب| - |P| = ١٢٣$ و جد $ب \cdot P$

الحل/ $٢P - ب = ٢$

$\begin{bmatrix} ؟ & ٥- \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & س \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} ٢ = ب - ٢P$

$\begin{bmatrix} ؟ & ٥- \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & س ٢ \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} ٦ & ٥ + س ٢ \\ ١١ & ٤- \end{bmatrix} =$

$|٢P - ب| = (٥ + س ٢)(١١-) - (٤- \times ٦) = ١٢٣$

$٢٢س + ٥٥ + ٢٤ = ١٢٣ \Leftarrow ٧٩ + س ٢٢ = ١٢٣$

$\Leftarrow \frac{٢٢س}{٢٢} = \frac{٤٤}{٢٢} \Leftarrow س = ٢$

$\Leftarrow ب \cdot P = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ؟ & ٥- \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} (٤ \times ؟) + (-٣ \times ٣) & (-١ \times ؟) + (٣ \times ٥-) \\ (٤ \times ٣-) + (٦ \times ٣) & (-١ \times ٣-) + (٦ \times ٥-) \end{bmatrix} =$

$\Leftarrow ب \cdot P = \begin{bmatrix} ١٠- & ١١- \\ ٦- & ٧ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

• 2024 دور ثاني/ حدد محدد $P = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & -٣ & ٣ \\ ؟ & -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

الحل/ $|P| = -٣٥$ مكرر (2023 دور ثاني).

---

• 2024 دور ثاني/ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -١ & ؟ \end{bmatrix}$ ، $ب٢ = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ؟ & -٢ \end{bmatrix}$ جد إن أمكن $|ب٣ - P٢|$

الحل/ $ب٣ - P٢ = ٣\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ؟ \end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -١ & ؟ \end{bmatrix}$

$ب٣ - P٢ = \begin{bmatrix} ٩ & ٦ \\ -٣ & ؟ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ -٢ & ؟ \end{bmatrix}$

$ب٣ - P٢ = \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ١ & ؟ \end{bmatrix}$

$|ب٣ - P٢| = (١ \times ؟) - (١ \times ٤-) = ؟ + ٤ = ٤-$

$ب = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ -٢ & ؟ \end{bmatrix}$

$ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ؟ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

---

• 2024 دور ثالث/ إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & -٢ & ؟ \\ ٣ & ؟ & ١ \\ ٢ & س & ١ \end{vmatrix} = -٤$ فما قيم س

الحل/ $١\begin{vmatrix} ؟ & ٣ \\ س & ١ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - ؟\begin{vmatrix} ١ & ؟ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = -٤$

$(؟ \times ١) - (٣ \times س) + ٢(١ \times ١) - (٢ \times ٣) = -٤$

$-٣س + ٢(١ - ٦) = -٤ \Leftarrow -٣س + ٢ \times ٥- = -٤ \Leftarrow -٣س - ١٠ = -٤$

$١٠ + ١٠ +$

$\Leftarrow -٣س = ٦ \in س = -٢$

---

• 2024 دور ثالث/ إذا كانت P، ب مصفوفتين من الرتبة الثانية وكان $P = \begin{bmatrix} ؟ & ٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ وكانت $|٤ب| = -٨$ وكانت $|ب| = -٢$ فما قيمة $|٤P| + |ب|$

الحل/ $|P| = (١ \times ٣) - (-١ \times ؟) = ٣$

$|٤ب| = -٨ \Leftarrow |ب| = -٢$

المطلوب/ $|٤P| + |ب| = ٤ \times ٣ - ٢ = ١٢ - ٢ = ١٠$

---

• 2025 دور أول/ إذا كانت $\begin{vmatrix} -٣ & -٢ & ١ \\ س & ٢ & -١ \\ ٤ & ٣ & -٢ \end{vmatrix} = -٢$ فما قيمة س

الحل/ $-3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1- \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2- & 1- \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2- & 1- \end{vmatrix} 2 = -2$

$-3(3\times3 - (-2)\times2) - 2(3\times(-1) - (-2)\times4) + (1\times2 - 4\times3) = -2$

$-3(9+4) + 2(-3-8) + (2-12) = -2$

$-39 - 22 - 10 = -2$

$-71 = -2$ ✗

---

• 2025 دورثاني/ حد قيمة المقدار الآتي $\begin{vmatrix} 3 & 2- & 1- \\ 4 & 1- & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} 2 + \begin{vmatrix} 1- & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

الحل/ $3\begin{vmatrix} 1- & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1- \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2(0\times4 - (-1)\times3)$

$= 3(-1\times2) - (0\times1) + 2(4\times2 - 2\times1) - (4\times0 - 2\times1) + 2(0 - (-3))$

$= 3\times2- + 2(8-2) - (0+2) + 2\times3$

$= 6\times2 - 2 = 12-2 = 10$

---

• بيّن لعام 2024/ حل المعادلة المصفوفية

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1- \end{bmatrix} 2- س = ص + س \begin{vmatrix} 4 & 2- \\ 1- & 1 \end{vmatrix}$

الحل/ $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2- \end{bmatrix} - س = ص + س((4\times1) - (1-\times2-))$

$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2- \end{bmatrix} - س3 = ص \leftarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2- \end{bmatrix} - س = ص + س3-$

$س3 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 2- \end{bmatrix} \leftarrow س3 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ب & 1 \\ 1 & ب \end{bmatrix} \leftarrow$

$\frac{1}{3}\times$ / $س = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3}- \end{bmatrix} \leftarrow$ س =

أ.مي حواري

---

• طارق/ ما حل المعادلة/

$\begin{vmatrix} 3 & 1- & 3 \\ 4 & س & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & 1- \\ 1 & س \end{vmatrix}$

الحل/ $|\begin{matrix}س & ٤\\ ١ & ٦\end{matrix}| + ٣ |\begin{matrix}٥ & ٤\\ ٣ & ١\end{matrix}| + ٢ |\begin{matrix}٥ & س\\ ٣ & ٦\end{matrix}| = (س \times س) - (-١ \times ١)$

$س^{٤} + ١ = ٢(٦ \times ٥ - ٣س) + (٣ \times ٤ - ١ \times ٥) ٣ + (٣س - ٦ \times ٤) ١$

$س^{٤} + ١ = ٢(٣٠ - ٣س) + (٢٠ - ١٢) ٣ + (٢٤ - س) ١$

$س^{٤} + ١ = ٦٠ - ٦س + ٧ + ٢٤ - س$

$س^{٤} + ١ = ١٩ + ٣س$

$س^{٤} - ٣س - ١٨ = ٠$

$(س + ٣)(س - ٦) = ٠$

إما $س + ٣ = ٠ \Leftarrow س = -٣$ أو $س - ٦ = ٠ \Leftarrow س = ٦$

$\Leftarrow س = \{٦، -٣\}$

---

• خارجي تفوق/ ما حل المعادلة المصفوفية التالية

$\begin{vmatrix}٣ & ٤\\ ٥ & ٣\end{vmatrix} \left( \begin{bmatrix}١ & ٠\\ ٠ & -٢\end{bmatrix} + ٣س \right) = ٣ \begin{vmatrix}١ & ٠\\ ٣س & ١\end{vmatrix}$ (م، س)

الحل $\left( (٣ \times ٣ - ٥ \times ٢) \right) \left( \begin{bmatrix}١ & ٠\\ ٠ & -٢\end{bmatrix} + ٣س \right) = ٣ \left( (١ \times ١) - ٠ \times ٣س \right)$ (م، س)

$(س - م^{-١}) ٣ = \left( ٣س + \begin{bmatrix}٥ & ١\\ ٠ & -٢\end{bmatrix} \right)^{-٢}$

$٣س - ٣م = -٤س + \begin{bmatrix}-١٠ & -٢\\ ٠ & ٤\end{bmatrix}$

$٣س + ٤س = ٣م + \begin{bmatrix}-١٠ & -٢\\ ٠ & ٤\end{bmatrix}$

$٧س = ٣م + \begin{bmatrix}-١٠ & -٢\\ ٠ & ٤\end{bmatrix}$

$س = \frac{١}{٧} ٣م + \frac{١}{٧} \begin{bmatrix}-١٠ & -٢\\ ٠ & ٤\end{bmatrix}$

$س = \frac{٣}{٧} م + \frac{١}{٧} \begin{bmatrix}-١٠ & -٢\\ ٠ & ٤\end{bmatrix}$

$\Leftarrow س = \begin{bmatrix}-١٠ & -٥\\ -٣ & ٤\end{bmatrix}$

---

أ.مي حواري

"الألف مرّة التي نَوَيت فيها أن تبدأ، تحتاج إلى المرّة التي بها تبدأ.. فابدأ."

# الدرس الخامس | النظير الضربي للمصفوفة المربعة

## • القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة

• 2019 دور أول + 2024 دور أول / إذا كان $P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ما هي المصفوفة P

أ/ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ب/ $2\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ج/ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ د/ $-2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

الحل/ $P = (P^{-1})^{-1}$

$|P^{-1}| = (3\times2) - (4\times1) = 6-4 = 2$

$(P^{-1})^{-1} = P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

---

• 2019 دور ثاني/ إذا كان $P \times \begin{bmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ حد المصفوفة P

أ/ $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

الحل/ $P \times ب = P$ ، $P \times ب \times ب^{-1} = P \times ب^{-1}$

$P = ب^{-1}$

$|ب| = (5\times7) - (4\times9) = 35-36 = -1$

$ب^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} = P$

---

• 2019 دور ثالث/ ما قيمة س التي تجعل $P = \begin{bmatrix} 2 & س \\ 1 & -3-س \end{bmatrix}$ منفردة

أ/ $-2P$ ب/ 1 ج/ 2 د/ $3P$

الحل/ $|P| = 0$ ، لأنها منفردة

$|P| = (2\times(-3-س)) - (س\times1) = 0$

$-6-2س-س = 0 \Leftarrow -6-3س = 0 \Leftarrow \frac{-6}{-3} = \frac{3س}{3} \Leftarrow س = 2$

---

• 2019 دور ثالث/ $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ و $P^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & ص \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ ما قيمة س، ص على الترتيب:

أ/ $-6, 4$ ب/ $-4, 6$ ج/ $6, -4$ د/ $4, 6$

الحل/ $P \times P^{-1} = م \Leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\times-5)+(3\times-4) & (2\times ص)+(3\times3) \\ (5\times-5)+(3\times-4) & (5\times ص)+(3\times3) \end{bmatrix}$

$5ص+9 = 1 \Leftarrow -5ص = -10 \Leftarrow ص = 2$ ، $-37+3س = 0 \Leftarrow 3س = 37 \Leftarrow س = 12$

• 2020 الدورة الأولى/ ما المصفوفة المنفردة من الآتية :

أ/ $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ٦- & ٤ \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ١ & ب \\ ب & ١- \end{bmatrix}$

الحل/ |أ| = (٢×٣) - (١×٥) = ٦ - ٥ = ١ غير منفردة .

|ب| = (٣×٤) - (٣-×٢) = ١٢ - ٦ = ١٢ ∴ ب منفردة

|ج| = (٣×٢) - (١-×٦) = ٦ - ٦ = ٠ غير منفردة

|د| = (ب×ب) - (١-×١) = ب٢ - ١- = ب٢ + ١ غير منفردة

أ.مي حواري

---

• 2020 دورة ثانية/ تكن $P = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$ وما قيمة س التي تجعل P منفردة .

