Exercice 2

1) Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable (on rappelle que $f^2 = f \circ f$).

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) a) Déterminer la matrice A^2 puis établir que $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

b) Donner une base (u) de $\operatorname{Ker}(g - Id)$.

c) Déterminer $\operatorname{Ker}(g + Id)$.

d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.

3) a) Résoudre l'équation $A^2X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (v, w) de $\operatorname{Ker}(g^2 + Id)$.

b) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w) et conclure.