أ/ ٢ ب/ ٢- ج/ ٤ د/ ٤-

الحل/ |P| = (٢×س) - (١-×٤) = ٠

٢س + ٤ = ٠ ⇐ ٢س = ٤- ⇐ س = ٤-/٢ ⇐ س = ٢-

---

• 2020 دورة ثانية/ إذا كانت $P^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥- \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$ وما قيمة |P|

أ/ ١ ب/ ١- ج/ ١١ د/ ٣

الحل/ ∵ |P| × |P^{-١}| = ١

|P^{-١}| = (٣×٢) - (١-×٥) = ٦ - ٥ = ١

|P| × |P^{-١}| = ١ ⇐ |P| × ١ = ١ ⇐ |P| = ١

---

• 2021 دورة ثانية/ إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} س & ٢- \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ (P) منفردة وما قيمة س

أ/ ٤- ب/ ٤ ج/ ٣ د/ ٣-

الحل/ |P| = (٣س) - (٣×(٢-)) = ٠

٣س = ٦- ⇐ س = ٦-/٣ ⇐ س = ٢-

---

• 2021 دورة ثالثة/ إذا كانت P مصفوفة مربعة فيها العنصر $P_{١١} = ١$ وكان |P| = ١ فإن P مصفوفة

أ/ معكوسها جمعي لنفسها ب/ محايدة ضربية ج/ منفردة د/ صفرية .

الحل/ لأنها محايدة ضربية لأن $أم_{١} = ١$ وليست صفر

ولأنها صفرية لأن $P_{١١} = ب$ وليس ١

∴ P منفردة

---

• 2022 دورة ثانية/ أي من المصفوفات الآتية ليس لها نظير ضربي :

أ/ $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٤- \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix}$

الحل/ |أ| = (٦×٢) - (٣×٤-) = ١٢-١٢ = ٢٤ عين منفردة "لها نظير ضربي"
|ب| = (٤×١) - (٢×٣) = ٤-٦ = ٢- عين منفردة "لها نظير ضربي"
|ج| = (١×٢-) - (١×٢) = ٢-٢- = ٤- عين منفردة "لها نظير ضربي"
|د| = (٤-×٢) - (٨-×١) = ٨-٨- = ٨+٨- = ٠ ∴ مفردة ليس لها نظير ضربي.

---

2023 دورثاني/ إذا كانت س = [ج ١ ; ٢ ١] ، س^-١ = [٢ ١- ; ١- ١] ، ما قيمة الثابت ج

أ/ ١ ب/ ٢ ج/ ١- د/ ٢ s/ ٢

الحل/ م = س × س^-١ ∴ [أ ب ; ج د] = [ج+(١×١) ١-ج+١ ; (١×٢)+(٢×١) (١-×١)+(١×١)]

أ = ١ ∴ ج = ١

ب = ١ ∴ ١-ج+١ = ب ∴ ب = ٢

ج = ٢ ∴ ج+١ = ٢ ∴ ج = ١

د = ٢ ∴ (١-×١)+(١×١) = د ∴ د = ٢

[أ ب ; ج د] = [١ ٢ ; ١ ٢]

أ. مي حواري

---

2023 دورثاني/ ما قيمة س التي تجعل المصفوفة [٤ ٨ ; ١-س ٢] مفردة

أ/ ٣- ب/ ٥ ج/ ٣ د/ صفر

الحل/ المصفوفة مفردة ∴ محددها = ٠ ∴ ٤(س-١) - ٢×٨ = ٠

∴ ٤(س-١) = ١٦ ∴ س-١ = ٤ ∴ س = ٥

---

2024 دورأول/ اذا كان أ، ب، ج مصفوفات غير مفردة و ج = أ.ب ما العبارة الصحيحة:

أ/ ج^-١ = ب.أ ب/ د.ب^-١ = أ ج/ د.أ^-١ = ب s/ ج^-١.ب^-١ = أ

الحل/ ج = أ.ب لإيجاد ب نتخلص من أ وذلك بضرب المعادلة بـ أ^-١ من اليسار

∴ أ^-١.ج = أ^-١.أ.ب ∴ ب = أ^-١.ج

---

2024 دورثاني/ إذا كانت أ = [٣ ٤ ; ١ ٢] ، ما قيمة |أ^-١|

أ/ ١ ب/ ٢ ج/ م د/ ٣- s/ ٣-

الحل/ إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة ن فإن |أ||ب| = |أ×ب|

∴ |أ||أ^-١| = ١

|أ^-١| = ١ / |أ| = ١ / (٣×٢)-(٤×١) = ١ / ٢ = ١

---

2024 دورثالث/ إذا كانت أ = [١ ٢ ; ٣ ٥] فإن أ^-١ =

أ/ [٥- ٣ ; ٢ ١-] ب/ [١- ٣ ; ٢ ٥-] ج/ [١ ٠.٥ ; ٢ ٤] s/ [١ ٣ ; ٢ ٥]

الحل/ |أ| = (١×٥) - (٣×٢) = ٥-٦ = ١

$$\bar{P}^{1} = \frac{1}{\quad} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

---

2025 دورة خاص/ اذا كان P و Q مصفوفتان مربعتين من الرتبة n و أي العبارات الآتية صحيحة دائماً

أ/ $|P \cdot Q| = |Q \cdot P|$ ب/ $P - Q = Q - P$ ج/ $\bar{P}^{1}$ موجودة د/ $3P - 2Q$ معرفة

الحل/ أ/ $|P \cdot Q| = |Q \cdot P|$ (X) ضرب المصفوفات غير تبديلي

ب/ $P - Q = Q - P$ (X) طرح المصفوفات غير تبديلي.

ج/ $\bar{P}^{1}$ موجودة (X) $|P| = 0$ ⟵ "P منفردة لسيا لها نظير ضربي"

"P غير منفردة لها نظير ضربي" ⟵ $|P| \neq 0$

د/ $3P - 2Q$ معرفة (✓) لأنهم من نفس الرتبة.

---

القسم الثاني/ أجب عن الأسئلة الآتية:

2019 دورة ثاني/ جد المصفوفة س التي تحقق المعادلة $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3P = S \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

الحل/ $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = S \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ⟵

$P \cdot S = P^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ⟵ $P^{-1}$

$S = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ⟵

$S = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (4 \times 4) + (-1 \times 0) & (4 \times -1) + (-1 \times -1) \\ (-2 \times 4) + (1 \times 0) & (-2 \times -1) + (1 \times -1) \end{bmatrix}$ ⟵

$S = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$ ⟵

$S = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{4} \\ -2 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ⟵

أ.مي

$|P| = (1 \times 4) - (2 \times 0) = 4 - 0 = 4$

$\bar{P}^{1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

---

2019 دورة ثالث/ اذا كان $\bar{B}^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ وكان $U \times P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و جد المصفوفة P

الحل/ $W = U \times P$ ⟵ $W \times \bar{B}^{1} = U \times P \times \bar{B}^{1}$ ⟵ $W \times \bar{B}^{1} = P$

$$P = \overline{C}^{1} \times M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \div \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times1)+(2\times3) & (1\times\div)+(2\times3) \\ (-4\times1)+(3\times3) & (-4\times\div)+(3\times3) \end{bmatrix}$$

$$\leftarrow P = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -11 & -5 \end{bmatrix}$$

---

• دورثاني 2020 / اذا كانت $\overline{P}^{1}$ أصبح $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد $\begin{bmatrix} -2 & \div \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \times P$

الحل $|\overline{P}^{1}| = (3\times1) - (-1\times-2) = 3-2 = 1$

$$(\overline{P}^{1})^{-1} = P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -12 & -5 \end{bmatrix} = P \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \div & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}$$

---

• دورأول 2021 / لتكن $P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $P4 = B$ أوجد $\overline{B}^{1}.P$

الحل $B = P4 \leftarrow B = \frac{1}{4}P \leftarrow \overline{C}.B = \overline{C}.\frac{1}{4}P \leftarrow \overline{B}^{1}.P = \frac{1}{4}M$

$$\leftarrow \overline{B}^{1}.P = \begin{bmatrix} 1 & \div \\ \div & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \div \\ \div & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

---

• دورأول 2021 / حل المعادلة المصفوفية التالية $M = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times W2$

الحل $M = PW \leftarrow M = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \times W$

$$\leftarrow \overline{P}.M = \overline{P}.P.W \leftarrow \overline{P}.M = W$$

$$|P| = (10\times-2) - (6\times-4) = -20+24 = 4$$

$$W = \overline{P}^{1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -10 \end{bmatrix} \leftarrow W = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

• 2021 دورثاني / حل المعادلة المصفوفية التالية :

$$\text{س}_{3\times2}\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&4\\3&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7&0\\4&-1\end{bmatrix}$$

الحل

$$\underset{P}{\begin{bmatrix}4&2\\10&6\end{bmatrix}}\times\text{س}=\underset{ج}{\begin{bmatrix}\text{ب}&1\\1&\text{أ}\end{bmatrix}}$$

$$\text{س}=ج\,P^{-1}\leftarrow \text{س}\,P=ج$$

$$\text{س}=\frac{1}{P}\,ج\leftarrow$$

$$|P|=(4\times6)-(2\times10)=24-20=4$$

$$\text{س}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}6&-2\\-10&4\end{bmatrix}\leftarrow \text{س}=P^{-1}ج$$

$$\text{س}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}&1\end{bmatrix}$$

---

• 2021 دورثاني / اذا كانت P ، ب مصفوفتين حيث $(ب P)^{-1}=\begin{bmatrix}2&3\\2&-1\end{bmatrix}$ و $\text{ب}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\end{bmatrix}$

أ/ ب P ب/ المصفوفة ج حيث $ج=\text{ب}^{-1}(\text{ب}-P^{-1})$ .

الحل أ/ $|(ب P)^{-1}|=(2\times2)-(3\times-1)=4+3=7$

$$(ب P)^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&-3\\1&2\end{bmatrix}\leftarrow ب P=\begin{bmatrix}\frac{2}{7}&\frac{3}{7}\\-\frac{1}{7}&\frac{2}{7}\end{bmatrix}=ب P$$

ب/ $ج=\text{ب}^{-1}(\text{ب}-P^{-1})\leftarrow \text{ب}^{-1}ج=\text{ب}-P^{-1}\leftarrow \text{ب}^{-1}ج-\text{ب}=-P^{-1}\leftarrow -(ب P)^{-1}ج-\text{ب}=-P^{-1}$

$$ج=-(ب P)^{-1}(\text{ب}+P^{-1})=-\begin{bmatrix}2&3\\2&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-3\\-3&1\end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

ملاحظة / $(ب P)^{-1}=P^{-1}\text{ب}^{-1}$

---

• 2021 دورثالث / إذا كان $P=\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}$ و $\text{ب}=\begin{bmatrix}\text{س}&4\\-1&0\end{bmatrix}$

أ/ جد قيمة س التي تجعل $|2P+\text{ب}|=|م_{21}|$ حيث م المصفوفة المحايدة الضربية .

ب/ جد المصفوفة م بحيث $م=P^{-1}P$

الحل أ/ $2P+\text{ب}=2\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{س}&4\\-1&0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\text{س}&4\\0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&4\\-2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{س}&4\\0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\6&-1\end{bmatrix}2$$

$$2P+\text{ب}=\begin{bmatrix}\text{س}+2&8\\11&-3\end{bmatrix}\leftarrow |2P+\text{ب}|=|م_{21}|=(-3\times(\text{س}+2))-(11\times8)$$

$$\leftarrow 11+3\text{س}+6=1\leftarrow 11+3(\text{س}+2)=1\leftarrow 4+3\text{س}+9=1\leftarrow \frac{3\text{س}}{3}-\frac{9}{3}\leftarrow 1=\text{س}+3$$

$$\text{س}=-3\leftarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times w = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1^{-1} \cdot P = \vec{v}_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftarrow P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftarrow \vec{v}_1 \cdot P = w$$

$$|\mu| = (2 \times 2) - (1 \times 1) = 3$$

$$\vec{v}_1^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

• في الشكل المجاور $\Delta ABC$ فيه $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $BC = 12$ سم ، $AD = 8$ سم. جد $\sin B$ ، $\cos B$ ، $\tan B$.

$$AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ سم}$$

$$\sin B = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\tan B = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

• جد قيمة $x$ في كل من الشكلين الآتيين:

$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ}$$

$$x = \frac{8 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ}$$

$$x = \frac{6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{6}$$

• في الشكل المجاور $\Delta ABC$ فيه $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $BC = 12$ سم ، $AD = 8$ سم. جد $\sin B$ ، $\cos B$ ، $\tan B$.

$$AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ سم}$$

$$\sin B = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\tan B = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

• جد قيمة $x$ في كل من الشكلين الآتيين:

$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ}$$

$$x = \frac{8 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ}$$

$$x = \frac{6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{6}$$

• في الشكل المجاور $\Delta ABC$ فيه $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $BC = 12$ سم ، $AD = 8$ سم. جد $\sin B$ ، $\cos B$ ، $\tan B$.

$$AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ سم}$$

$$\sin B = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\tan B = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

• جد قيمة $x$ في كل من الشكلين الآتيين:

$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ}$$

$$x = \frac{8 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ}$$

$$x = \frac{6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{6}$$

$$\text{س} = \text{ص}^{-1}\text{ب} \cdot \text{ص} = \frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2- & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 2- & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{س} = \frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} (4\times2-)+(4\times1) & (2-\times2-)+(4\times1) \\ (2-\times2-)+(4\times5) & (2-\times1)+(4\times5) \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{س} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 24- & 28 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{7}{4}- \\ 6 & \frac{1}{2}- \end{bmatrix}$$

---

• 2023 دور أول / إذا كانت $\text{ص} = \begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 1 & \text{ب} \end{bmatrix}$ و $\text{ص}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1- \\ 3 & 1- \end{bmatrix}$ و $\text{ص}\,\text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 1- \\ \text{ب} & 3 \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

أ/ $\text{ص}^{-1} + \text{ب}$ ب/ $\text{ص} - 2\text{ب}$

الحل/ $|\text{ص}| = (3\times1-) - (4\times1-) = 3- - 2- = 1-$

$$\text{ص}^{-1} = 1- \begin{bmatrix} 1 & 3- \\ 1- & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1- & 3 \\ 1- & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{ص}^{-1} + \text{ب} = \begin{bmatrix} 1- & 3 \\ 1- & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{ص}^{-1} + \text{ب} = \begin{bmatrix} 4- & 4 \\ 2- & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{ص} - 2\text{ب} = \begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4- \\ 2- & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{ص} - 2\text{ب} = \begin{bmatrix} 1+ & 2- \\ 3- & 3 \end{bmatrix} \Leftarrow |\text{ص} - 2\text{ب}| = (2-\times3-) - (1\times1+) = 5$$

---

• 2023 دور أول / ضد المصفوفة ص حيث $\text{ص} = \text{س}(\text{س}^{-1} + \text{ص})$ و $\text{ص}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1- \\ 3- & 4 \end{bmatrix}$ و $|\text{ص}| = 2$

الحل/ $\text{ص} = \text{س}(\text{س}^{-1} + \text{ص}) \Leftarrow \text{ص}^{-1} = \text{س}^{-1}\text{س} + \text{ص}\,\text{س} \Leftarrow \text{ص}^{-1} = \text{ص} + \text{ص}\,\text{س}$

$$\text{ص}^{-1} - \text{ص} = \text{ص}\,\text{س} \Leftarrow |\text{ص}^{-1}|\cdot|\text{ص}| = |\text{ص}|\cdot|\text{س}| \Leftarrow |\text{س}| = \frac{|\text{ص}^{-1}|}{|\text{ص}|}$$

$$|\text{س}| = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1- \\ 3- & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{(4\times1) - (3-\times1-)}{2} = \frac{7}{2}$$

---

• 2023 دور أول / ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\text{ص} = \begin{bmatrix} \text{س}-1 & 2 \\ \text{س} & 3\text{س} \end{bmatrix}$ منفردة

الحل/ $|\text{ص}| = 0 \Leftarrow |\text{ص}| = \text{س}(\text{س}-1) - 2(\text{س}\times3)$

$$\Leftarrow 0 = \text{س}^2 - \text{س} - 6\text{س} \Leftarrow 0 = \text{س}^2 - 5\text{س} \Leftarrow 0 = \text{س}(\text{س}-5) \Leftarrow \text{س} = 0 \text{ أو } \text{س} = 5$$

إما $\text{س} = 0$ أو $\text{س} - 5 = 0 \Leftarrow \text{س} = 5$ $\Leftarrow$ $\text{س} = \{0, 5\}$

• 2023 دورثاني/ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix}$ فجد $P^{-١}ب$

$P^{-١} = \frac{١}{|P|} \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix}$

$|P| = (-٣ \times ٣) - (٤ \times ٠) = -٩$

$P^{-١} = -\frac{١}{٩} \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} -\frac{١}{٣} & ٠ \\ \frac{٤}{٩} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix} = P^{-١}$

$P^{-١}ب = \begin{bmatrix} -\frac{١}{٣} & ٠ \\ \frac{٤}{٩} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{١}{٣} \times -١) + (٠ \times ٣) \\ (\frac{٤}{٩} \times -١) + (\frac{١}{٣} \times ٣) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} \\ \frac{٥}{٩} \end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ $س = \begin{bmatrix} ١ \\ ٥ \end{bmatrix}$

---

• 2023 دورثالث/ اذاكانت المصفوفة $P = \begin{bmatrix} س & ٣س \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، $|P| = ٠$ فجد قيمة س التي تجعل المصفوفة P منفردة

الحل/ $|P| = (س \times س) - (٣س \times ٢) = ٠ \Leftarrow س^{٢} - ٦س = ٠ \Leftarrow س(س - ٦) = ٠$

إما $س = ٠$ مرفوض أو $س - ٦ = ٠ \Leftarrow س = ٦$

$\therefore س = \{٦\}$

---

• 2024 دورثاني/ إذا كان $P^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ حل المعادلة المصفوفية التالية: $P^{٢}س + ٣س = ب + س$

الحل/ $P^{٢}س + ٣س = ب + س \Leftarrow P^{٢}س - ب = ٣س - س \Leftarrow$ نأخذ $P^{-١}$ للطرفين

$P^{-١}P^{٢}س - P^{-١}ب = ٢س$

$س = \frac{١}{٢}(P^{-١}P^{٢}س - P^{-١}ب)$

$س = \frac{١}{٢} \left( \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix} \right)$

$س = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{١}{٢} \\ -\frac{٥}{٢} \end{bmatrix}$

$\Leftarrow س = \begin{bmatrix} -\frac{١}{٢} \\ -\frac{٥}{٢} \end{bmatrix}$

---

"لو كنت وحدك لهانت .. لكنها أمّة يا فتى ! "

2024. دورثاني / إذا كانت $P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & \div\end{bmatrix}$ ، $\bar{P}^{1}.ب=\begin{bmatrix}6 & 4\\ -2 & \div\end{bmatrix}$ جد ما أمكن ب

الحل / $\bar{P}^{1}.ب=\begin{bmatrix}6 & 4\\ -2 & \div\end{bmatrix}$ $\Leftarrow$ $ب=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & \div\end{bmatrix}$

$|P|=(1\times 0)-(\div\times -1)=1$

$\bar{P}^{1}=\begin{bmatrix}-0 & -1\\ 1 & \div\end{bmatrix}$ $\Leftarrow$ $\bar{P}^{1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & \div\end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ المطلوب / $\bar{P}^{1}.ب=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & \div\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & \div\end{bmatrix}$

$\bar{P}^{1}.ب=\begin{bmatrix}(0\times 3)+(1\times -1) & (0\times 2)+(1\times \div)\\ (-1\times 3)+(\div\times -1) & (-1\times 2)+(\div\times \div)\end{bmatrix}$

$\bar{P}^{1}.ب=\begin{bmatrix}-3 & \div\\ -1 & \div\end{bmatrix}$

أ.مي حواري

---

2024. دورثالث / إذا كانت $P=\begin{bmatrix}س & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ ، $\bar{P}^{1}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ س & -0\end{bmatrix}$ جد قيمة س

علماً بأن $م=\bar{P}^{1}.P$

الحل / $م=\bar{P}^{1}\times P$

$=\begin{bmatrix}(3\times س)+(1\times -0) & (3\times 1)+(1\times 0)\\ (س\times س)+(1\times -3) & (س\times 1)+(1\times 0)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3س-0 & 3+0\\ س^{2}-3 & س+0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\div & 1\\ 1 & \div\end{bmatrix}$

$3س-0=1 \Leftarrow 3س=1+0 \Leftarrow 3س=6 \Leftarrow س=2$ / $س^{2}-3=1 \Leftarrow س^{2}=4 \Leftarrow س=\pm 2$

$س=\{2\}$

---

2025. دورأول / إذا كان $P=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ ، $ب=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ جد:

أ/ ا ب $-2P$ ب/ المصفوفة س التي تحقق المعادلة $2(س+ب)=\bar{P}^{1}$

الحل أ/ $ا ب-2P=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 2 & 6\end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ $ب-2P=\begin{bmatrix}-1 & 8\\ -3 & -4\end{bmatrix}$

$|ب-2P|=(8\times -3)-(-4\times -1)=-24-4=-28$

ب/ $2(س+ب)=\bar{P}^{1}$ $\Leftarrow$ $2س+2ب=\bar{P}^{-1}$ $\Leftarrow$ $2س=\bar{P}^{-1}-2ب$ $\Leftarrow$ $س=\frac{1}{2}(\bar{P}^{-1}-2ب)$

$$\left(\begin{bmatrix}-٦ & ٨\\ -٢ & ٤\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}١ & ١\\ -٢ & -٣\end{bmatrix}\right)\frac{١}{٢}=(٢P-P')\frac{١}{٢}=ω$$

$$\begin{bmatrix}\frac{٧}{٤} & \frac{-٧}{٤}\\ ؟ & \frac{-٧}{٤}\end{bmatrix}=ω \Leftarrow \quad \begin{bmatrix}٧ & -٧\\ ش & -٧\end{bmatrix}\frac{١}{٢}=ω \Leftarrow$$

ملاحظة / $|P|=(١\times٣)-(-٢\times١)=٣-(-٢)=١$

$$P^{-١}=\begin{bmatrix}١ & ١\\ -٣ & -٢\end{bmatrix}$$

$$٢P=\begin{bmatrix}٤ & ٤\\ -١ & -٢\end{bmatrix}\quad *$$

$$\begin{bmatrix}٨ & -٦\\ -٤ & ٤\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٤ & -٣\\ -٢ & ١\end{bmatrix}$$

---

2025 دورتان / إذا كانت $P=\begin{bmatrix}-١ & ٢\\ ١ & ٣\\ ٥ & ؟\end{bmatrix}$ و $ن=\begin{bmatrix}-٢ & ٤\\ ؟ & -١\end{bmatrix}$

١/ جد $P^{-١}$

٢/ جد $(P.ن)^{-١}$ إن أمكن.

الحل/ ١/ $|ن|=(٤\times؟)-(-١\times-٢)=؟-٢=-٢$

$$P^{-١}=-\frac{١}{٢}\begin{bmatrix}؟ & ٤\\ ١ & ٢\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{١}{٢} & ؟\\ -٢ & ١\end{bmatrix}$$

٢/ $(P.ن)^{-١}=ن^{-١}.P^{-١}$

$$\begin{bmatrix}(؟\times٤)+(٥\times-١) & (-١\times-١)+(٤\times٢)\\ (؟\times٣)+(١\times-١) & (-١\times-٢)+(٣\times٢)\\ (؟\times٥)+(٤\times-١) & (-١\times-٢)+(٣\times٤)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٤ & -٢\\ ؟ & -١\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-١ & ٢\\ ١ & ٣\\ ٥ & ؟\end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad ن.P=\begin{bmatrix}-٤ & ٩\\ -٦ & ١١\\ ؟ & -٥\end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

---

2024 قباطية / إذا كان $ن=\begin{bmatrix}-٢ & ٤\\ ١ & ٢\end{bmatrix}$ جد المصفوفة P $\begin{bmatrix}١ & س\\ ٢ & ٤\end{bmatrix}=P.ن$

الحل/ $P=ن.ن^{-١}\times(ن.ن^{-١}=P)\times\frac{١}{٤}$

$$\Leftarrow \quad P=(ن.ن^{-١}\times س)\times\frac{١}{٤} \Leftarrow P=\begin{bmatrix}-٢ & ٤\\ ١ & ٢\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}١ & س\\ ٢ & ٤\end{bmatrix}\times\frac{١}{٤}$$

$$P = \begin{bmatrix} (3\times1)+(-2\times3) & (1\times4)+(-2\times3) \\ (3\times1)+(2\times3) & (1\times4)+(2\times3) \end{bmatrix} \times \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

---

• 2024 جنوب الخليل/ إذا كان $س ع^{-1} = ص$ وكان $ص^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $ع = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ جد $س^{-1}$

الحل/ $س ع^{-1} = ص$ نأخذ النظير للطرفين

$(س ع^{-1})^{-1} = ص^{-1}$ ← $ص^{-1} = (ع^{-1})^{-1} \times س^{-1}$ ← $ص^{-1} = س^{-1} . ع$

$ع^{-1} . ع . س^{-1} = ع^{-1} . ص^{-1}$ ← $س^{-1} = ع^{-1} . ص^{-1}$

$(أ ب)^{-1} = ب^{-1} . أ^{-1}$

أ.مي حواري

* $|ع| = (1\times3) - (-1\times2) = 3$

$ع^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$س^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ← $س^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (3\times5)+(2\times3) & (3\times2)+(2\times3) \\ (1\times5)+(1\times3) & (1\times2)+(1\times3) \end{bmatrix}$

$س^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ ← $س = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

---

• 2024 بيت لحم/ إذا كان $ن = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ ، $ن^{-1} \times ق = \begin{bmatrix} س & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ جد $ص^{-1}$

الحل/ $(ن^{-1} \times ق = س)^{-1}$ ← $ق^{-1} \times (ن^{-1})^{-1} = س^{-1}$ ← $ق^{-1} \times ن \times ن^{-1} = س^{-1} \times ن^{-1}$

$ق^{-1} = س^{-1} \times ن^{-1}$

* $|س| = (2\times4) - (-1\times1) = 9 - 1 = 1$

$س^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

* $2ب = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ ← $ب = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ← $|ب| = (-1\times3) - (4\times2) = -3 - 8 = -11$

$ب^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

* المطلوب/ $ق^{-1} = س^{-1} \times ن^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$(أ ب)^{-1} = ب^{-1} . أ^{-1}$

$$\bar{P}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} (4\times3)+(-3\times1) & (3\times3)+(-3\times1) \\ (1\times4)+(2\times1) & (1\times3)+(2\times1) \end{bmatrix} \leftarrow \bar{P}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

$$\bar{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

---

• القدس الشريف 2025 / اذا كان $(\bar{P}\cdot U)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ أجد المصفوفة P؟

الحل $(\bar{P}\cdot U)^{-1} = S \Leftarrow U^{-1}\times(\bar{P})^{-1} = S \Leftarrow U^{-1}\times P = S$

$\Leftarrow U\cdot U^{-1}\times P = U\times S \Leftarrow P = U\times S$

$$\Leftarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times1)+(3\times-2) & (1\times-1)+(3\times1) \\ (5\times1)+(4\times-2) & (5\times-1)+(4\times1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow P = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

---

• قباطية 2025 / حل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} س + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = ص$

الحل $P = P + سP = ص$ اخراج P كعامل مشترك من اليمين

$P(س + ص) = ص \Leftarrow P^{-1}\cdot P(س + ص) = P^{-1}\cdot ص \Leftarrow س + ص = P^{-1}$

$\Leftarrow س = P^{-1} - ص$

$|P| = (3\times2)-(-2\times4) = 14$

$$P^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow س = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Leftarrow س = \begin{bmatrix} -\frac{20}{7} & \frac{15}{7} \\ -\frac{16}{7} & -\frac{53}{14} \end{bmatrix}$$

---

• خارجي / إذا كانت المصفوفة $ع^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ و $3س - ص = ع$ و $و = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

جد المصفوفة $س - ص$.

الحل/ $س ع - ص ع = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$ ← $و_٢$

اخراج ع عامل مشترك من اليسار

$ع(س - ص) = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$ ← $(س - ص) = ع \times \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix} \times ع^{-١}$

$س - ص = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٦ \times ٢) + (-٣ \times ٤) & (٦ \times -٣) + (-٣ \times ٥) \\ (٦ \times ٢) + (٦ \times -٤) & (٦ \times -٣) + (٦ \times ٥) \end{bmatrix}$

$س - ص = \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ -١٢ & ١٨ \end{bmatrix}$ ←

---

• خارجي/ ليكن $ت^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ حيث المصفوفة ص صيغة

$ص س - ٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \times |-م_{١ ج}| = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

الحل/ $|-م_{١ ج}| = (-١)^{ج} |م_{١ ج}| = ١ \times ١ = ١$

$ص س = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ← $ص س = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ←

$س^{-١} = ص \times س \times ت^{-١}$ ← $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = ص س$ ←

$\begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = ص$ ←

$\begin{bmatrix} (٢ \times ١) + (-٥ \times ٣) & (٢ \times ١) + (-٥ \times ١) \\ (-٥ \times ٣) + (٤ \times ١) & (-٥ \times ١) + (٤ \times ١) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = ص$ ←

$ص = \begin{bmatrix} ١٣ & -٧ \\ ١ & ١٩ \end{bmatrix}$ ←

---

• خارجي تقصد/ إذا كان $(س \times ص)^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ و $س ع = \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$

ما قيمة $|س (ع - ص)|$

الحل $(س \times ص)^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ← $س ص = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

$|١ - ٩ = ٨ - (٣ \times ٣) - (-٤ \times -٢)| = ١٢١$

$ف^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix}$

$ف = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

$$\text{س ع} - \text{س ص} = \begin{bmatrix} ث & -٣ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & -٦ \\ -٦ & -٦ \end{bmatrix}$$

المطلوب / $|\text{س}(\text{ع} - \text{ص})| = |\text{س ع} - \text{س ص}| = (-٢ \times ٦) - (-٦ \times ٢)$

$= ١٢ - ٣٦ = -٢٤$

---

• خارج تفوقر / حد المصفوفة س صح :

$$\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \times \text{س} - \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \times \text{س}$$

الحل / (بإخراج س كعامل مشترك من اليمين)

$$\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} ٤ & -٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \right) \times \text{س}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}}_{\text{ب}} = \underbrace{\begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}}_{\text{م}} \times \text{س}$$

$\text{ب} = \text{م} \times \text{س} \Leftarrow \text{م}^{-١} \times \text{ب} = \text{م}^{-١} \times \text{م} \times \text{س} \Leftarrow \text{م}^{-١} \times \text{ب} = \text{س}$

$|\text{م}| = (٥ \times ١) - (-١ \times -٦) = ٥ - ٦ = -١$

$\text{م}^{-١} = -١ \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & -٦ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix}$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} -١ & -٦ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-١ \times -٣) + (-٦ \times ٤) & (-١ \times ٢) + (-٦ \times -٢) \\ (-١ \times -٣) + (-٥ \times ٤) & (-١ \times ٢) + (-٥ \times -٢) \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} ٢١ & -١٤ \\ ٢٣ & -٨ \end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

---

• خارج تفوقر / اذا كانت $\text{م}^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ و $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٧ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ حل المعادلة المصفوفية

$\text{م}^{-١} (\text{م}^{٢} + ٣\text{س}) = \text{ب}$

الحل /

$|\text{ب}| = (٧ \times ١) - (-٣ \times -٢) = ٧ - ٦ = ١$

$\text{م}^{-١} \cdot \text{م}^{٢} + ٣\text{م}^{-١} \cdot \text{س} = ١٩\text{ب} \Leftarrow \text{م}^{-١} (\text{م}^{٢} + ٣\text{س}) = ١٩\text{ب}$

$\text{م}^{-١} + ٣\text{س} = ١٩\text{ب}$

$\text{س} = \frac{١}{٣} \text{م}^{-١} - \frac{١}{٣} \times ١٩\text{ب}$

$$\text{س} = \frac{١}{٣} \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} - \frac{١٩}{٣} \begin{bmatrix} ٧ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} -٣٨ & ٤٣ \\ -٥٧ & ١٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣٧ & ١٣١ \\ -٥٣ & ٢٠ \end{bmatrix} = \text{س}$$

# الدرس السادس | حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات

## • القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة

• 2019 دور ثالث / كم حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين وهما أن :
ص = ٣ ، ١ ص + ١ = ٣ ، ١ ص + ١ = -٦ ما قيمة س ؟

د/ ٣ | ج/ $\frac{٣-}{٢}$ | ب/ $\frac{٢-}{٣}$ | ٣-/أ

الحل/ $ص = \frac{|ص ١|}{|١|} \Leftarrow ٣ = \frac{٦-}{|١|} \Leftarrow ٦- = |١|٣ \Leftarrow |١| = ٣-$

$س = \frac{|س ك|}{|١|} = \frac{٣}{٢-} = \frac{٣-}{٢}$

---

• 2020 دور ثاني / كم حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين وجد أن :
ص = ١ ، ١ + س ١ = ١٥ ، ١ ص + ١ = -٥ ما قيمة س

د/ ٥ | ج/ ٣/٥ | ب/ ٥-/٥ | ٣-/أ

الحل/ $ص = \frac{|ص ١|}{|١|} \Leftarrow ١ = \frac{٥-}{|١|} \Leftarrow ٥- = |١|$

$س = \frac{|س ١٥|}{|١|} = \frac{١٥}{٥-} = ٣-$

أ.مي حواري

---

• 2020 دور ثالث / إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة المعاملات ، $ب = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٨ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة الثوابت ، ما المعادلتين الخطيتين الممثلتين للنظام .

د/ $٨ = ٥ص - ٣س$ ، $٧ = ص - س$ | ج/ $٨ = س - ٥ص$ ، $٧ = ص + ٢س$

ب/ $٨ = ٥ص - ٣س$ ، $٧ = ص - س$ | أ/ $٨ = س - ٥ص$ ، $٧ = ص + ٢س$

الحل/ مصفوفة المعاملات × المتغيرات = الثوابت

$$\begin{bmatrix} ٧ \\ ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٧ \\ ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ص ٢ \times ١) + (س ١ \times ١) \\ (ص ٥ + (س ١ \times ١-) \end{bmatrix}$$

$٧ = ص ٢ + س$ ، $٨ = ص ٥ + س-$

---

• 2021 دور ثاني / كم حل نظام من المعادلتين الخطيتين (بواسطة قاعدة كرمر) $٢ص + ٣س = ١$ ، $٤ص + ٦س = ٣$ وجد أن $|أ| = ٥$ ما هي المصفوفة أ س

د/ $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ | ج/ $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ | ب/ $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ | أ/ $\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل/ $\begin{matrix} أ س + ٢ ص = ١ \\ ب س + ص = ٣ \end{matrix}$ ← $م = \begin{bmatrix} أ & ٢ \\ ب & ١ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \end{bmatrix}$

$س م = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

---

• 2022 دورة ثاني/ عند حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كريمر وجد أن $د = ١٢ أ + ٣ب$ ، $د س = ١٢ + ٣ب$ ، ما قيمة المتغير س:

٣/ أ ٢/ ب ١/ ج ٠/ د

الحل/ $د = ١٢ أ + ٣ب$ نقسم المعادلة على ١٢

$\frac{د}{١٢} = أ + \frac{٣ب}{١٢}$ ← $س = ١ + ب$ ← $ب = س - ١$ ← $س = -٢$

---

• 2024 جنوب نابلس/ عند حل نظام من معادلتين خطيتين بطريقة كريمر وجد أن $د = ٣ س + ص$ ، $د س = ٣ س + ص$ على الترتيب هي ٤، ٥-، ٢٠- ما قيمة ٣س

١٤/ أ ٥-/ ب ١٦/ ج ١/ د

الحل/ $س = ٤$ ، $ص = -٥$ ، $د س = -٢٠$

$س = \frac{د س}{د}$ ← $٣ = \frac{-٢٠}{د}$ ← $د = \frac{-٢٠}{٣} = \frac{-٥}{-٥}$ ← $د = ٤$

$٣س = \frac{٣د س}{د}$ ← $٣س = ٣ \times ٤$ ← $٣س = ١٢$

---

• خارجي/ إذا كانت $أ$ مصفوفة مربعة من الدرجة الثانية وكان $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}$ ما قيمة $|٣أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٤ & ٩ \end{vmatrix}$ ، $|٣ د س| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٩ & ١ \end{vmatrix}$

حل د س ، ص على الترتيب.

٣/ س = ١٩ ص = ٢ ب/ س = -١٩ ص = ٢ ج/ س = ١٩ ص = -٢

د/ س - ٢ ص = ١

الحل/ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = (١ \times ١) - (٢ \times ٤) = ١ - ٨ = -٧$

$|٣أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٤ & ٩ \end{vmatrix} = (١ \times ٩) - (٤ \times ٤) = ٩ - ١٦ = -٧$

$|٣ د س| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٩ & ١ \end{vmatrix} = (٤ \times ١) - (٩ \times ٢) = ٤ - ١٨ = -١٤$

$س = \frac{|٣ د س|}{|٣أ|} = \frac{-١٤}{-٧} = ٢$ ، $ص = \frac{|٣ص|}{|٣أ|} = \frac{-٧}{-٧} = ١$ ← $(س ، ص) = (٢ ، ١)$

• خارجي/ هندسة نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين بطريقة كريمر، وجد أن
س = -٢ ، |-٣س| = ٣٦ ، |٢ص| = -٢٤ ما قيمة المتغير ص

ع/P ، ٢/ن ، -٣/ص ، ٣/s

الحل / |-٣س| = ٣٦ ⇐ |س|^ع(-٣) = ٣٦ ⇐ |س| = ٣٦/٩ = ٤

س = |س|/|P| ⇐ -٢ = ٤/|P| ⇐ |P| = ٤/-٢ = -٢

|٢ص| = ع/|P|^ع ⇐ |ص| = -٢٤/٤ = -٦

ص = |ص|/|P| = -٦/-٢ = ٣

---

• القسم الثاني / أجب عن الأسئلة التالية :

• 2019 دور أول / استخدم طريقة النظير الضربي في حل نظام المعادلات الآتي :

٢س + ص - ٤ = ٠ ، ٣س = ٢ص + ١

الحل / ٢س + ص - ٤ = ٠ ⇐ ٢س + ص = ٤ ⇐ ن = ٤ - ص + ٣س

٣س = ٢ص + ١ ⇐ ٣س - ٢ص = ١

أ.مي حواري

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}}_{P}$$

|P| = (١×٥) - (-٢×٢) = ٩

$$P^{-١} = \frac{١}{٩}\begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}\frac{١}{٩} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}\frac{١}{٩}\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$$

أ

$$\begin{bmatrix} -٦ \\ -١٧ \end{bmatrix}\frac{١}{٩} = \begin{bmatrix} (٤\times٥)+(١\times-٢) \\ (٤\times-٢)+(١\times١) \end{bmatrix}\frac{١}{٩} = \begin{bmatrix} ص \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص \\ ص \end{bmatrix}$$

حل النظام (س، ص) = (٢، ١)

---

• 2019 دور ثاني / استخدم قاعدة كريمر في حل نظام المعادلات الآتي :

س - ص = ٨ ، ٢ص - س = -١

الحل / س - ص = ٨ ⇐ س = ٨ + ص

٢ص - س = -١

$$P = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

|P| = (١×١) - (-٢×-١) = ١ - ٢ = -١

مصفوفة الثوابت له $\begin{bmatrix} ٨ \\ -١ \end{bmatrix}$

$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1- \\ 2- & 1- \end{vmatrix} = (1-\times1-) - (2-\times1) = 1-2- = 3-$

$|P_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1- & 1 \end{vmatrix} = (1\times1) - (1-\times1) = 1+1 = 2$

$x = \frac{|P_1|}{|P|} = \frac{2}{3-} = 2-$ ، $y = \frac{|P_2|}{|P|} = \frac{3-}{3-} = 1$

حل النظام / $(x, y) = (2-, 1)$

---

• 2019 دور ثالث / استخدم طريقة النظير الضربي في حل نظام المعادلات الآتي :

$x + 3y = 1$ ، $2x - y = 3$

الحل / $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1- & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$P$

$|P| = (1-\times3) - (2\times1) = 3-2 = 1$

$P^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & 3- \\ 1 & 1- \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1- & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 1 & 1- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (1\times3) + (3\times1) & (1-\times3) + (2\times1-) \\ (1\times1) + (3\times1-) & (1-\times1) + (2\times1-) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 1 & 1- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 5- \\ 2- & 3- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 6- \end{bmatrix}$

$x = 13$ ، $y = 6-$

$(x, y) = (13, 6-)$

أ.مي حواري

---

• 2020 دور أول / استخدم قاعدة كريمر في حل نظام المعادلات الآتي :

$3x + y = 3$ ، $x + 3y = 5$

الحل / $3x + y = 3 \Leftarrow 3x = 3 - y$

$x + 3y = 5 \Leftarrow x = 5 - 3y$

$|P| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3- \end{vmatrix} = (3\times3-) - (1\times1) = 9-1- = 10-$

$|P_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3- \end{vmatrix} = (3\times3-) - (5\times1) = 9-5- = 14-$

$|P_2| = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (5\times3) - (1\times3) = 15-3 = 12$

$x = \frac{|P_1|}{|P|} = \frac{14-}{10-} = \frac{7}{5}$ ، $y = \frac{|P_2|}{|P|} = \frac{12}{10-} = \frac{6}{5-}$

$(x, y) = (\frac{7}{5}, \frac{6}{5-})$

---

• 2020 دور أول / استخدم قاعدة كريمر في حل نظام المعادلات الآتي :

$2x = y + 3$ ، $x + 2y = 4$

الحل / $2x = y + 3 \Leftarrow 2x - y = 3$

$x + 2y = 4$

$|P| = \begin{vmatrix} 2 & 1- \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2\times2) - (1-\times1) = 4+1 = 5$

$|P_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1- \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (2\times3) - (1-\times4) = 6+4 = 10$

$|P_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (4\times2) - (1\times3) = 8-3 = 5$

$x = \frac{|P_1|}{|P|} = \frac{10}{5} = 2$ ، $y = \frac{|P_2|}{|P|} = \frac{5}{5} = 1$

$(x, y) = (2, 1)$

• 2020 دورثاني/ استخدم طريقة النظير الضربي في حل نظام المعادلات الآتي :

$٣س + ٤ص = ١$ ، $٣س^{٢} - ص^{٣} = ١٢$

الحل

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ١٢ \end{bmatrix}$$

P

أ.مي حواري

$$|P| = (٣-\times ٣) - (٤ \times ٢) = -٩ - ٨ = -١٧$$

$$P^{-١} = \frac{-١}{١٧} \begin{bmatrix} ٤- & ٣- \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} \frac{-١}{١٧} \begin{bmatrix} ٤- & ٣- \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ ١٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{-١}{١٧} \begin{bmatrix} (-٤ \times ٣) + (١ \times ٣-) \\ (-٣ \times ١) + (١٢ \times ٢-) \end{bmatrix} = \frac{-١}{١٧} \begin{bmatrix} ١٥- \\ ٤٣ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٣ \\ ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

⇐ حل النظام $(س، ص) = (٣، ٢-)$

---

• 2020 دورثاني/ في نظام من معادلتين خطيتين على الصورة $P_{س} + ب ص + ج_{س} = ٠$ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات ، $ب = \begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت اكتب المعادلتين الخطيتين المكونتين للنظام .

الحل

$$\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (١ \times س) + (١- \times ص) \\ (٣ \times س) + (٤ \times ص) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

⇐ $س - ص = ١$ ، $٣س + ٤ص = ٤$

---

• 2020 دورثالث/ استخدم قاعدة كرامر في حل نظام المعادلات الآتي :

$س + ص = ١$ ، $٣س + ٤ص + ١ = ٠$

الحل

$$س + ص = ١$$

$$٣س + ٤ص = -١$$

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = (١ \times ٣) - (٤ \times ١) = ٣ - ٤ = -١$$

$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (1\times4)-(1\times-1) = 4-1-=5$

$|D_س| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (1\times3)-(1\times-1) = 3-1- = 4-$

$س = \frac{|D_س|}{|D|} = \frac{4-}{1} = 4-$ ، $ص = \frac{|D_ص|}{|D|} = \frac{0}{1} = 0$

$\Leftarrow$ حل النظام $(س، ص) = (4-، 0)$

---

2022. دور أول/ استخدم قاعدة كريمر في ايجاد قيم المتغيرين س، ص التي تحقق المعادلة:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5+س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ ص \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س & 0 \\ ص & 1- \end{bmatrix}$$

الحل/

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5+س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\times س)+(5\times ص) \\ (ص\times1-)+ص2 \end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

$4 = 5ص + 3س2$ ——— (1)

$5+س = ص2-ص$ $\Leftarrow$ $ص = 3س+5$ $\Leftarrow$ $0 = ص+3س-$ ——— (2)

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1- \end{bmatrix}$$

$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1- & 1 \end{vmatrix} = (1\times2)-(1-\times0) = 2-0 = 7$

$|D_س| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4\times1)-(5\times0) = 4-0 = 4$

$|D_ص| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1- & 5 \end{vmatrix} = (2\times5)-(1-\times4) = 10+4 = 14$

$س = \frac{|D_س|}{|D|} = \frac{4}{7}$ ، $ص = \frac{|D_ص|}{|D|} = \frac{14}{7} = 2$

حل النظام $(س، ص) = (\frac{4}{7}، 2)$

---

2021 + 2022. دور ثاني/ استخدم كريمر في حل نظام المعادلات الآتي:

$3ص - س = 1$

$3س + ص2 = 8 + ت$

الحل/

$3ص - س = 1$ $\Leftarrow$ $1 = ص3 + س-$

$3س + ص2 = 8$ $\Leftarrow$ $8 = ص2 + س3$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$|P| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٨ \end{vmatrix} = (٨ \times ٢) - (١ \times ١) = ١٦ - ١ = -١٥$

$|P_{ص}| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٨ & +١ \end{vmatrix} = (٢ \times ١) - (٨ \times -١) = ٢ - ٨ - = -٦$

$|P_{س}| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = (٢ \times ٢) - (١ \times -١) = ٤ - ١ - = -٥$

$س = \frac{|P_{س}|}{|P|} = \frac{-٥}{-١٥} = ٣$ $\quad$ $ص = \frac{|P_{ص}|}{|P|} = \frac{-١٠}{-٥} = ٢$

$(س, ص) = (٣, ٢)$

---

• 2023 دور أول/ حل نظام المعادلات باستخدام قاعدة كريمر:

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ١ \end{bmatrix}$$

الحل/ $|P| = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = (٢ \times ٣) - (١ \times ٥) = ٦ - ٥ = ١$

أ.مي حواري

$|P_{س}| = \begin{vmatrix} ٩ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = (٩ \times ٣) - (١ \times ٥) = ٢٧ - ٥ = ٢٢$

$|P_{ص}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٩ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = (٢ \times ١) - (١ \times ٩) = ٢ - ٩ = -٧$

$س = \frac{|P_{س}|}{|P|} = \frac{٢٢}{١} = ٢٢$ ، $ص = \frac{|P_{ص}|}{|P|} = \frac{-٧}{١} = -٧$

⇐ حل النظام $(س, ص) = (٢٢, -٧)$

---

• 2023 دور ثاني/ جد المصفوفة ع باستخدام قاعدة كريمر $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} ع = \begin{bmatrix} ٠ \\ -١ \end{bmatrix}$

الحل/ $|P| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = (٢ \times ١) - (-١ \times ٣) = ٢ + ٣ = ٥$

$|P_{س}| = \begin{vmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = (٠ \times ١) - (-١ \times -١) = ٠ - ١ = -١$

$|P_{ص}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} = (٢ \times -١) - (٣ \times ٠) = -٢ - ٠ = -٢$

$س = \frac{|س|}{|أ|} = \frac{14}{7} = 2$ ، $ص = \frac{|ص|}{|أ|} = \frac{-7}{7} = -1$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

---

• 2024 دورتان / استخدم طريقة كريمر لحل النظام:

$$4ص - 3س = 10$$
$$ص + 3س = 7$$

الحل / $4ص + 3س = 10$
$ص + 3س = 7$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (4 \times 3) - (1 \times -3) = 12 + 3 = 15$$

$$|س| = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = (10 \times 3) - (7 \times -3) = 30 + 21 = 51$$

$$|ص| = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = (4 \times 7) - (1 \times 10) = 28 - 10 = 18$$

$س = \frac{|س|}{|أ|} = \frac{51}{15} = 3.4$ ، $ص = \frac{|ص|}{|أ|} = \frac{18}{15} = 1.2$

حل النظام $(س, ص) = (3.4, 1.2)$

أ.مي حواري

---

• 2024 دورتان / استخدم طريقة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي:

$$3س - 5ص = 7$$
$$3س + 2ص = 5$$

الحل /

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (3 \times 2) - (3 \times -5) = 6 + 15 = 21$$

$$|س| = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (7 \times 2) - (5 \times -5) = 14 + 25 = 39$$

$$|ص| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (3 \times 5) - (3 \times 7) = 15 - 21 = -6$$

$س = \frac{|س|}{|أ|} = \frac{39}{21} = \frac{13}{7}$ ، $ص = \frac{|ص|}{|أ|} = \frac{-6}{21} = \frac{-2}{7}$

$(س, ص) = (\frac{13}{7}, \frac{-2}{7})$ ⇐

• 2025 دورة ثاني / نحل نظام معادلتين خطيتين بواسطة كريمر وجد أن $م_س = \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ← الثوابت

$م_{ص} = \begin{bmatrix} ١ & م \\ ٣ & هـ \end{bmatrix}$ ← الثوابت

١/ قيمتي الثابتين م، هـ ٢/ قيمتي س، ص.

الحل ١/ $م = -١$ ، $هـ = ٢$

$|م| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = (٣\times٣) - (١\times١) = ٩ - ١ = ٨$

$|م_س| = \begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = (٣\times٣) - (-١\times١) = ٩ + ١ = ١٠$

$|م_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = (٣\times٢) - (١\times١) = ٦ - ١ = ٥$

$س = \frac{|م_س|}{|م|} = \frac{١٠}{٨} = \frac{٥}{٤}$ ، $ص = \frac{|م_{ص}|}{|م|} = \frac{٥}{٨}$

حل النظام $(س، ص) = (\frac{٥}{٤}، \frac{٥}{٨})$

أ.مي حواري

---

• خارجي / حل المعادلة المصفوفية التالية باستخدام النظير الضربي $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ ← م

الحل /

$|م| = (١\times٤) - (٣\times٢) = ٤ - ٦ = -٢$

$م^{-١} = -\frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}^{-١} \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ ← $م^{-١}$

$= -\frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

$= -\frac{١}{٢} \begin{bmatrix} (٤\times٣) + (-٢\times١) \\ (-٣\times٣) + (١\times١) \end{bmatrix}$

$= -\frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ١٠ \\ -٨ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٤ \end{bmatrix}$

$س = -٥$ ، $ص = ٤$

---

• خارجي / إذا كان $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ص & -١ \\ س & -٤ \end{vmatrix} = ٧$ جد قيمة كل من س، ص باستخدام طريقة النظير الضربي.

الحل / $(٢\times س) - (١\times ص) = (-١\times س) - (-٤\times ص) = ٧$

$٢س - ص = ٧$ ← (١)

$-س + ٤ص = ٧$ ← (٢)

$$\begin{bmatrix}٧\\٧\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٢&-١\\٤&-١\end{bmatrix}$$

P

أ.مي حواري

$$|P|=(٤\times٢)-(-١\times١)=٨-١=٧$$

$$P^{-١}=\frac{١}{٧}\begin{bmatrix}١&٤\\٢&١\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}٧\\٧\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١&٤\\٢&١\end{bmatrix}\frac{١}{٧}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٢&-١\\٤&-١\end{bmatrix}\frac{١}{٧}\begin{bmatrix}١&٤\\٢&١\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}٥\\٣\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(١\times١)+(٤\times١)\\(١\times٢)+(١\times١)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١\\١\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١&٤\\٢&١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}$$

$س=٥-٢ص=٣$ ←

---

• 2025 نابلس/ باستخدام قاعدة كريمر في إيجاد قيم المتغيرين س، ص التي تحقق المعادلة .

$$\begin{bmatrix}٤ص\\س+١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٢\\ص\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٣&س\\-١&ص\end{bmatrix}$$

الحل/

$$\begin{bmatrix}٤ص\\ص+١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(٢\times٣)+(س\times٢)\\(ص\times٢)+(-١\times ص)\end{bmatrix}$$

$٤ص=٣ص+٢س$ ← $٢س-ص=ن$ — ①

$ص+١=ن$ ← $س-ص=١$ — ②

$$\begin{bmatrix}ن\\١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١-&٢\\١&١-\end{bmatrix}$$

$$|P|=\begin{vmatrix}١-&٢\\١&١-\end{vmatrix}=(١\times١-)-(-١\times٢)=٢-١=١$$

$$|P_س|=\begin{vmatrix}ن&٢\\١&١-\end{vmatrix}=(١\times ن)-(-١\times١)=ن+١=١$$

$$|P_ص|=\begin{vmatrix}١-&ن\\١&١\end{vmatrix}=(١\times١)-(ن\times١-)=١+ن=٢$$

$$س=\frac{|P_س|}{|P|}=\frac{١}{١}=١\ /\ ص=\frac{|P_ص|}{|P|}=\frac{٢}{١}=٢$$ ← $(س،ص)=(١،٢)$

---

• خارجي تفوق/ كندا حل نظام المعادلات $٢س+٣ص=١$ ، $س-ص=٧$ باستخدام قاعدة كريمر وجد أنه $ص=\begin{bmatrix}٢&٧\\١&١\end{bmatrix}$ ما قيمة كل من س، ص .

الحل/

$$\begin{bmatrix}٧\\١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١-&م\\٢&ب\end{bmatrix}$$

$ص=\begin{bmatrix}٧&م\\١&ب\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٢&٧\\١&١\end{bmatrix}$ ← $م=٢$ ، $ب=١$

$|P| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1\times1) - (2\times2) = -1-4 = -5$

$|P_{س}| = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1\times1) - (7\times2) = -1-14 = -15$

$|P_{ص}| = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1\times7) - (1\times2) = 7-2 = 5$

$س = \frac{|P_{س}|}{|P|} = \frac{-15}{-5} = 3$ ، $ص = \frac{|P_{ص}|}{|P|} = \frac{5}{-5} = -1$ ← $(س، ص) = (3، -1)$

---

• خارج تفوقه/ عند استخدام طريقة النظير الضربي في حل نظام المعادلات الخطية وحيداً $ص = -2س$ و $ك + 2 = 4$ ما قيمة $ك$ ؟

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ ك & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}$

الحل/ $|P| = (1\times1) - (ك\times2) = 1 - 2ك = 4$

$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & ك \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & ك \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -ك & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (10\times1) + (-2\times1) \\ (10\times-ك) + (2\times2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{4}(-10ك - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$3 = 2$ ، $3 = -2\times2 = -4$

$\frac{1}{4}(-10ك - 2) = 3$ ← $-10ك - 2 = 12$ ÷ 2

$-5ك - 1 = 6$

$ك + 1 = 4$

أ.مي حواري

① $ك + 1 = 4$

② $ك + 2 = 4$

$2ك = 4$ ← $\frac{2ك}{2} = \frac{4}{2}$

نفوض في ② $ك = 1$ ← $ع = 4 - 1 = 3$ ← $ن + 1 = 3$ ← $ن = 2$

---

يحتاج الأمر مزيدًا من التّعب، تحامَل قليلاً، لا تسقُطَنّ في منتصف الطّريق
ونهايته، الذي رزقكَ قوّة الأمس يؤتيك قدرة اليوم، ويُلهمك الصّبر
لتُبصِر، لا يضيع الله جهد الصّادقين وإن خافوا، ولا يترك قلوب العاملين

# اختبار نهاية الوحدة الأولى

## • السؤال الأول :

سيكون هذا السؤال من (١٠) فقرات من نوع الاختيار من متعدد، من أربعة بدائل، ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة :

١/ اذا كان $س = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٤ & ٨- \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٣- & ٥- \\ ٧ & ٦- \end{bmatrix}$ وكانت $ع = س + ص$ ، ما قيمة $ع_{١٢}$

أ/ ٣ ب/ ٦٠ ج/ ٩٠ د/ ٦٠-

الحل: $ع_{١٢} = س_{١٢} + ص_{١٢} = ٤ + ٦ = ١٠$

$ص_{١٢} = س_{١٢} + ص_{١٢} = ٨- + ٧ = ١-$

$ع_{١٢} = (٢ \times ٣ \times ع_{١٢}) = ٢ \times ٣ \times ١٠ \times -١ = ٦٠-$

**أ.مي حواري**

---

٢/ إذا كانت المصفوفة $P$ من الرتبة $٢ \times ١$ وكانت المصفوفة $ب = [٥- \quad ٩]$ فإن العملية الممكنة عليهما من الآتية :

أ/ $٢ب + ٣P$ ب/ $٢ب + P$ ج/ $٤P - ٢ب$ د/ $٣(ب + P)$

الحل: $و_{٢ \times ١}$ ب من الرتبة $١ \times ٢$

$و_{١ \times ٢} = ب \times P$ ✗ لا يمكن (غير معرفة)

لذا رتبة $و \neq$ رتبة $ب$

$و_{١ \times ٢} = ب_{١ \times ٢} \times P_{٢ \times ١} = ج_{٢ \times ٢}$

✓ ب/ $ج = ب^{٢} + ٢ب \times P$ معرفة

✗ $(ج + د)$ لا يمكن جمع وطرح $(ب، P)$ لأنهما من رتب مختلفة .

---

٣/ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٤س \\ ٢ + ٣ص \\ س - ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤س \\ ٥ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ما قيمة $ص$

أ/ ١٦ ب/ ٤- ج/ ٢ د/ ٤

الحل: $٢ + ٣ص = ٥ \Leftarrow \frac{٣}{٣}ص = \frac{٣}{٣} \Leftarrow ص = ١$ ، $س - ص = ٣ \Leftarrow س - ١ = ٣$

$\Leftarrow س = ٤$

---

٤/ إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ١ & ب \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ $\left( \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١- \\ ٢ \end{bmatrix} \right)$ ما رتبة المصفوفة $س$

أ/ $١ \times ١$ ب/ $٢ \times ٢$ ج/ $١ \times ٢$ د/ $٢ \times ١$

الحل: $س = P \times ب$ ، $س_{١ \times ٢} = P_{٢ \times ٢} \times ب_{٢ \times ١}$

$\Leftarrow س_{١ \times ٢} = س_{s}$

٥/ إذا كانت $P=\begin{bmatrix}٤ & ٢\\ -٣ & -١\end{bmatrix}$ فما قيمة $|P_{ج}-م_{ج}|$

ب/ $|و_{ج}|$ ، ج/ $|P_{ج}|$ ، د/ $-|م_{ج}|$

الحل $P_{ج}-م_{ج}=P-ن_{ج}=\begin{bmatrix}٤ & ٢\\ -٣ & -١\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}ن & ١\\ ١ & ن\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٣ & ٢\\ -٣ & -٢\end{bmatrix}$

$|P_{ج}-م_{ج}|=\begin{vmatrix}٣ & ٢\\ -٣ & -٢\end{vmatrix}=(-٢\times٣)-(-٣\times٢)$

$|و_{ج}|=ن=٦+٦-$

---

٦/ إذا كانت المصفوفة $P=\begin{bmatrix}-٢ & -٤\\ ٢ & ٣\end{bmatrix}$ وكانت ب مصفوفة من الرتبة الثانية حيث $|P|-٣|ب|=|و_{ج}|+|م_{ج}|$ فما قيمة $|ب|$

ب/ $-٦$ ، ج/ $\frac{-٤٠}{٣}$ ، د/ $\frac{-٢٠}{٣}$

الحل $|P|=(-٢\times٣)-(-٤\times٢)=-٦-٨=٢$

$|P|-٣|ب|=|و_{ج}|+|م_{ج}|$

$٢\times٢-٣|ب|=$ صفر $+١+٢$ $\Leftarrow$ $-٣|ب|=٤-$ $\Leftarrow$ $|ب|=١٨\Leftarrow-٣|ب|=٢٢-$ $\Leftarrow$ $ب=-٦$

---

٧/ إذا كان $\begin{vmatrix}١ & ٧\\ -١ & ١\end{vmatrix}=|٣م|$ و $|٣م|=\begin{vmatrix}١ & ١\\ ١ & ١\end{vmatrix}$ فما قيمة $(٣م\times٣م-|٢P|)$

ب/ $-٢٠$ ، ج/ $٣٤$ ، د/ $٢٠$

الحل $|P|=\begin{vmatrix}١ & ١\\ -١ & ١\end{vmatrix}=(١\times١)-(-١\times١)=١+١=٢$

$|٣م|=(١\times١)-(٧\times١)=١-٧=-٦$

$|٣م|=(١\times١)-(١\times٧)=١-٧=-٦$

$م=\frac{|٣م|}{|P|}=\frac{-٦}{٢}=-٣$ و $ن=\frac{|٣م|}{|P|}=\frac{-٨}{٢}=-٤$

المطلوب/ $(-٢)^{٣}|P|-٣م\times٣م=٣\times-٢-(٤\times٣)=-٨-١٢=-٢٠$

أ.مي حواري

---

٨/ إذا كانت $P=\begin{bmatrix}٣ & ب\\ ٢ & ٢\end{bmatrix}$ و $P^{-١}=\begin{bmatrix}١ & -١\\ ٢ & -١,٥\end{bmatrix}$ فما قيمة الثابت ب

ب/ ٦ ، ج/ $-٨$ ، د/ $-٤$

الحل $P_{ج}=P^{-١}\times P$ $\Leftarrow$ $\begin{bmatrix}ن & ١\\ ١ & ن\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(ب\times٢)+(-١) & (ب\times٢)+(-١,٥)\\ (٢\times٢)+(-٣) & (٢\times-١,٥)+٣\end{bmatrix}$

$ن=ب-٣\Leftarrow ن=١\Leftarrow ن=\frac{٣}{٢}\times٢-ب$

$ن=٤\Leftarrow ن=٤+ب-$

$ن=\{٤\}$ $\Leftarrow$

9/ إذا كانت س، ص، ع مصفوفات حيث يمكن اجراء العملية الحسابية (س ع + ص) وكانت المصفوفة (س) من الرتبة (٤×٢) والمصفوفة ع من الرتبة (٣×٢) فما هي رتبة (ص)

ب/ ٣×٢ ج/ ٣×٤ د/ ٢×٢ أ/ ٤×٣

الحل/ س ع + ص ← رتبة س ع = رتبة ص

س × ع = ن ← رتبة ص = ٤×٣ ٢×٤ ٣×٢

---

10/ ما قيمة س إذا كان أن $\left(\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} - م^{٢}\right)^{٣} = \begin{bmatrix} ١ & س+٣ \\ -٢ & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

أ/ ١ ب/ -١ ج/ ٣ د/ -٣

الحل/ $(م^{٢} - م)^{٣} = \begin{bmatrix} ٠ & س+٣+٥ \\ ٠ & ٦+٣ \end{bmatrix}$

$ع = ع^{٣} = \begin{bmatrix} ٠ & س+٣+٥ \\ ٠ & ٦+٣ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & س+٣+٥ \\ ٠ & ٦+٣ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

٦+٣ = ٠ ← ٣ = -٦/٢ ← س = -٣

٥+٣+س = ٠ ← ٥ - ٦ + س = ٠ ← س = -١ ← س = ١

---

السؤال الثاني:

أ/ اذا كان $\begin{vmatrix} س & -٣ \\ ١ & ١-س \end{vmatrix} = |م| \times \begin{vmatrix} س & -س \\ ٣س٢ & ٠ \end{vmatrix} + ٢$ جد قيمة/ قيم س

الحل/ $[س(١-س) - (-٣)(١)] = ١ \times [(-س)(-س) - (٣س٢) \times ٠] + ٢$

$س - س^{٢} + ٣ = س^{٤} + ٢ \leftarrow \frac{٣}{٣} = \frac{٣س^{٤}}{٣} \leftarrow ١ = س^{٤}$

س = ١ ، س = -١

$\{١, -١\} = س \leftarrow$

---

ب/ اذا كان $م^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ن = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ٠ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ جد ناتج:

أ/ ٥×٢ ب/ $٩ + ٢ \times |م^{-١}|$

الحل/ $|م^{-١}| = (٣ \times ٣) - (٢ \times ٥) = ٩ - ١٠ = -١$

$م = (م^{-١})^{-١} = \frac{-١}{|م^{-١}|} \begin{bmatrix} ٥- & ٣ \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} (٣-\times٢-)+(٢\times١) & (٥\times٢-)+(٣-\times١) \\ (٣-\times٥)+(٢\times٤) & (٥\times٥)+(٣-\times٤) \\ (٣-\times٢)+(٢\times٣) & (٥\times٣)+(٣-\times٢) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٣- & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = ق \times ل$$

$$\Leftarrow ق \times ل = \begin{bmatrix} ٨ & ١٣- \\ ٧- & ١٣ \\ ٤ & ٦- \end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣- \\ ٣- & ٥ \end{vmatrix} = (٢\times٥)-(٣-\times٣-) = ١٠-٩ = ١-$$

$$ب + ٢ق = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢- & ٣- \\ ٣- & ٥- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow ب = \begin{bmatrix} ٢- & ٢- \\ ٢- & ٥- \end{bmatrix} - ٢ق$$

---

• السؤال الثالث :

أ/ إذا كانت $٣أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ١٨ & ٩- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٨- \end{bmatrix}$ ما حل المعادلة المصفوفية

$٢(أ + س) = ٣ب$

الحل / $أ + س = \frac{٣}{٢}ب$

$$\Leftarrow أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ١٨ & ٩- \end{bmatrix} \times \frac{١}{٣} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٦ & ٣- \end{bmatrix}$$

$$\frac{٢}{٢}(أ + س) = \frac{٣}{٢}ب \Leftarrow أ + س = \frac{٣}{٢}ب \Leftarrow س = \frac{٣}{٢}ب - أ$$

$$س = \frac{٣}{٢}\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٨- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٦ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٣ & ١٢- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٦ & ٣- \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow س = \begin{bmatrix} ١٤- & ٢ \\ ٣- & ٩ \end{bmatrix}$$

---

ب/ استخدم طريقة النظير الضربي لحل النظام التالي : $٣ص + ١ = ٥س - ٨$ ، $ص = ٤ + س - ٣ص$

الحل / $٣ص + ١ = ٥س - ٨ \Leftarrow ٥س + ٣ص = ٧$

$$\Leftarrow ص = ٤ + س - ٣ص$$

$$\Leftarrow س = ٤ - ٢ص$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

$$|P| = (3\times1) - (-2\times5) = 13$$

$$P^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{13} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{13}$$

$$\begin{bmatrix} -26 \\ 13 \end{bmatrix} \frac{1}{13} = \begin{bmatrix} (-2\times8)+(-3\times4) \\ (1\times8)+(5\times4) \end{bmatrix} \frac{1}{13} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \quad (س=2) \text{ و } (ص=-1)$$

---

• السؤال الرابع :

أ/ إذا كان $|P| = 13$ جد قيمة/قيم الثابت س

$$\begin{vmatrix} س & -3 & 1 \\ 2س & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

الحل/

$$13 = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} س - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} (-3) + \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$13 = س((-5\times7)-(6\times2)) + 3((2\times7)-(1\times2)) + ((1\times6)-(-5\times1))$$

$$13 = -47س + 42س - 6 + 14س + 5$$

$$13 = 7س - 1 \Leftarrow \frac{14}{7} = \frac{7س}{7} \Leftarrow س = 2$$

---

ب/ ليكن $P = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $ب = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$ ما قيمة/قيم س اذا علمت أن

$$|P| س + |ب| = 8 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل/ $|P| = (4\times\frac{1}{2}) - (2\times7) = 2 - 14 = -12$

$$ب = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \Leftarrow ب = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|ب| = (3\times5) - (1\times5) = 15 - 5 = 10$$

$|أ|\,س^2 + |ب|\,س = \left((5\times 1) - (-3\times -2)\right)\times 8$

$2س^2 + 10س = (5 - 6)\times 8$

$\left[2س^2 + 10س = -8\right] \div 2 \Leftarrow س^2 + 5س = -4 \Leftarrow س^2 + 5س + 4 = 0$

$(س + 1)(س + 4) = 0$

إما $س + 1 = 0 \Leftarrow س = -1$

$س + 4 = 0 \Leftarrow س = -4$

$\Leftarrow س = \{-1 ، -4\}$

---

• السؤال الخامس :

أ/ اذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ تمثل مصفوفة المعاملات في نظام خطي مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين س، ص وكانت $أ_ص = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

الحل/ $أ_ص = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ← مصفوفة الثوابت

$|أ_ص| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (8\times -1) - (-1\times 2) = -8 + 2 = -6$

$|أ| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1\times -1) - (1\times 2) = -1 - 2 = -3$

$س = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-6}{-3} \Leftarrow س = 2$

أ.مي حواري

---

ب/ اذا كان $س = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ جد ناتج :

١/ ص + ص س

٢/ $و_2 - \left(\frac{ص}{2}\right)^{-1}$

الحل ١/ $ص + ص س = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$ص + ص س = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-5 & 1+1 \\ 6-20 & 3+4 \end{bmatrix} \Leftarrow ص + ص س = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}$

٢/ $و_2 - \left(\frac{1}{2}ص\right)^{-1} = -\left(\frac{1}{2}ص\right)^{-1} = -2ص^{-1}$

• ملاحظة $(أص)^{-1} = \frac{1}{أ}ص^{-1}$ ، $أ \in ح^*$ ، ص مصفوفة

$|ص| = (1\times -4) - (-1\times 3) = -4 + 3 = -1$

$-2ص^{-1} = -2\times \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

---

« وآخر دعواهم أن الحمد لله ربّ العالمين »

## روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/riadi-kamel1

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath