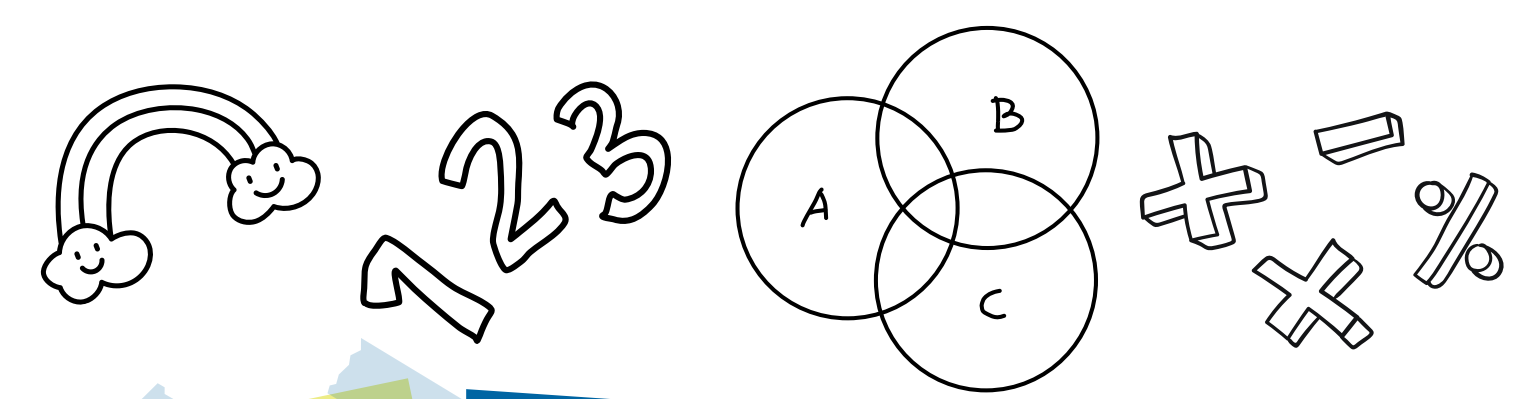



2025
2026
الفصل الأول

# حلـــــول الكـــامـــل

## تـــوجـــيهي
## علمي

الوحدة الثانية

إعداد: أ.ميّ عمار حوّاري



موقع قطرة التعليمي

Qatraedu.com

+972 59-276-7085





# إهـــــــداء

إلى صاحبةُ القلبِ الأحنّ،

والأثر الأعمق،

إلى من كان حضورها فرقًا،

وكلماتها أثرًا لا يزول،

من غرست بداخلي حلمًا لا يزال يكبر،

ملهمتي وقدوتي... نجمتي اللامعة،

معلمتي الغالية **رولا بطة**، حفظكِ الله ورعاكِ دائمًا

أ. ميّ عمار حوّاري

# مـقــدمـــــــة

إيماناً منا بضـرورة توفير أفضـل المصـادر التعليمية لطلبتنا في مرحلة الثانوية العامة، يسّـر فريق موقع قطرة التعليمي تقديم الإجابات النموذجية لـ "كراسة الكامل" (تصنيف أسئلة السنوات السابقة).

تأتي هذه الحلول ضمن إطار جهودنا المستمرة في موقع قطرة التعليمي، الذي تأسس برؤية طموحة تهدف إلى تزويد طلاب التوجيهي بتعليم عالي الجودة، لا سيما في مادة الرياضيات، مستخدمين أحدث الأساليب والوسائل التعليمية العالمية.

وقد تم إعداد هذه الكراسـة خصـيصـاً لطلاب الفرع العلمي، لتتضـمن حلولاً مفصـلة وشـرحاً وافياً لكل الأســئلة، انطلاقاً من إيماننا بأن التعلم الرقمي يمنح الطالب مرونة الوصـــول إلى المعرفة في أي وقت ومن أي مكان.

وإننا في موقع قطرة التعليمي، نؤمن بأن وراء كل إنجاز عظيم جنوداً مجهولين؛ لذا نتقدم بأســمى آيات الشـكر والتقدير للمعلّمة الفاضـلة **ميّ عمار حوّاري**، عضـو فريقنا المتميز، التي سـخرت وقتها وجهدها وخبرتها العميقة في إعداد هذه الحلول بدقة وإتقان. إن خبرتها الواسـعة تجلت في أسـلوب الشـرح المبسـط والواضـح الذي يضـع مصـلحة الطالب وتفوقه الأكاديمي في المقام الأول؛ فجزيل الشـكر لها، ونسـأل الله أن يجعل هذا العمل في ميزان حسناتها.

أتمنى أن تكون هذه الكراسـة عونًا لكم في رحلتكم نحو النجاح، وأن تسـاهم في تحقيق التفوق والتميز الذي تسعون إليه.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح الدائم.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

# روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/kamel2

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath

# نصائح مهمة لكيفية دراسة الرياضيات؟

عزيزي الطالب/ عزيزتي الطالبة، إليك بعض النصائح التي ستساعدك على التفوق في دراستك لهذه المادة وتحقيق أفضل النتائج:

1. **إخلاص النية لله.**
2. **التوكل على الله** بالأخذ بجميع أسباب التفوق، والدعاء والالحاح فيه فهو من أعظم أسلحة المسلم.
3. **فهم الأساسيات أولًا:** تأكد من أنك تفهم الأساسيات بشكل جيد. ولضمان التمكن من الأساسيات فقد وفرنا دورة مجانية عبر موقع قطرة التعليمي.
4. **التدريب المستمر باستخدام الورقة والقلم:** الحل المتكرر هو الطريق إلى الإتقان، حل المسائل بانتظام وبشكل يومي سيعزز من فهمك ويساعدك على استيعاب المفاهيم بشكل أعمق.
5. **افهم المسألة قبل الحل:** لا تتسرع في حل المسألة دون فهم كامل لمتطلباتها، خذ وقتك في قراءة السؤال جيدًا، وفهم المطلوب قبل الشروع في الحل، التسرع قد يؤدي إلى أخطاء غير ضرورية.
6. **حل المسائل بطريقة منظمة:** نظم خطوات الحل بطريقة واضحة ومنهجية، تدوين الخطوات بتسلسل منطقي يساعدك على متابعة الحل والتعرف على أي خطأ قد يحدث بسهولة، هذا الأسلوب يعزز أيضًا من فرصك في الحصول على درجات كاملة.
7. **راجع بانتظام:** خصص وقتًا لمراجعة ما تعلمته بانتظام، ولا تترك الأمور تتراكم حتى اقتراب موعد الامتحانات، المراجعة المستمرة تسهل تذكر المعلومات وتجعلك أكثر استعدادًا للامتحان.
8. **لا تخجل من طلب المساعدة:** إذا واجهت صعوبة في فهم مفهوم معين أو في حل مسألة ما، لا تتردد في طلب المساعدة من معلمك أو زملائك، الحوار والتفاعل مع الآخرين قد يفتح لك آفاقًا جديدة لفهم المادة.
9. **حافظ على هدوئك وثقتك بنفسك:** التوتر قد يؤثر سلبًا على أدائك، حافظ على هدوءك وثقتك بنفسك أثناء الدراسة وفي الامتحانات، تذكر أن النجاح في الرياضيات يعتمد على الاستمرارية والعمل الجاد، وليس على الحفظ فقط.

10. **استعد للامتحانات بالتحضير المبكر:** لا تنتظر حتى اللحظة الأخيرة، ابدأ في التحضير للامتحانات قبل وقت كافٍ، وضع خطة دراسية تغطي جميع الوحدات بشكل متوازن، قم بحل أسئلة الامتحانات السابقة المرفقة في هذه الكراسة، وتأكد من مراجعة الحلول بعد الانتهاء.
11. **قم بتحليل الأخطاء:** عند ارتكاب خطأ في حل مسألة، لا تتجاهله. بدلاً من ذلك، عد إليه وحاول فهم سبب الخطأ وكيف يمكنك تجنبه في المستقبل، التعلم من الأخطاء يُعد أحد أفضل الطرق لتطوير مهاراتك الرياضية.
12. **اجعل لك دفتراً خاصاً لتدوين كل ما يتم دراسته واحرص على تدوين الملاحظات المهمة:** أثناء حل المسائل أو مشاهدة الفيديوهات، احرص على تدوين كل شيء لأنه سيكون من الصعب مشاهدة الفيديوهات في يوم واحد مثل يوم الامتحان، وكتابة الملاحظات المهمة تساعدك على تنظيم أفكارك وتذكر النقاط المهمة عند المراجعة لاحقًا.

نتمنى لك التوفيق والنجاح في رحلتك الدراسية، ونتطلع لأن تكون هذه الكراسة عونًا لك في تحقيق أهدافك في مادة الرياضيات. تذكر أن كل مجهود تبذله اليوم سيثمر في المستقبل.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

# الدرس الأول | الاقترانات المتزايدة والمتناقصة

## • القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2012 / إذا كان الاقترانان ق(س)، هـ(س) معرفان على ح، وكان الاقتران ق(س) متزايداً على ح حيث ق(س) ≠ ٠ وحيث ق(س) × هـ(س) = ٧ فإن أحد العبارات التالية صحيحة :

أ/ هـ(س) متناقص على ح  ب/ هـ(س) متزايد على ح  جـ/ هـ(س) ثابت على ح

د/ ق(س) ∝ هـ(س) على ح

الحل/ ق(س) متزايد على ح ⇐ قَ(س) > ٠ على ح

ق(س) × هـ(س) = ٧ ⇐ هـ(س) = $\frac{٧}{ق(س)}$ متصل على ح حاصل قسمة متصلين و(ق(س) ≠ ٠)

هـَ(س) = $\frac{-٧ قَ(س)}{ق^٢(س)}$ = $\frac{سالب × موجب}{موجب}$ = سالب

بما أن هـَ(س) < ٠ على ح ⇐ هـ(س) متناقص على ح .

أ.ميّ حوّاري

---

• 2016 / إذا كان قَ(س) = $(س^٢-١)^٣(س-٢)^٤$ فإن ق يكون متناقصاً على الفترة :

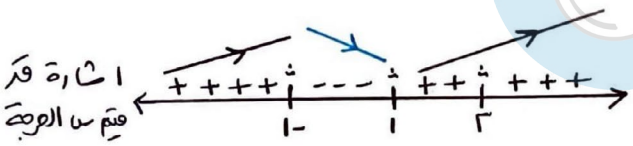
أ/ ]-∞، ١]  ب/ [-١، ١]  جـ/ [١، ٢]  د/ [٢، ∞[

الحل/ قَ(س) = $(س^٢-١)^٣(س-٢)^٤$ = ٠

إما $س^٢ - ١$ = ٠  أو س - ٢ = ٠

$\sqrt{س^٢} = \sqrt{١}$ ← س = ١  س = ٢

س = -١




من اشارة قَ(س) : ق(س) متناقص على [-١، ١]

---

• 2019 دور أول / ما قيمة / قيم الثابت أ التي تجعل ق(س) = (٣أ - ٦) س + ٧ متزايداً على ح :

أ/ أ > ٢  ب/ أ = ٢  جـ/ أ < ٢  د/ أ = -٢

الحل/ ق(س) متزايد على ح ⇐ قَ(س) > ٠ على ح .

قَ(س) = ٣أ - ٦ > ٠ ⇐ $\frac{٣أ}{٣} > \frac{٦}{٣}$ ⇐ أ > ٢

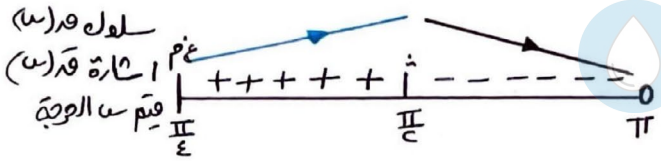
---

• 2019 دور ثاني / إذا كان ق(س) = لو$_{هـ}$(جاس) ، س ∈ [$\frac{\pi}{٤}$، π[ ما الفترة التي يكون فيها ق(س) متزايداً

أ/ [$\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{٢}$]  ب/ [$\frac{\pi}{٤}$، π]  جـ/ [$\frac{\pi}{٢}$، π]  د/ [$\frac{\pi}{٨}$، π]

الحل/ ق(س) = لو$_{هـ}$(جاس) متصل على [$\frac{\pi}{٤}$، π[

قَ(س) = $\frac{جتاس}{جاس}$ = ٠ ⇐ جتاس = ٠ ⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$ ∈ ]$\frac{\pi}{٤}$، π[




من اشارة قَ(س) نلاحظ

ق(س) متزايد على [$\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{٢}$]

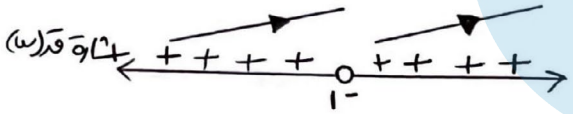
• 2020 دور أول/ اذا كان ق(س) = $\frac{س}{س+1}$ ، س ≠ -1 ، ما العبارة الصحيحة فيما يأتي :

أ/ ق(س) متزايد على ح
ب/ ق(س) متزايد على ]-∞، -1[ ∪ ]-1، ∞[
ج/ ق(س) متناقص على ح
د/ ق(س) متناقص على ]-∞، -1[ ∪ ]-1، ∞[

الحل/ ق(س) = $\frac{س}{س+1}$ متصل على ح/ {-1}

ق(س) = $\frac{(س+1)-1}{(س+1)}$ = $\frac{س+1}{س+1}$ - $\frac{1}{س+1}$ ⇐ ق(س) = 1 - $\frac{1}{س+1}$ "لتسهيل الاشتقاق"

قَ(س) = ن - $\frac{-1}{(س+1)^2}$ = $\frac{1}{(س+1)^2}$ ≠ ن




من اشارة قَ(س) يتضح أن :
ق(س) متزايد على ]-∞، -1[ ∪ ]-1، ∞[ .

---

• 2020 دور ثاني/ ليكن ق(س) ، هـ(س) اقترانين سالبين وقابلين للاشتقاق ومتناقصين على ح
وكان ل(س) = ((ق∘هـ)(س))² أي العبارات الآتية صحيحة على الاقتران ل(س)

أ/ ل(س) متناقص على ح
ب/ ل(س) متزايد على ح
ج/ لَ(س) ≥ ن
د/ ل(س) ثابت

الحل/ ق(س) ، هـ(س) سالبين ⇐ ق(س) < ن على ح ، هـ(س) < ن على ح
ق(س) ، هـ(س) متناقصين على ح ⇐ قَ(س) < ن على ح ، هـَ(س) < ن على ح .
ل(س) = ((ق∘هـ)(س))² متصل على ح (حاصل تركيب اقترانين متصلين).
لَ(س) = ٢((ق∘هـ)(س)) قَ(هـ(س)) هـَ(س)
= ٢ق(هـ(س)) هـَ(س) قَ(هـ(س))
= ٢(سالب)(سالب)(سالب) = سالب على ح .

أ.ميّ حوّاري

بما أن لَ(س) < ن على ح ⇐ ل(س) متناقص على ح .

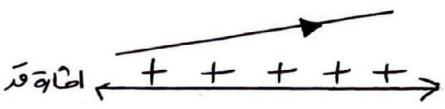
---

• 2021 دور أول/ إذا كان ق(س) = هـ^س - هـ^-س ما العبارة الصحيحة بالنسبة لـ ق(س)

أ/ متزايد في ح
ب/ متزايد في [ن، ∞[ ومتناقص في ]-∞، ن]
ج/ متناقص في ح
د/ متناقص في [ن، ∞[ ومتزايد في ]-∞، ن]

الحل/ ق(س) = هـ^س - هـ^-س متصل على ح
قَ(س) = هـ^س - هـ^-س × -1 = هـ^س + هـ^-س ≠ ن

موجب دائماً
موجب دائماً



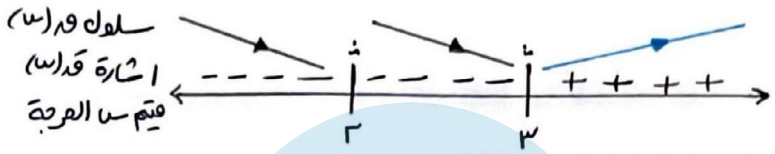

⇐ قَ(س) > ن على ح ⇐ ق(س) متزايد على ح

---

• 2022 دور أول/ إذا كان قَ(س) = (س³-٨)⁴(س-٣)⁵ ما الفترة التي يكون فيها منحنى ق(س) متزايد

أ/ [٢، ∞[
ب/ ]-∞، ٣]
ج/ [٢، ٣]
د/ [٣، ∞[

الحل/ قَ(س) = (س³-٨)⁴(س-٣)⁵ = ن
إما س³-٨ = ن ⇐ س³ = ٨ ⇐ س = ٢ أو س-٣ = ن ⇐ س = ٣




من اشارة ق(س) ← ق(س) متزايد على [٣، ∞[

---

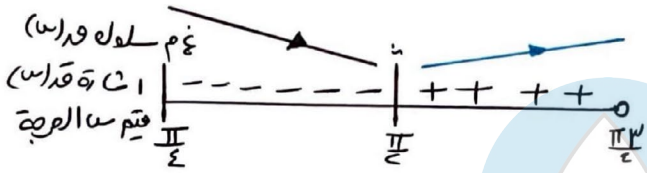
• 2024 دور ثاني / إذا كان ق(س) = لو$_{هـ}$(قتاس) ، س ∈ [$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$[ متى يكون منحنى ق(س) متزايداً

أ/ [$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{2}$[ ب/ [$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$[ ج/ [$\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{4}$[ د/ [$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$[

الحل/ ق(س) = لو$_{هـ}$(قتاس) متصل على [$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$[

ق'(س) = $\frac{-\text{قتاس ظتاس}}{\text{قتاس}}$ = −ظتاس = ٠ ← $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ = ٠ ← جتاس = ٠

س = $\frac{\pi}{2}$ ∈ ]$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{2}$[




من اشارة ق'(س) / ق(س) متزايد على [$\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{4}$[

---

• 2025 دور ثاني / إذا كان ق'(س) = (س$^2$−١)$^3$(س−٢)$^4$ ما الفترة التي يكون فيها ق(س) متناقصاً :

أ/ ]−∞ ، −١] ب/ [−١ ، ١] ج/ [١ ، ٢] د/ [٢ ، ∞[

مكرر سؤال (2016).

---

• 2025 مديرية رام الله / ما الفترة التي يكون فيها ق(س) = لو$_{هـ}$|س$^2$−٣س+٤| متزايداً على مجاله

أ/ ]−∞ ، $\frac{3}{2}$[ ب/ [$\frac{3}{2}$ ، ∞[ ج/ ]−$\frac{3}{2}$ ، ∞[ د/ ]−∞ ، $\frac{3}{2}$[

الحل/ ق(س) = لو$_{هـ}$|س$^2$−٣س+٤| متصل على ح لأنه "ما داخل اللوغاريتم قيمة مطلقة ← (+) (صفر)

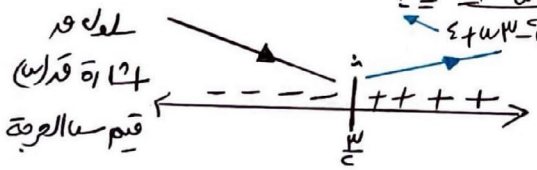
و س$^2$−٣س+٤ موجب دائماً ≠ ٠

|س$^2$−٣س+٤| = س$^2$−٣س+٤

س$^2$−٣س+٤ = ٠ ← المميز < ٠ لا تحلل

← ق(س) = لو$_{هـ}$(س$^2$−٣س+٤) ← ق'(س) = $\frac{\text{٢س}-3}{\text{س}^2-3\text{س}+4}$ = ٠

٢س−٣ = ٠ ← ٢س = ٣ ← س = $\frac{3}{2}$




من اشارة ق'(س) يتضح أن ق(س) متزايد على [$\frac{3}{2}$ ، ∞[

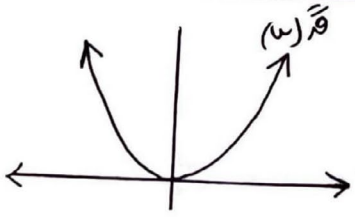
أ.ميّ حوّاري

---

• خارجي / اذا كان ق(س) كثير حدود ، جد فترات تناقص ق'(س)

أ/ ]٠ ، ∞[ ب/ ]−∞ ، ٠[ ج/ ح

د/ ∅




الحل/ ق'(س) متناقص ← ق''(س) < ٠

ومن الرسمة ق''(س) تقع فوق محور السينات ← ق''(س) > ٠ على ح "لا يوجد فترات تناقص (ق'(س))".

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية :

• 2007 / عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = |س² − ٤|

الحل/ ق(س) = |س² − ٤| متصل لأنه قيمة مطلقة لمتصل (لكثير حدود) على ح .

أ.ميّ حوّاري

ق(س) = { س² − ٤ ، س ≥ ٢ أو س < −٢ ؛ ٤ − س² ، −٢ ≤ س < ٢ }

قَ(س) = { ٢س ، س > ٢ أو س < −٢ ؛ −٢س ، −٢ < س < ٢ ؛ غ م ، س = {٢ ، −٢} }

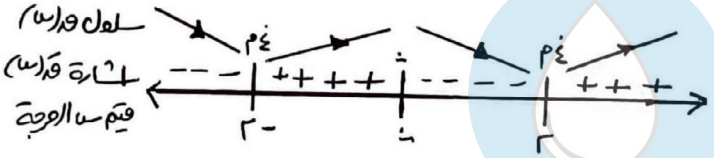
* قَ(٢)⁺ = ٢ × ٢ = ٤ ، قَ(٢)⁻ = −٢ × ٢ = −٤ ⇐ قَ(٢) غ م

* قَ(−٢)⁺ = −٢ × −٢ = ٤ ، قَ(−٢)⁻ = ٢ × −٢ = −٤ ⇐ قَ(−٢) غ م

قَ(س) = ٠

عندما س > ٢ أو س < −٢ ⇐ ٢س = ٠ ⇐ س = ٠ ∉ (س > ٢) أو (س < −٢)

عندما −٢ < س < ٢ ⇐ −٢س = ٠ ⇐ س = ٠ ∈ ]−٢ ، ٢[ .




من إشارة قَ(س) نلاحظ :

• ق(س) متزايد على [٢ ، ∞[ ∪ [−٢ ، ٠]

• ق(س) متناقص على ]−∞ ، −٢] ∪ [٠ ، ٢]

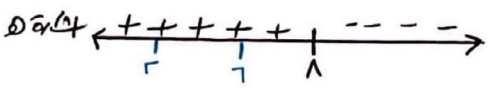
---

• 2009 / إذا كان ق(س) كثير حدود معرفاً على [٢ ، ٦] ويقع منحناه في الربع الأول ومتناقص على مجاله وكان هـ(س) = ٨ − س بين أن ل(س) = (ق × هـ)(س) متناقص في [٢ ، ٦]

الحل/ * ق(س) لـ ح متصل ومشتق على ]٢ ، ٦[

ق(س) يقع في الربع الأول ⇐ ق(س) > ٠ في [٢ ، ٦]

ق(س) متناقص ⇐ قَ(س) < ٠ على ]٢ ، ٦[ .




* هـ(س) = ٨ − س = ٠ ⇐ ٨ = س

لـ ح متصل ومشتق على ح

⇐ هـ(س) > ٠ في [٢ ، ٦]

هَ(س) = −١ < ٠ في ]٢ ، ٦[

ل(س) = (ق × هـ)(س) متصل على [٢ ، ٦] لأنه حاصل ضرب متصلين

لَ(س) = ق(س) هَ(س) + هـ(س) قَ(س)

= (موجب)(سالب) + (موجب)(سالب)

= سالب + سالب = سالب في ]٢ ، ٦[

بما أن ل(س) < ٠ في ]٢ ، ٦[ ⇐ ل(س) متناقص في [٢ ، ٦] #

• 2010 / اذا كان ق(س) = جتاس − هـ(س) + ٣س ، س ∈ [٠، $\frac{\pi}{2}$] أثبت أن (ق+هـ)(س) متزايد في تلك الفترة

الحل / ق(س) = جتاس − هـ(س) + ٣س

ق(س) + هـ(س) = جتاس + ٣س

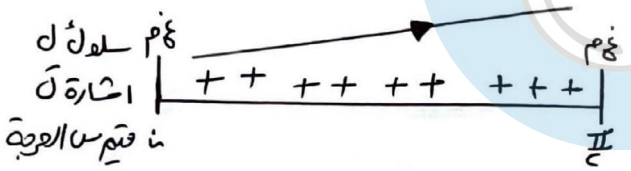
نفرض (ق+هـ)(س) = ل(س) = جتاس + ٣س متصل على [٠، $\frac{\pi}{2}$] حاصل جمع متصلين

" جتاس ثم كثير حدود "

لَ(س) = −جاس + ٣ = ٠ ⇐ ٣ = جاس (لا يمكن) لأن −١ ≤ جاس ≤ ١

هنا اشارة لَ(س) :

(ق+هـ)(س) = ل(س) متزايد على [٠، $\frac{\pi}{2}$] #




• 2020 دور أول / إذا كان قَ(س) كثير حدود متزايد على ح ، هـ(س) = ٢س − س² أثبت أن ل(س) = قَ(س) + هـ(س) هَ(س) متزايد ∀ س ∈ [٠، ٣]

الحل / قَ(س) متزايد ⇐ قً(س) > ٠ على ح .

هـ(س) = ٢س − س² = ٠ ⇐ س(٢ − س) = ٠

إما س = ٠ أو ٢ − س = ٠ ⇐ س = ٢

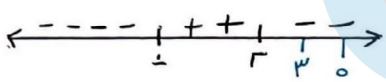
⇐ هـ(س) < ٠ في [٠، ٣]

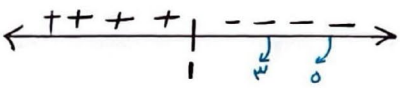
هـ(س) كثير حدود متصل ومشتق على ح .

* هَ(س) = ٢ − ٢س = ٠ ⇐ ٢ = ٢س ⇐ س = ١

هَ(س) < ٠ في [٠، ٣]

* هً(س) = −٢ < ٠ في [٠، ٣]




* ل(س) = قَ(س) + هـ(س) هَ(س) متصل على [٠، ٣] لأنه حاصل جمع ثم ضرب اقترانات متصلة .

لَ(س) = قً(س) + هـ(س) هً(س) + هَ(س) هَ(س) في ]٠، ٣[

= (موجب) + (سالب)(سالب) + (سالب)²

= (موجب) + موجب + موجب = موجب في ]٠، ٣[

بما أن لَ(س) > ٠ في ]٠، ٣[ ⇐ ل(س) متزايد في [٠، ٣] #

• 2021 دور أول / إذا كان ق(س) كثير حدود معرف على [١، ٣] بحيث يقع منحناه في الربع الرابع ومتزايد على مجاله وكان هـ(س) = ١٠ − س² بين أن ل(س) = (ق×هـ)(س) اقتران متزايد في [١، ٣]

الحل / ق(س) كثير حدود متصل ومشتق على ]١، ٣[

ق(س) يقع في الربع الرابع ⇐ ق(س) < ٠ في [١، ٣]

ق(س) متزايد ⇐ قَ(س) > ٠ في ]١، ٣[ .

هـ(س) = ١٠ − س² لـ ح متصل ومشتق على ح .

أ.ميّ حوّاري

هـ(س) = ١٠ − س² = ٠ ⇐ ١٠ = س² ⇐ س = ± √١٠

هـ(س) > ٠ في [١، ٣] .

هـَ(س) = −٢س = ٠ ⇐ س = ٠

هـَ(س) < ٠ في [١، ٣]

إشارة هـ: − − − | + + + | − − −  (−√١٠ ، ١ ، ٣ ، √١٠)

إشارة هـَ: + + + | − − −  (٠ ، ١ ، ٣)

ل(س) = (ق × هـ)(س) متصل حاصل ضرب متصلين

لَ(س) = ق(س) هـَ(س) + هـ(س) قَ(س)

= (سالب)(سالب) + (موجب)(موجب)

= موجب + موجب = موجب في ]١، ٣[

لَ(س) > ٠ في ]١، ٣[ ⇐ ل(س) متزايد في [١، ٣] #

أ.ميّ حوّاري

---

• 2021 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = ٢س + لو$_{هـ}$(س+١) ، س > −١ بين أن منحنى ق(س) متزايد في مجاله .

الحل/ ق(س) = ٢س + لو$_{هـ}$(س+١)

لو ح متصل ، متصل لو$_{هـ}$ وما داخله أكبر من صفر

⇐ ق(س) متصل على ]−١، ∞[ لأنه جمع اقترانين متصلين .

قَ(س) = ٢ + $\frac{١}{س+١}$ = ٠ ⇐ −٢ = $\frac{١}{س+١}$ ⇐ −٢س − ٢ = ١ ⇐ −٢س = ٣ ⇐ س = −$\frac{٣}{٢}$ ∉ ]−١، ∞[

بما أن قَ(س) > ٠ في ]−١، ∞[

اذن ق(س) متزايد على ]−١، ∞[ #

سلوك ق

إشارة قَ: + + + + + + + + + + +

قيم س الحرجة: −١

---

• 2021 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{س^٣ - ٣س^٢}$ أوجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

الحل/ ق(س) متصل على ح .

ق(س) = (س³ − ٣س²)$^{\frac{١}{٣}}$

قَ(س) = $\frac{١}{٣}$(س³ − ٣س²)$^{-\frac{٢}{٣}}$ × (٣س² − ٦س) = $\frac{٣س^٢ - ٦س}{٣(س^٣ - ٣س^٢)^{\frac{٢}{٣}}}$ = ٠

⇐ ٣س² − ٦س = ٠ ⇐ ٣س(س − ٢) = ٠

إما س = ٠ أو س − ٢ = ٠ ⇐ س = ٢

• أصفار مقام قَ(س) : س³ − ٣س² = ٠ ⇐ س²(س − ٣) = ٠

إما س = ٠ أو س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣

• ق(س) متزايد على ]−∞، ٠] ∪ [٢، ∞[

• ق(س) متناقص على [٠، ٢]

سلوك ق

إشارة قَ: + + + | − − − | + + | + +

قيم س الحرجة: ٠ ، ٢ ، ٣

---

• 2021 دور ثالث/ اذا كان ق(س) = (س² − ٣) هـ$^{س}$ ، س ∈ ح أوجد مجالات التزايد والتناقص لـ ق(س)

الحل/ ق(س) = (س² − ٣) هـ$^{س}$ متصل على ح حاصل ضرب متصلين (كثير حدود و هـ$^{س}$)

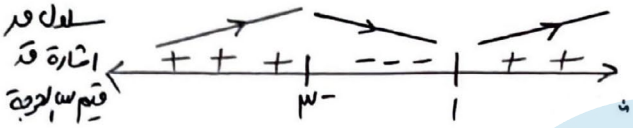
قَ(س) = (س² − ٣) هـ$^{س}$ + هـ$^{س}$ (٢س)

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}^2 - 3 + 2\text{س}) = 0$

$\text{هـ}^{\text{س}} \neq 0$ أو $\text{س}^2 + 2\text{س} - 3 = 0$

$(\text{س} - 1)(\text{س} + 3) = 0$

$\text{س} = 1 \in \text{ح}$ ، $\text{س} = -3$




أ.ميّ حوّاري

• من اشارة ق'(س) يتضح أن :

• ق(س) متزايد على $[1, \infty[ \cup ]-\infty, -3]$

ق(س) متناقص على $[-3, 1]$

---

• 2021 دور ثالث / إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح وكان $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}^2(\text{س}) + \text{هـ}^2(\text{س}) + \text{س}^3 + \text{س}$ أثبت أن ل(س) متزايد في ح علماً بأن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$ ، $\text{هـ}'(\text{س}) = -\text{ق}(\text{س})$

الحل / $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}^2(\text{س}) + \text{هـ}^2(\text{س}) + (\text{س}^3 + \text{س})$ ، متصل على ح ، حاصل جمع اقترانات متصلة .

ل ح متصل ومشتق على ح

$\text{ل}'(\text{س}) = 2\text{ق}(\text{س})\text{ق}'(\text{س}) + 2\text{هـ}(\text{س})\text{هـ}'(\text{س}) + 3\text{س}^2 + 1$

$\text{ل}'(\text{س}) = 2\text{هـ}(\text{س})\text{ق}(\text{س}) + 2\text{هـ}(\text{س}) \times -\text{ق}(\text{س}) + 3\text{س}^2 + 1$

$\text{ل}'(\text{س}) = 3\text{س}^2 + 1 \neq 0$

$\text{ل}'(\text{س}) > 0$ على ح $\Leftarrow$ ل(س) متزايد على ح #

---

• 2022 دور ثاني / إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}\text{جتاس}$ معرفاً في $[0, \frac{\pi}{2}]$ ، ما فترات التزايد والتناقص لـ ق(س)

الحل / $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}\text{جتاس}$ متصل على $[0, \frac{\pi}{2}]$ لأنه حاصل ضرب متصلين .

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} \times -\text{جاس} + \text{جتاس} \times \text{هـ}^{\text{س}}$

$0 = \text{هـ}^{\text{س}}(\text{جتاس} - \text{جاس})$

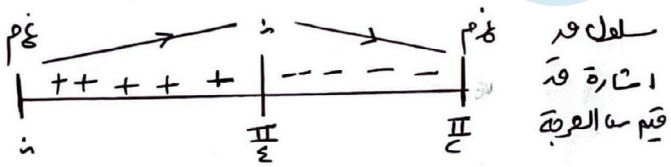
$\text{هـ}^{\text{س}} \neq 0$ : $\text{جتاس} - \text{جاس} = 0 \Leftarrow [\text{جتاس} = \text{جاس}] \div \text{جتاس}$

$\Leftarrow 1 = \text{ظاس} \Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{4} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

• من اشارة ق'(س) :

ق(س) متزايد على $[0, \frac{\pi}{4}]$

ق(س) متناقص على $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$




---

• 2023 دور أول / إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين حيث $\text{ق}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) = 0$ ، $\text{هـ}'(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}) = 0$ ، ق(س) ، هـ(س) > 0 عين مجالات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران $\text{ع}(\text{س}) = \frac{\text{ق}(\text{س}^2)}{\text{هـ}(\text{س}^2)}$ في الفترة $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

الحل / $\text{ق}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) = 0 \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = -\text{هـ}(\text{س})$

$\text{هـ}'(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}) = 0 \Leftarrow \text{هـ}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$ .

$ع(س) = \frac{ق(س^2)}{هـ(س^2)}$ متصل على $[-\frac{1}{2}، \frac{1}{2}]$ لأنه حاصل قسمة متصلين و $هـ(س^2) \neq 0$

$ع'(س) = \frac{هـ(س^2) \times ق'(س^2) \times 2س - ق(س^2) هـ'(س^2) \times 2س}{هـ^2(س^2)}$

$ع'(س) = \frac{2س\, هـ(س^2) \times -هـ(س^2) - 2س\, ق(س^2)\, ق(س^2)}{هـ^2(س^2)}$ اخراج $(-2س)$ عامل مشترك.

$ع'(س) = \frac{-2س\,(هـ^2(س^2) + ق^2(س^2))}{هـ^2(س^2)} = 0 \Leftarrow -2س\,(هـ^2(س^2) + ق^2(س^2)) = 0$

إما $-2س = 0 \Leftarrow س = 0 \in ]-\frac{1}{2}، \frac{1}{2}[$ ، $هـ^2(س^2) + ق^2(س^2) \neq 0$

موجب موجب

• لاحظ أن $\frac{هـ^2(س^2) + ق^2(س^2)}{هـ^2(س^2)}$ موجب دائماً

سلوك $ع(س)$

اشارة $ع'(س)$ $\quad + + + + + \quad | \quad - - - - - -$

قيم س الحرجة $\quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}$

اذن اشارة $ع'(س)$ نحددها من $(-2س)$

فإشارة $ع'(س)$ : $ع(س)$ متزايد على $[-\frac{1}{2}، 0]$ ، متناقص على $[0، \frac{1}{2}]$

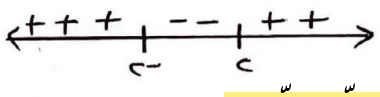
---

• 2023 دور ثاني / جد فترات تزايد وتناقص $ق(س) = |4 - س^2|$ ، $س \in ح$ .

الحل / $ق(س) = |4 - س^2| = |س^2 - 4|$ متصل على $ح$ لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران متصل (لـ $ح$) .

$س^2 - 4 = 0 \Leftarrow س^2 = 4 \Leftarrow س = 2 ، -2$

$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} س^2 - 4 & ، س < -2 \\ 4 - س^2 & ، -2 \leq س < 2 \\ س^2 - 4 & ، س \geq 2 \end{cases}$



$+ + + \quad | \quad - - \quad | \quad + +$

$-2 \quad 2$

أ.ميّ حوّاري

$ق'(س) = \begin{cases} 2س & ، س < -2 \\ -2س & ، -2 < س < 2 \\ 2س & ، س > 2 \\ غ م & ، س = \{-2، 2\} \end{cases}$

$ق'(2)^+ = 2 \times 2 = 4$

$ق'(2)^- = 2 \times -2 = -4$

$\Leftarrow ق'(2)$ غ م

$\Leftarrow$ متزايد على $[-2، 0] \cup [2، \infty[$

متناقص على $]-\infty، -2] \cup [0، 2]$

مكرر (2007) .

---

• 2024 دور أول / إذا كان $ق(س) = 3$ جاس جتاس ، $س \in [0، \pi]$ جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى $ق(س)$.

الحل / $ق(س) = 3$ جاس جتاس $= 3 \times \frac{1}{2}$ جا$(2س) = \frac{3}{2}$ جا$(2س)$

متصل على $[0، \pi]$ .

$قـ(س) = \frac{د}{س} \times ٣ ضتا^{٢}(٢س) = ٣ ضتا^{٢}(٢س) = ٠ \Leftarrow$ ضتا$(٢س) = ٠$

لاحظ $س \in [٠ ، ٢\pi]$
ولكن $٢س \in [٠ ، ٤\pi]$

إما $٢س = \frac{\pi}{٢}$ أو $٢س = \frac{٣\pi}{٢}$

$س = \frac{\pi}{٤} \in [٠ ، ٢\pi[$ $\quad$ $س = \frac{٣\pi}{٤} \in [٠ ، ٢\pi[$ .

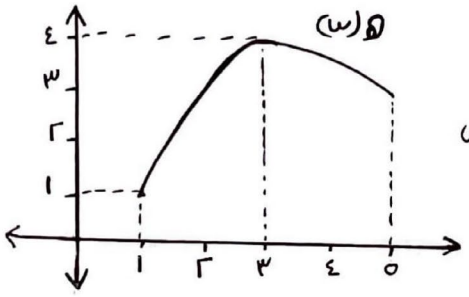
$\therefore$ $قـ(\pi) = ٣$ ، $قـ(٠) = ٣$ .

| إشارة قـ | + + + | − − − | + + + + |
|---|---|---|---|
| قيم س الحرجة | ٠ | $\frac{\pi}{٤}$ | $\frac{٣\pi}{٤}$ $\quad$ $\pi$ |

من إشارة قـ(س) :

* قـ(س) متزايد على $[٠ ، \frac{\pi}{٤}] \cup [\frac{٣\pi}{٤} ، \pi]$
* قـ(س) متناقص على $[\frac{\pi}{٤} ، \frac{٣\pi}{٤}]$

---




• 2024 دور أول / الشكل المجاور يمثل منحنى هـ(س) المعرف على $[٠ ، ٥]$ فإذا كان قـ(س) = $(٥ - هـ(س))^{٣}$ وكان ل(س) = $(قـ \times هـ^{٢})(س)$ أثبت أن ل(س) متناقص في $]٠ ، ٣[$ .

الحل / من الرسمة :

هـ(س) متصل وصاعد على $]٠ ، ٣[$ .

هـ(س) متناقص في $[٣ ، ٥] \Leftarrow هـ(س) < ٤ \; ; \; \forall س \in ]٠ ، ٣[$

هـ(س) مقعر لأسفل في $]٠ ، ٣[ \Leftarrow هـ''(س) > ٠ \; ; \; \forall س \in ]٠ ، ٣[$ .

• قـ(س) = $(٥ - هـ(س))^{٣}$ متصل حاصل ولي تركيب اقترانين متصلين.

$قـ'(س) = ٣(٥ - هـ(س))^{٢} \times -هـ'(س)$

$قـ' = (+)(+)(-) = (-)$ (موجب) في $]٠ ، ٣[$ .

ل(س) = $(قـ \times هـ^{٢})(س)$ متصل حاصل ضرب اقترانين متصلين على $]٠ ، ٣[$ .

$ل'(س) = قـ(س) \times ٢هـ(س) هـ'(س) + هـ^{٢}(س) قـ'(س)$

$=$ (موجب)(سالب) + (سالب)(موجب)

$=$ (سالب) + (سالب) = سالب على $]٠ ، ٣[$ .

أ.ميّ حوّاري

بما أن $ل'(س) < ٠$ على $]٠ ، ٣[ \Leftarrow$ ل(س) متناقص على $]٠ ، ٣[$ #

• لاحظ / $١ \leq هـ(س) \leq ٤$ من الرسمة × بالضرب في سالب "لا تنسَ قلب المتباينة"

$-٤ \leq -هـ(س) \leq -١$ بإضافة ٥ للطرفين

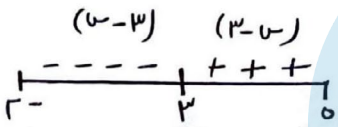
$١ \leq ٥ - هـ(س) \leq ٤ \Leftarrow ١ \leq (٥ - هـ(س))^{٣} \leq ٦٤$ بتكعيب الطرفين

$\Leftarrow ١ \leq قـ(س) \leq ٦٤ \Leftarrow قـ(س) > ٠$ ∴

• 2024 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = س² |س − ٣| ، س ∈ [−٢ ، ٥] جد فترات التزايد والتناقص لـ ق(س) في نفس الفترة.

الحل/ ق(س) = س² |س − ٣| متصل على [−٢ ، ٥] حاصل ضرب اقترانين متصلين

لوح متصل على [−٢ ، ٥] ، قيمة مطلقة لـ متصل (لوح)




|س − ٣| = { ٣ − س ، −٢ ≤ س < ٣ ؛ س − ٣ ، ٣ ≤ س ≤ ٥ }

⇐ ق(س) = { س²(٣ − س) ، −٢ ≤ س < ٣ ؛ س²(س − ٣) ، ٣ ≤ س ≤ ٥ }

⇐ ق(س) = { ٣س² − س³ ، −٢ ≤ س < ٣ ؛ س³ − ٣س² ، ٣ ≤ س ≤ ٥ }

قَ(س) = { ٦س − ٣س² ، −٢ < س < ٣ ؛ ٣س² − ٦س ، ٣ < س < ٥ }

غ م ، س = {−٢ ، ٥ ، ٣}

أ.ميّ حوّاري

قَ(٣)⁺ = ٣(٩) − ٦(٣) = ٢٧ − ١٨ = ٩ / قَ(٣)⁻ = ٦(٣) − ٣(٩) = ١٨ − ٢٧ = −٩

⇐ قَ(٣)⁺ ≠ قَ(٣)⁻ ⇐ قَ(٣) غ م

* قَ(س) = ٠ ، عندما −٢ < س < ٣

٦س − ٣س² = ٠ ⇐ ٣س(٢ − س) = ٠

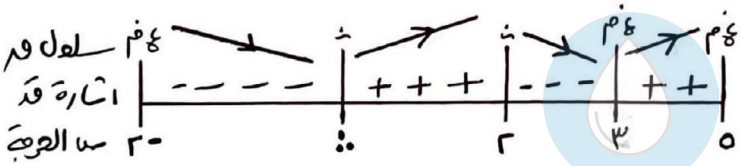
إما ٣س = ٠ ⇐ س = ٠ ∈ ]−٢ ، ٣[ أو ٢ − س = ٠ ⇐ س = ٢ ∈ ]−٢ ، ٣[

* قَ(س) = ٠ ، عندما ٣ < س < ٥

٣س² − ٦س = ٠ ⇐ ٣س(س − ٢) = ٠ ⇐ س = {٠ ، ٢} ∉ ]٣ ، ٥[ .

• من إشارة قَ(س):

• ق(س) متزايد على [٠ ، ٢] ∪ [٣ ، ٥]




• ق(س) متناقص على [−٢ ، ٠] ∪ [٢ ، ٣]

---

• 2024 دور ثالث/ إذا كان ق(س) = ٤ + س √(١٢ − س) ، س ≤ ١٢ جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى ق(س) على مجاله

الحل/ ق(س) = ٤ + س √(١٢ − س) متصل على ]−∞ ، ١٢] لأنه حاصل جمع وضرب اقترانات متصلة

لوح ، ما تحت الجذر ≥ ٠

قَ(س) = س × (−١) / (٢√(١٢ − س)) + √(١٢ − س) = (−س + ٢(١٢ − س)) / (٢√(١٢ − س)) = (−س + ٢٤ − ٢س) / (٢√(١٢ − س))

مع توحيد مقامات

⇐ قَ(س) = (٢٤ − ٣س) / (٢√(١٢ − س)) = ٠ ⇐ ٢٤ = ٣س ⇐ س = ٨ ∈ ]−∞ ، ١٢[

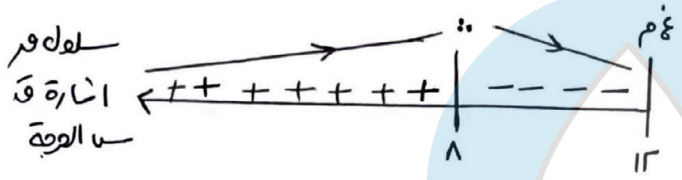
ق(س) غ م عند طرف الفترة ⇐ س = ١٢

وعند أصفار مقام ق ⇐ $\sqrt{١٢ - س}$ = ٠ ⇐ ١٢ − س = ٠ ⇐ س = ١٢ ∉ ]−∞، ١٢[

• من إشارة ق(س):

• ق(س) متزايد على ]−∞، ٨]

ق(س) متناقص على [٨، ١٢]




• 2025 دور ثاني / إذا كان ق(س) = س(س − ٣)² + ١ ، س ∈ ح حدد فترات تزايد وتناقص للاقتران ق(س)

الحل / ق(س) متصل على ح لأنه ك ح.

ق'(س) = س × ٢(س − ٣) + (س − ٣)² = ٠

⇐ ٢س² − ٦س + س² − ٦س + ٩ = ٠

(٣س² − ١٢س + ٩ = ٠) / ٣

س² − ٤س + ٣ = ٠

(س − ١)(س − ٣) = ٠

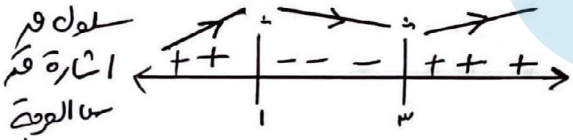
إما س − ١ = ٠ ⇐ س = ١ ، أو س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣.

أ.ميّ حوّاري

من إشارة ق'(س):

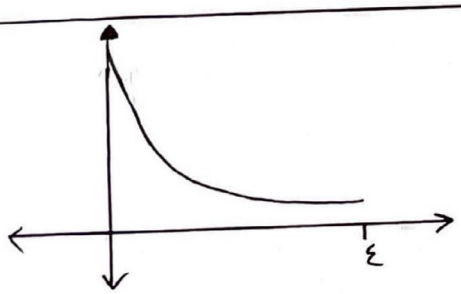
ق(س) متزايد في ]−∞، ١] ∪ [٣، ∞[

ق(س) متناقص في [١، ٣]



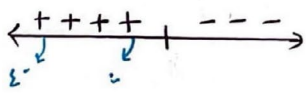

• 2024 الخليل / الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) المعرف على [٠، ٤] أثبت أن الاقتران

ك(س) = $\frac{ق(-س)}{٢ - ٢س}$ متزايد على [−٤، ٠]




الحل / * ٢ − ٢س = ٠ ⇐ ٢ = ٢س

⇐ س = ١



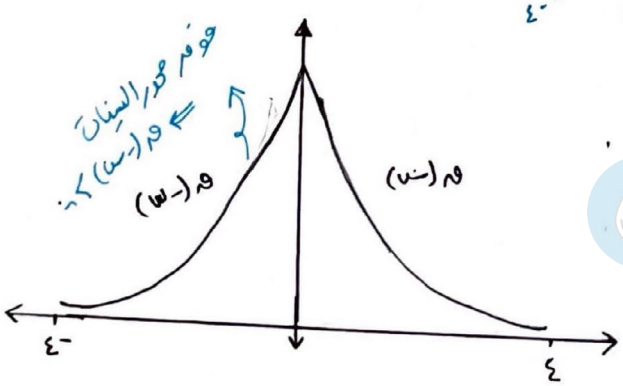

(٢ − ٢س) > ٠ في [−٤، ٠]

* ق(−س) انعكاس لـ ق(س) في محور الصادات.

من الرسمة / (ق(−س)) متزايد في [−٤، ٠]

⇐ ق'(−س) × −١ > ٠ في ]−٤، ٠[

* ك(س) متصل لأنه حاصل قسمة متصلين والمقام ≠ ٠ في [−٤، ٠]



$$ق'(س) = \frac{(٢-٣س)\,ق(-س)\times(-١) - ق(-س)\times(-٣)}{(٢-٣س)^{٢}} = \frac{(صوجب)(صوجب) + ٣(صوجب)}{(صوجب)}$$

$$= \frac{صوجب}{صوجب} = صوجب$$

بما أن $ق'(س) > ٠$ في $]-٤, ٦[ \Rightarrow ق(س)$ متزايدة في $[-٤, ٦]$ #

---

• أردنيا 2025/ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س} + س - \frac{١}{٣} & ؛ \text{إذا } س \le ٣ \\ \frac{أ}{(س+٥)^{٣}} & ؛ \text{إذا } ٣ < س < ٦ \end{cases}$ ؛ حيث أ ثابت فترات التزايد والتناقص لمنحنى $ق(س)$ على $[١, ٦]$

الحل/ • نبحث في اتصال $ق(س)$:

• عندما $س < ٣$ ؛ $ق(س) = \frac{٤}{س} + (س - \frac{١}{٣})$ متصل لأنه حاصل جمع اقترانات متصلة

المقام $\neq ٠$ ∴ $س \neq ٠$ ، $س \neq ٠$ تقع في $]-\infty, ٣[$ متصل.

$\Rightarrow ق(س) = \frac{-٤}{س^{٢}} + ١$

• عندما $٣ < س < ٦$ ؛ $ق(س) = \frac{أ}{(س+٥)^{٣}}$ متصل و $ق(س) = \frac{-٣}{(س+٥)^{٤}}$

• عندما $(س = ٣)$ نقطة تحول.

$$\lim_{س \to ٣^{+}} ق(س) = \frac{أ}{(٣+٥)^{٣}} = \frac{أ}{٨^{٣}} = \frac{أ}{٥١٢}$$

$$\lim_{س \to ٣^{-}} (\frac{٤}{س} + س - \frac{١}{٣}) = \frac{٤}{٣} + ٣ - \frac{١}{٣} = \frac{٣}{٣} + ٣ = ٤$$

$ق(س)$ متصل عند $(س = ٣)$ $\Leftarrow ق(٣) = ٤ = \frac{أ}{٥١٢}$

$\Rightarrow أ = ٢٠٤٨$

$$\Rightarrow ق(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{س^{٢}} + ١ & ؛ \text{إذا } س \le ٣ \\ \frac{-٣}{(س+٥)^{٤}} & ؛ \text{إذا } ٣ < س < ٦ \end{cases}$$

ق غ م على $\{١, ٣, ٦\}$

$ق(٣) = ق(٣)^{+} = ق(٣)^{-}$ $\Leftarrow$ ق غ ق عند $س = ٣$

$(\frac{٥}{٩} \neq \frac{١}{٣})$

• $ق(١) \neq ق(٦)$ غ م ∴ متباينة.

أ.مي حوّاري

* $ق'(س) = ٠$ ؛ عندما $١ < س < ٣$

$\frac{-٤}{س^{٢}} + ١ = ٠ \Leftarrow \frac{٤}{س^{٢}} = ١ \Leftarrow س^{٢} = ٤ \Leftarrow س = ٢ \in ]١, ٣[$ أو $س = -٢ \notin ]١, ٣[$

* $ق'(س) = ٠$ ؛ عندما $٣ < س < ٦$

$\frac{-٣}{(س+٥)^{٤}} \neq ٠$ ∴

| | غ م | | ٠ | | غ م | | غ م |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $ق'$ | | − − − | | + + + | | + + + | |
| سلوك $ق$ | ↘ | | ↗ | | ↗ | | |
| | ١ | | ٢ | | ٣ | | ٦ |

هذا إشارة $ق'(س)$:

• $ق(س)$ متناقص في $[١, ٢]$ و $ق(س)$ متزايد في $[٢, ٦]$

• خارجي/ الاقترانان ق(س)، هـ(س) كثيري حدود معرفان على [١، ٦] ويقع منحنى كل منهما في الربع الأول، إذا كان ق(س) متزايد في مجاله، و هـ(س) متناقصًا في مجاله، هـ(س) ≠ ٠ :
أثبت أن $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$(س) متزايد في [١، ٦]

الحل/ * ق، هـ لـ ح معرفان على [١، ٦] ⇐ ق، هـ متصلان على [١، ٦] وقابلان للاشتقاق على ]١، ٦[

* ق، هـ يقعان في الربع الأول، ق(س) > ٠ و هـ(س) > ٠ في [١، ٦]

* ق(س) متزايد ⇐ قَ(س) > ٠ في ]١، ٦[

* هـ(س) متناقص ⇐ هَ(س) < ٠ في ]١، ٦[

نفرض ل(س) = $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$(س) متصل على [١، ٦] لأنه حاصل قسمة متصلين، هـ(س) ≠ ٠ :

$$لَ(س) = \frac{هـ(س)\,قَ(س) - ق(س)\,هَ(س)}{هـ^2(س)} = \frac{(موجب)(موجب) - (موجب)(سالب)}{موجب}$$

$$= \frac{(موجب) + (موجب)}{موجب} = موجب$$

بما أن لَ(س) > ٠ في ]١، ٦[ ⇐ ل(س) متزايد في [١، ٦] #

---

• خارجي/ إذا كان ق(س) = |س − ١| (س + ٢) أوجد مجالات التزايد والتناقص لـ ق(س)

الحل/ ق(س) = |س − ١| (س + ٢) متصل على ح لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين.

قيمة مطلقة بداخله لـ ح متصل. لـ ح متصل على ح

$$|س - ١| = \begin{cases} ١ - س ، & س < ١ \\ س - ١ ، & س \geq ١ \end{cases}$$

أ.ميّ حوّاري

$$ق(س) = (س + ٢)\,|س - ١| = \begin{cases} (١ - س)(س + ٢) ، & س < ١ \\ (س - ١)(س + ٢) ، & س \geq ١ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} -س^2 - س + ٢ ، & س < ١ \\ س^2 + س - ٢ ، & س \geq ١ \end{cases} \Leftarrow قَ(س) = \begin{cases} -٢س - ١ ، & س < ١ \\ ٢س + ١ ، & س > ١ \\ \text{غ م} ، & س = ١ \end{cases}$$

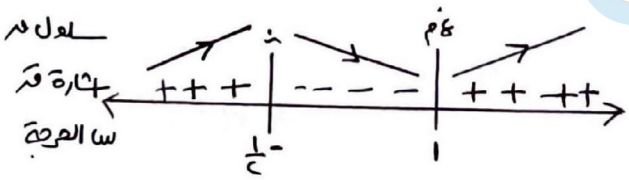
قَ(١)⁺ = ٢ + ١ = ٣
قَ(١)⁻ = −٢ − ١ = −٣
قَ(١)⁺ ≠ قَ(١)⁻

• قَ(س) = ٠ :

• عندما س < ١ / −٢س − ١ = ٠ ⇐ ٢س = −١ ⇐ س = $-\frac{١}{٢}$ ∈ ]−∞، ١[

• عندما س > ١ / ٢س + ١ = ٠ ⇐ ٢س = −١ ⇐ س = $-\frac{١}{٢}$ ∉ ]١، ∞[

من إشارة قَ(س) :




• ق(س) متزايد على ]−∞، $-\frac{١}{٢}$] ∪ [١، ∞[

ق(س) متناقص على [$-\frac{١}{٢}$، ١]

---

• خارجي/ إذا كان $ق(س) = \frac{س}{1+س^2}$ معرفاً على $[-1,1]$ جد مجالات التزايد والتناقص لـ $ق(س)$.

الحل/ $ق(س) = \frac{س}{1+س^2}$ متصل على $[-1,1]$ ، بنسبي والمقام $\neq 0$

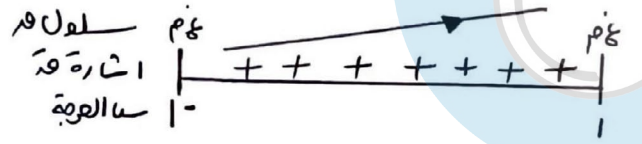
$$ق'(س) = \frac{(1+س^2) - س \times 2س}{(1+س^2)^2} = \frac{1+س^2-2س^2}{(س^2+1)^2} = \frac{1-س^2}{(س^2+1)^2} = 0$$

$\Leftarrow 1-س^2 = 0 \Leftarrow س^2 = 1 \Leftarrow س = 1 \in ]-1,1[$

• من إشارة $ق'(س)$ :

$ق(س)$ متزايد في $[-1,1]$

| سلول ق | غ م | | غ م |
|---|---|---|---|
| إشارة ق' | | + + + + + + + | |
| س الحرجة | -1 | | 1 |



---

• خارجي/ إذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ كثيري حدود معرفين على $[0,4]$ حيث أن منحنى $ق(س)$ متناقص في مجاله ويقع في الربع الرابع ، ومنحنى $هـ(س)$ متزايد في مجاله ويقع في الربع الأول ، أثبت أن $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$ متناقص في $[0,4]$

الحل/ $ق$ ، $هـ$ كثيري حدود متصلين على $[0,4]$ وقابلين للاشتقاق على $]0,4[$ .

* منحنى $ق(س)$ : $ق(س)$ متناقص $\Leftarrow ق'(س) < 0$ في $]0,4[$

$ق(س)$ يقع في الربع الرابع $\Leftarrow ق(س) < 0$ في $[0,4]$ .

* منحنى $هـ(س)$ : $هـ(س)$ متزايد $\Leftarrow هـ'(س) > 0$ في $]0,4[$

$هـ(س)$ يقع في الربع الأول $\Leftarrow هـ(س) > 0$ في $[0,4]$

* $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$ متصل على $[0,4]$ حاصل ضرب متصلين .

$ل'(س) = ق(س)\, هـ'(س) + هـ(س)\, ق'(س)$

$= (\text{سالب})(\text{موجب}) + (\text{موجب})(\text{سالب})$

$= \text{سالب} + \text{سالب} = \text{سالب}$

بما أن $ل'(س) < 0$ في $]0,4[$ إذن $ل(س)$ متناقص في $[0,4]$ #

---

• خارجي/ إذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ كثيرا حدود معرفان على $ح$ ومتزايدين ، $ق(س) < 0$ ، $\forall س \in ح$ بين أن الاقتران $ل(س) = ((ق \circ هـ)(س))^2$ متناقص على $ح$ .

الحل/ $ق$ ، $هـ$ كثيرا حدود متصلين وقابلين للاشتقاق على $ح$ .

$ق$ ، $هـ$ متزايدين $\Leftarrow ق' > 0$ ، $هـ'(س) > 0$ على $ح$ .

$ل(س) = ((ق \circ هـ)(س))^2$ متصل على $ح$ ، حاصل تركيب اقترانات متصلة .

$ل'(س) = 2\,(ق(هـ(س)))\, ق'(هـ(س))\, هـ'(س)$

$= (\text{سالب})(\text{موجب})(\text{موجب}) = \text{سالب}$

بما أن $ل'(س) < 0$ على $ح \Leftarrow ل(س)$ متناقص على $ح$ #

أ.ميّ حوّاري

---

# الدرس الثاني | القيم القصوى للاقتران

## • القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2007 / الاقتران $ق(س) = 5 - 2س^2$ قيمة عظمى في الفترة $[-3, 6]$ عندما $س =$

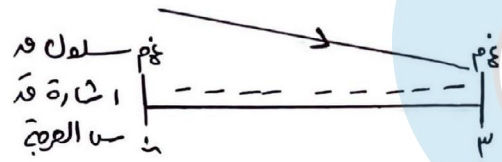
أ/ صفر ب/ $\frac{3}{4}$ ج/ 3 د/ 1

الحل / $ق(س) = 5 - 2س^2$ كثير حدود متصل على $[-3, 6]$

$ق'(س) = -4س = 0 \Leftarrow س = 0 \in [-3, 6]$

$ق(س)$ يغير عند أطراف الفترة $س = \{-3, 6\}$

من إشارة $ق'(س)$




يوجد قيمة عظمى مطلقة عندما $(س = -3)$

---

• 2008 الكمال / إذا كان للاقتران $ق(س)$ قيمة صغرى محلية عند $(س = جـ)$ فأيٌ إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً :

أ/ $ق(جـ) < 0$ ب/ $ق'(جـ) = 0$ ج/ $ق'(جـ) > 0$ د/ $(جـ، ق(جـ))$ نقطة حرجة لـ $ق(س)$

ليس شرطاً : صحيح دائماً ليس شرطاً ليس حرجاً متزايد إذا يغير

الحل / يوجد قيمة صغرى محلية لـ $ق(س)$ عند $(س = جـ) \Leftarrow (جـ، ق(جـ))$ نقطة حرجة لـ $ق(س)$

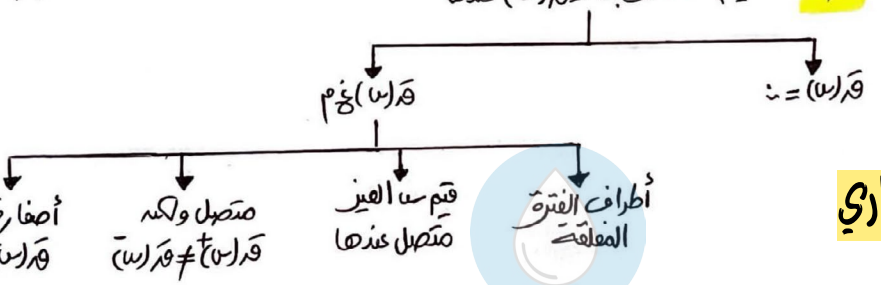
$\Leftarrow ق'(جـ) = 0$ أو $ق'(جـ)$ غير موجود

---

• 2009 / إذا كان $ق(س)$ اقتران مستمر على $[-6, 6]$ وكان $ق'(س) = (س-2)(س+1)$ فأيٌ مجموعة جميع قيم $س$ التي يوجد عندها قيم حرجة لـ $ق(س)$ هي :

أ/ $[-6, 6]$ ب/ $\{-1, 2\}$ ج/ $\{-1, 2, 6\}$ د/ $\{-6, 6\}$

الحل / قيم $س$ الحرجة لـ $ق(س)$ عندما




أ.مي حوّاري

وعليه / $ق'(-1)$ يغير و $ق'(2)$ يغير $\Leftarrow$ أطراف فترة .

$ق'(س) = (س-2)(س+1) = 0$

إما $(س-2) = 0 \Leftarrow س = 2 \in [-6, 6]$ أو $س+1 = 0 \Leftarrow س = -1 \notin [-6, 6]$

قيم $س$ الحرجة $= \{-6, -1, 2\}$ .

---

• 2009 / إذا كان $ق(س)$ متصل على $[-1, 5]$ وكانت $ق(س) > 0$ لجميع قيم $س \in [-1, 5]$ فأيٌ إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً .

أ/ لا يوجد للاقتران $ق(س)$ نقطة انعطاف في الفترة $[-1, 5]$

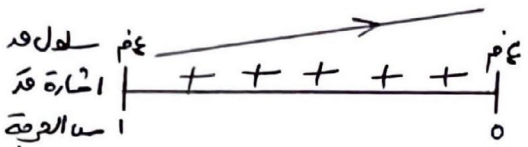
ب/ للاقتران $ق(س)$ قيمة عظمى عند $(س = 0)$

ج/ الاقتران $ق(س)$ متزايد على $[-1, 5]$

د/ للاقتران $ق(س)$ قيمة عظمى عند $(س = -1)$

الحل/ ق(١) غ م ، ق(٥) غ م أطراف فترة

ق(س) > ٠ ، ∀س ∈ ]١،٥[




• عند (س = ١) يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة

• عند (س = ٥) يوجد قيمة عظمى مطلقة لأنها وحيدة.

---

• 2009 إكمال/ إذا كان ق(س) معرفاً على [٠،٤] وكانت ق(س) = $\frac{س+٢}{س+١}$ فإن مجموعة الاحداثيات السينية للنقاط الحرجة هي:

أ/ {-٢، -١، ٠، ٤}  ب/ {-٢، -١}  ج/ {٠، ٤}  د/ {-٢}

الحل/ ق(٠) غ م ، ق(٤) غ م أطراف فترة.

* أصفار مقام ق(س): س + ١ = ٠ ⟸ س = -١ ∉ ]٠، ٤[ .

* ق(س) = ٠ ⟸ $\frac{س+٢}{س+١}$ = ٠ ⟸ س + ٢ = ٠ ⟸ س = -٢ ∉ ]٠، ٤[ .

أ.ميّ حوّاري

الاحداثيات السينية للنقط الحرجة = {٠، ٤} .

---

• 2009 إكمال/ إذا كان ق(س) = ٢س$^{٣}$ - أس$^{٢}$ وكان لمنحنى ق قيمة قصوى محلية عند (س = ١) ما قيمة الثابت أ

أ/ ٢  ب/ -٣  ج/ ٣  د/ -٢

الحل/ بما أن ق(س) لـ ح مشتقة و عند (س = ١) يوجد قيمة قصوى محلية

⟸ ق(١) = ٠ ⟸ ق(س) = ٦س$^{٢}$ - ٢أس

ق(١) = ٦ - ٢أ = ٠ ⟸ ٦ = ٢أ ⟸ ٣ = أ

---

• 2013/ إذا كان ق(س) = [٢س - ٤] ، س ∈ [٠، ٢] فإن جميع قيم س التي تكون عندها نقط حرجة للاقتران ق(س)

أ/ ٠، ٢  ب/ [٠، ٢]  ج/ ]٠، ٢[  د/ ٠، ١، ٢

الحل/ • إذا كان ق(س) = [أس + ب] ، س ∈ [س١، س٢] فإن قيم س التي تكون عندها نقط حرجة هي س ∈ [س١، س٢] ، لأنه كما تعلمنا في الوحدة الأولى

ق(س) = ٠ أو غ م ، ∀س ∈ [أس + ب]

وعليه قيم س التي عندها نقط حرجة = [٠، ٢] .

---

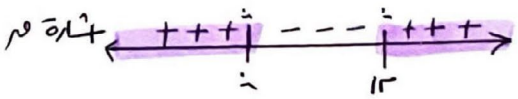
• 2016/ إن مجموعة قيم س التي تكون للاقتران ق(س) = $\sqrt{س^{٢} - ١٢س}$ نقطاً حرجة هي:

أ/ {٠، ١٢}  ب/ {٠، ٦، ١٢}  ج/ {٦}  د/ {٦، ١٢}

الحل/ أولاً: نحدد مجال ق(س) / ما تحت الجذر ≥ ٠

س$^{٢}$ - ١٢س = ٠ ⟸ س(س - ١٢) = ٠

إما س = ٠ أو س - ١٢ = ٠ ⟸ س = ١٢




⟸ مجال ق(س): س ∈ ]-∞، ٠] ∪ [١٢، ∞[ .

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{2\text{س} - 12}{2\sqrt{\text{س}^2 - 12\text{س}}} = 0 \Leftarrow 2\text{س} - 12 = 0 \Leftarrow 2\text{س} = 12 \Leftarrow \text{س} = 6 \notin$ للمجال $\text{ق}'$

$\text{ق}'(\text{س})$ غ م ← أطراف الفترة $\text{س} = 0 ، 12$

أصفار مقام $\text{ق}' = \{0 ، 12\} \notin ]-\infty ، 0[ \cup ]12 ، \infty[$ .

$\Leftarrow$ س الحرجة $= \{0 ، 12\}$ .

---

• 2016 إكمال/ ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{4 - \text{س}^2}$ ، $\text{س} \in [-2 ، 2]$ فإن قيمة س التي يكون عندها للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ قيمة عظمى مطلقة:

أ/ $-2$ ب/ $0$ ج/ $1$ د/ $2$

الحل/ $\text{ق}'(\text{س})$ غ م $\Leftarrow$ أطراف الفترة $\text{س} = \{-2 ، 2\}$ .

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-\cancel{2}\text{س}}{\cancel{2}\sqrt{4 - \text{س}^2}} = 0 \Leftarrow -\text{س} = 0 \Leftarrow \text{س} = 0 \in ]-2 ، 2[$

* أصفار مقام $\text{ق}'(\text{س}) = \text{س} = \{-2 ، 2\} \notin ]-2 ، 2[$

س الحرجة $= \{-2 ، 0 ، 2\}$

$\text{ق}(0) = \sqrt{4} = 2$ عظمى مطلقة

$\text{ق}(2) = \sqrt{4 - 4} = 0$

$\text{ق}(-2) = \sqrt{4 - 4} = 0$

$\Leftarrow$ عند $(\text{س} = 0)$ يوجد قيمة عظمى مطلقة لـ $\text{ق}(\text{س})$.

أ.ميّ حوّاري

---

• 2016 إكمال/ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 - \text{س} ، & 0 \le \text{س} \le 1 \\ \text{س} - 1 ، & 1 < \text{س} \le 3 \end{cases}$ فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ نقطاً حرجة في $[0 ، 3]$

أ/ $\{0 ، 3 ، 1\}$ ب/ $\{0 ، 3\}$ ج/ $\{0 ، 3 ، \frac{1}{2}\}$ د/ $\{1 ، 0 ، 3 ، \frac{1}{2}\}$

الحل/ $\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} - 1 ، & 0 < \text{س} \le 1 \\ 1 ، & 1 < \text{س} < 3 \\ \text{غ م} ، & \text{س} = \{0 ، 3\} \end{cases}$

• عند $(\text{س} = 1)$ نبحث في الاتصال:

$\lim_{\text{س} \to 1^+} (\text{س} - 1) = 1 - 1 = 0$ / $\lim_{\text{س} \to 1^-} (\text{س}^2 - \text{س}) = \text{ق}(1) = 1 - 1 = 0$

$\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $(\text{س} = 1)$

$\text{ق}'(1)^+ = 1$ ، $\text{ق}'(1)^- = 2 - 1 = 1 \Leftarrow \text{ق}'(1)$ موجودة

* $\text{ق}'(\text{س}) = 0$

• عندما $0 < \text{س} \le 1 \Leftarrow 2\text{س} - 1 = 0 \Leftarrow 2\text{س} = 1 \Leftarrow \text{س} = \frac{1}{2} \in ]0 ، 1[$ ✓

• عندما $1 < \text{س} < 3$ ، $1 \neq 0$

س الحرجة $= \{0 ، 3 ، \frac{1}{2}\}$

• 2017/ ليكن ق(س) = $\sqrt{٦ - س^٢}$ ، س ∈ [-١، ١] فإن القيمة العظمى المطلقة :

أ/ ق(١) ب/ ق(٠) ج/ ق(-١) د/ ق(-٢)

الحل/ قَ(س) = $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٦-س^٢}}$ = ٠ ⇐ -س = ٠ ⇐ س = ٠ ∈ ]-١، ١[

* قَ(س) غ م ⟷ أطراف الفترة س = {-١، ١}
أصفار مقام قَ(س)

٦ - س² = ٠ ⇐ ٦ = س² ⇐ س = $\sqrt{٦}$ ، -$\sqrt{٦}$ ∉ ]-١، ١[

⇐ س الحرجة = {-١، ١، ٠}

ق(٠) = $\sqrt{٦}$ ⇐ ق(٠) عظمى مطلقة .

ق(١) = $\sqrt{٦-١}$ = $\sqrt{٥}$

ق(-١) = $\sqrt{٦-١}$ = $\sqrt{٥}$

أ.ميّ حوّاري

---

• 2017/ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س & ، -١ < س \le ١ \\ س^٢+١ & ، ١ < س \le ٢ \end{cases}$ ما عدد النقط الحرجة لـ ق(س)

أ/ ١ ب/ ٢ ج/ ٣ د/ ٤

الحل/ قَ(س) = $\begin{cases} ٢ & ، -١ < س \le ١ \\ ٢س & ، ١ < س < ٢ \\ \text{غ م} & ، س = \{٢\} \end{cases}$

نبحث بالاتصال عند س = ١ ⇐ نها$_{س \to ١^+}$ (س² + ١) = ١ + ١ = ٢

نها$_{س \to ١^-}$ (٢س) = ق(١) = ٢

= متصل عند (س = ١)

* قَ(١)$^+$ = ٢ × ١ = ٢ / قَ(١)$^-$ = ٢ ⇐ قَ(١) موجودة

* قَ(س) = ٠

• عندما -١ < س ≤ ١ ⇐ ٢ ≠ ٠

• عندما ١ < س < ٢ ⇐ ٢س = ٠ ⇐ س = ٠ ∉ ]١، ٢[

⇐ س الحرجة = {٢} ⇐ قيمة واحدة فقط

---

• 2017 دور ثاني/ إذا كان ق(س) معرفاً على [٠، ٤] وكانت قَ(س) = $\frac{س-٢}{س+١}$ فإن مجموعة الاحداثيات السينية للنقاط الحرجة هي :

أ/ {-١، ٠، ٢، ٤} ب/ {٠، ٢، ٤} ج/ {٠، ٤} د/ {٢}

الحل/ * قَ(س) غ م ⟵ أطراف الفترة س = {٠، ٤}
أصفار مقام قَ(س) ⇐ س + ١ = ٠ ⇐ س = -١ ∉ ]٠، ٤[

* قَ(س) = ٠ ⇐ $\frac{س-٢}{س+١}$ = ٠ ⇐ س - ٢ = ٠ ⇐ س = ٢ ∈ ]٠، ٤[

⇐ س الحرجة = {٠، ٤، ٢} .

• 2017 دور ثاني/ إذا كان $ق(س) = س + \frac{1}{س}$ ، $س \neq 0$ فإن العبارة الصحيحة فيما يأتي

أ/ ق(س) متزايد على $]-\infty ، 0[$

ب/ ق(1) هي القيمة العظمى المطلقة لـ ق(س)

ج/ ق(س) متزايد على $[1 ، \infty[$

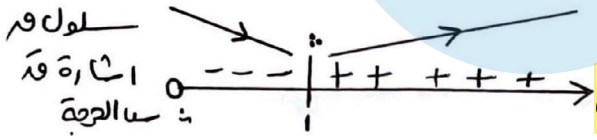
د/ ق(1) هي القيمة الصغرى المطلقة لـ ق(س)

الحل/ $ق'(س) = 1 - \frac{1}{س^2} = 0 \Leftarrow \frac{1}{س^2} = 1 \Leftarrow س^2 = 1$

$\exists س = 1 \in ]-\infty ، 0[$

$س = -1 \notin ]-\infty ، 0[$

* أصفار مقام $ق'(س)$ / $س^2 = 0 \Leftarrow س = 0 \notin ]-\infty ، 0[$




ق(1) قيمة صغرى مطلقة لأنها وحيدة

أ.مي حوّاري

---

• 2019 دور أول/ إذا كان ق(س) معرفاً في $[-1 ، 1]$ وكان ق(1) = 2 ، $\lim_{س \to -1} ق(س) = 1$

ما العبارة الصحيحة فيما يأتي:

أ/ ق(1) قيمة صغرى محلية

ب/ ق(1) قيمة عظمى محلية

ج/ ق(1) قيمة صغرى مطلقة

د/ ق(1) = ∞

الحل/ $\lim_{س \to 1} ق(س) \neq ق(1) \Leftarrow$ ق(س) غير متصل عند $(س = 1)$ ، يفضل اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى.

نلجأ لمقارنة الصورة بالنهاية

$\lim_{س \to 1} ق(س) > ق(1) \Leftarrow$ ق(1) عظمى محلية.

---

• 2019 دور أول/ إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الرابعة، وما أكبر عدد ممكن من نقاط الحرجة لـ ق(س)

أ/ 5 ب/ 2 ج/ 3 د/ 4

الحل/ ق(س) من الدرجة الثالثة $\Leftarrow$ أكبر عدد ممكن لحل المعادلة $ق'(س) = 0$ (3 حلول)

$\Leftarrow$ 3 نقاط حرجة "العدد الأكبر"

---

• 2020 دور أول/ إذا كان $ق(س) = س^4 - 32س$ ، وما عدد القيم الحرجة لـ ق(س) على مجاله

أ/ 4 ب/ 1 ج/ 3 د/ 4

الحل/ مجال ق(س): ما داخل اللوغاريتم $> 0 \Leftarrow س > 0$

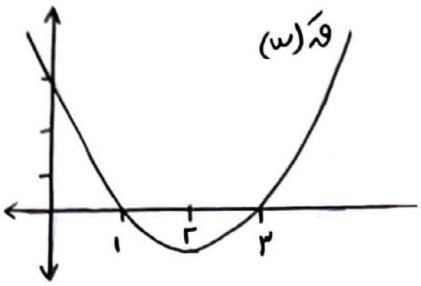
$ق(س) = س^4 - 32س$ متصل على $]0 ، \infty[$ لأنه حاصل طرح اقترانين متصلين

$ق'(س) = 4س^3 - \frac{32}{س^2} = 0 \Leftarrow 4س^3 = \frac{32}{س^2} \Leftarrow س^4 = 8 \Leftarrow س = 2$

$س = -2 \notin$ المجال

• أصفار مقام $ق'(س) \Leftarrow س = 0 \notin ]-\infty ، 0[$

قيم س الحرجة $= \{2\} \Leftarrow$ عددها $= 1$




• 2020 دور أول / ما قيمة / قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية :

أ/ ١ ب/ ٢ ج/ ٣ د/ ١، ٣

الحل / من الرسمة :

ق'(س) يقع فوق محور السينات في ]-∞، ١[ ∪ ]٣، ∞[

⇐ ق'(س) > ٠ في نفس الفترة.

ق'(س) يقع تحت محور السينات في ]١، ٣[ ⇐ ق'(س) < ٠ في نفس الفترة

سلول ق

اشارة ق'

س الحرجة

+++ | --- | +++

١ ٣

أ.ميّ حوّاري

• من اشارة ق'(س) / • عند (س = ٣) يوجد قيمة صغرى محلية لـ ق(س).

---

• 2020 دور ثاني / إذا كان ق(س) = س هـ^س ، ما قيمة / قيم س الحرجة لمنحنى ق'(س)

أ/ -٢ ب/ -١ ج/ ٠، -١ د/ ٠، -٢

الحل / قيم س الحرجة لـ ق'(س) ⇐ ق''(س) = ٠ أو ق''(س) غ م

ق(س) = س هـ^س متصل وقابل للاشتقاق على ح ، حاصل ضرب متصلين (لـ ح × هـ^س)

ق'(س) = س هـ^س + هـ^س

ق''(س) = س هـ^س + هـ^س + هـ^س = س هـ^س + ٢ هـ^س = ٠ "اخراج هـ^س عامل مشترك"

هـ^س (س + ٢) = ٠

هـ^س ≠ ٠ أو س + ٢ = ٠ ⇐ س = -٢ ∈ ح

---

• 2020 دور ثاني / ليكن ق'(س) = ٦(س+١)(س-٢)^٢ ، فإن لمنحنى ق(س) قيمة

أ/ عظمى محلية عند (س = -١) ب/ صغرى محلية عند (س = -١)

ج/ عظمى محلية عند (س = ٢) د/ صغرى محلية عند (س = ٢)

الحل / ق'(س) = ٦(س+١)(س-٢)^٢

٠ = ٦(س+١)(س-٢)^٢

إما س + ١ = ٠ ⇐ س = -١ أو (س-٢) = ٠ ⇐ س = ٢

من اشارة ق'(س) /

سلول ق(س)

اشارة ق'(س)

--- | +++ | +++

١- ٢

يوجد قيمة صغرى محلية عند (س = -١) لـ ق(س)

ولا يوجد قيم قصوى عند (س = ٢)

---

• 2020 دور ثالث / إذا كان لمنحنى ق(س) = ٢س^٣ + أ س^٢ قيمة صغرى محلية عندما س = ١

ما قيمة الثابت أ

أ/ -٣ ب/ -٢ ج/ ٣ د/ ٢

الحل / عند (س = ١) يوجد قيمة صغرى محلية ⇐ اذن هي حرجة وبما أن ق(س) قابل للاشتقاق

⇐ ق'(١) = ٠

$\text{ق}'(\text{س}) = ٦\text{س}^٢ + ٢\text{أ}\text{س} \Leftarrow \text{ق}'(١) = ٦(١)^٢ + ٢\text{أ}(١) \Leftarrow ٠ = ٦ + ٢\text{أ} \Leftarrow -\frac{٦}{٢} = \frac{٢\text{أ}}{٢}$

$\Leftarrow -٣ = \text{أ}$

---

• 2021 دور ثاني / إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ ، ماذا يكون الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ :

أ/ قيمة عظمى محلية عند $(\text{س}=١)$ ب/ قيمة صغرى محلية عند $(\text{س}=١)$

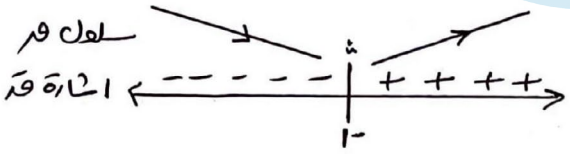
جـ/ قيمة عظمى محلية عند $(\text{س}=-١)$ د/ قيمة صغرى محلية عند $(\text{س}=-١)$

الحل/ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ متصل ومشتق على ح لأنه حاصل ضرب متصلين (لـ ح و $\text{هـ}^{\text{س}}$)

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} = ٠$

$\text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}+١) = ٠$

إما $\text{هـ}^{\text{س}} = ٠$ لا يمكن ، $\text{هـ}^{\text{س}} > ٠$ دائماً أو $\text{س}+١ = ٠ \Leftarrow \text{س} = -١$




من اشارة $\text{ق}'(\text{س})$ يوجد قيم قصوى (صغرى محلية) عند $(\text{س}=-١)$ وهي وحيدة فهي مطلقة .

---

• 2021 دور ثالث / إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٤\text{س}+\text{س}^٢}$ ، فإن قيمة / قيم س التي يكون عندها للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ نقطاً حرجة هي :

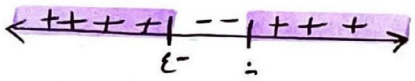
أ/ $-٢$ ب/ $٠$ ، $-٤$ جـ/ $-٢$ ، $-٤$ د/ $٠$ ، $-٢$ ، $-٤$

الحل/ أولاً : نحدد مجال $\text{ق}(\text{س})$ : ما تحت الجذر $\geq ٠$

$٤\text{س}+\text{س}^٢ \geq ٠$

$٤\text{س}+\text{س}^٢ = ٠ \Leftarrow \text{س}(٤+\text{س}) = ٠$

إما صفر $= \text{س}$ أو $\text{س}+٤ = ٠ \Leftarrow \text{س} = -٤$




$\Leftarrow$ مجال $\text{ق}(\text{س})$ : $\forall \text{س} \in ]-\infty, -٤] \cup [٠, \infty[$

$\text{ق}'(\text{س})$ غ م $\Leftarrow$ عند $\text{س} = -٤$ ، $\text{س} = ٠ \Leftarrow$ أطراف فترة

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٤+٢\text{س}}{٢\sqrt{٤\text{س}+\text{س}^٢}} = ٠ \Leftarrow ٤+٢\text{س} = ٠ \Leftarrow -٤ = ٢\text{س} \Leftarrow \text{س} = -٢ \notin$ للمجال ق'

• لاحظ أصفار مقام $\text{ق}'(\text{س})$ نفسها أطراف الفترة .

$\Leftarrow$ قيم س الحرجة $= \{٠, -٤\}$

أ.ميّ حوّاري

---

• 2022 دور أول / إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{-\text{جاس}}$ معرفاً في $[٠, \pi]$ ، ما القيمة الصغرى المطلقة للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ :

أ/ $-\text{هـ}$ ب/ $-١$ جـ/ $\frac{١}{\text{هـ}}$ د/ $١$

الحل/ $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{-\text{جاس}}$ متصل على $[٠, \pi]$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{-\text{جاس}} \times -\text{جتاس} = ٠$

إما $\text{هـ}^{-\text{جاس}} \neq ٠$ أو $\text{جتاس} = ٠ \Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٢} \in ]٠, \pi[$

موجب دائماً

أ.مي حوّاري

قـ(س) يُهم كند س = ن ، ٣ أطراف الفترة .

قـ(ن) = $\frac{\text{حا}(ن)}{\text{ه}^{ن}}$ = $\frac{\text{حا}\,ن}{\text{ه}^{ن}}$ = ه^{-ن} = ١

قـ(٣) = $\frac{\text{حا}(٣)}{\text{ه}^{٣}}$ = ه^{-٣} = ١

قـ($\frac{\pi}{٢}$) = $\frac{\text{حا}\frac{\pi}{٢}}{\text{ه}^{\frac{\pi}{٢}}}$ = ه^{-$\frac{\pi}{٢}$} = $\frac{١}{\text{ه}^{\frac{\pi}{٢}}}$ قيمة صغرى مطلقة

---

• 2022 دور أول/ إذا كان قـ(س) = $\frac{١}{س^{٤}+س+٣}$ معرفًا في [٠، ٣] ، ما عدد نقاط الرجحة للاقتران قـ(س)

ب/ نقطة واحدة — ج/ ثلاث نقاط — د/ أربع نقاط

الحل/ قـ(س) يُهم كند (س = ١) طرف فترة

قـ(س) = $\frac{-(٤س^{٣}+١)}{٢(س^{٤}+س+٣)}$ = ن ⇐ -(٤س^٣ + ١) = ن ⇐ ٤س^٣ + ١ = -ن

٤س^٣ = -١ ⇐ س = $-\frac{١}{٤}$ ∉ ]٠، ٣[ ✗

لاحظ أن المقام ≠ ٠ ⇐ المميز = ب^٢ - ٤أ ج = ١ - ١٢ = -١١ < ٠

إذا هناك نقطة حرجة وحيدة عند (س = ١)

---

• 2023 دور أول/ ما مجموعة قيم س للنقاط الحرجة للاقتران قـ(س) = جا(٢س) - س ، س ∈ [٠، ٢π]

ب/ {$\frac{\pi}{٦}$، $\frac{\pi}{٢}$} — ج/ {٠، $\frac{\pi}{٢}$} — د/ {٠، $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{\pi}{٢}$، $\frac{٥\pi}{٦}$، π}

الحل/ قـ(س) = جا(٢س) - س متصل على [٠، $\frac{\pi}{٢}$]

قـ(س) = ٢ جتا(٢س) - ١

ن = ٢ جتا(٢س) - ١

١ = ٢ جتا(٢س)

$\frac{١}{٢}$ = جتا(٢س)

٢س = $\frac{\pi}{٣}$ ⇐ س = $\frac{\pi}{٦}$ ∈ ]٠، $\frac{\pi}{٢}$[ ، س ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$] ⇐ ٢س ∈ [٠، π]

* قـ(س) يُهم كند س = ٠ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ أطراف فترة ⇐ قيم س الحرجة = {٠، $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{\pi}{٢}$}

---

• 2023 دور أول/ إذا كان قـ(س) = ٢س^٣ - ٣س^٢ - ١٢س + ٢٧ ، س ∈ [-٢، ٢] ، ما القيمة العظمى المطلقة للاقتران قـ(س)

ب/ ٧ — ج/ ٠ — د/ -١

الحل/ قـ(س) = ٢س^٣ - ٣س^٢ - ١٢س + ٢٧ كثير حدود متصل على [-٢، ٢]

قـ(س) = ٦س^٢ - ٦س - ١٢

ن = $\frac{١}{٦}$(٦س^٢ - ٦س - ١٢) ⇐ ن = س^٢ - س - ٢ ⇐ ن = (س + ١)(س - ٢)

إما س + ١ = ن ⇐ س = -١ ∈ ]-٢، ٢[ ✓

أو س - ٢ = ن ⇐ س = ٢ ∉ ]-٢، ٢[ ✗

قـ(-١) = ٢(-١)^٣ - ٣(-١)^٢ - ١٢(-١) + ٢٧ = -٢ - ٣ + ١٢ + ٢٧ = ٣٤ عظمى مطلقة

قـ(٢) = ٢(٢)^٣ - ٣(٢)^٢ - ١٢(٢) + ٢٧ = ١٦ - ١٢ - ٢٤ + ٢٧ = ٧ صغرى مطلقة

قـ(-٢) = ٢(-٢)^٣ - ٣(-٢)^٢ - ١٢(-٢) + ٢٧ = -١٦ - ١٢ + ٢٤ + ٢٧ = ٢٣

• 2023 دور ثاني / إذا كان الاقتران $ق(س) = \sqrt{9 - س^2}$ و $س \in [-3, 3]$ ما قيمة $س$ التي يكون عندها للاقتران $ق(س)$ قيمة عظمى مطلقة

أ/ -3 ب/ صفر ج/ 1 د/ 3

الحل / $ق(س)$ متصل على $[-3, 3]$

$ق'(س) = \frac{-2س}{2\sqrt{9 - س^2}} = 0 \Leftarrow -2س = 0 \Leftarrow س = 0 \in ]-3, 3[$

$ق(س)$ يُهمل عند $س = -3, 3$ أطراف فترة

$ق(3) = \sqrt{9 - 3^2} = \sqrt{0} = 0$

$ق(-3) = \sqrt{9 - (-3)^2} = 0$

$ق(0) = \sqrt{9 - 0} = 3$ عظمى مطلقة $\Leftarrow (س = 0)$

أ.مي حوّاري

---

• 2024 دور أول / إذا كان $ق(س) = (س+1)^3 (2س-5)^4$ و $س \in [-1.6, 2.5]$ ما مجموعة قيم $س$ التي يكون عندها للاقتران $ق(س)$ نقط حرجة:

أ/ $\{-1.6, 2.5, 5\}$ ب/ $\{2.5, 5\}$ ج/ $\{-1.6, 2.5\}$ د/ $\{-1.6, 2.5, 5\}$

الحل / $ق(س) = (س+1)^3 (2س-5)^4$ و متصل على $[-1.6, 2.5]$

$ق'(س) = (س+1)^3 \times 4(2س-5)^3 \times 2 + (2س-5)^4 \times 3(س+1)^2$ (إخراج $(س+1)^2 (2س-5)^3$ عامل مشترك)

$= (س+1)^2 (2س-5)^3 \left(8(س+1) + 3(2س-5)\right)$

إما $(س+1)^2 = 0 \Leftarrow س+1 = 0 \Leftarrow س = -1 \notin ]-1.6, 2.5[$ ✗

أو $2س - 5 = 0 \Leftarrow 2س = 5 \Leftarrow س = \frac{5}{2} = 2.5 \in ]-1.6, 2.5[$ ✓

$8(س+1) + 3(2س-5) = 0$

$8س + 8 + 6س - 15 = 0 \Leftarrow 14س - 7 = 0 \Leftarrow 14س = 7 \Leftarrow س = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \in ]-1.6, 2.5[$ ✓

$ق(س)$ يُهمل عند $(س = -1.6)$ طرف فترة ✓

$\Leftarrow$ س الحرجة $= \{-1.6, 0.5, 2.5\}$

---

• 2024 دور ثاني / إذا كان $ق(س)$ متناقصاً على $ح$ ويقطع محور السينات عندما $س = 1$ ما العبارة الصحيحة فيما يلي:

أ/ $ق(1)$ صغرى محلية ب/ $ق(1)$ عظمى محلية ج/ $ق(1)$ صغرى محلية

د/ $ق(1)$ عظمى محلية .

الحل / $ق(س)$ متناقصاً على $ح \Leftarrow ق(س) > 0$ على $ح$

$ق(س)$ يقطع محور السينات عند $(س = 1) \Leftarrow (1, 0)$ تقع على $ق(س) \Leftarrow ق(1) = 0$

بما أن $ق(1) = 0$ و $ق(1) < 0 \Leftarrow (1, ق(1))$ عظمى محلية لـ $ق(س)$

باستخدام اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى .

---

• 2025 دور أول / ما أصغر قيمة للاقتران $ق(س) = س^3 - 3س$ و $س \in [-2, 3]$

أ/ صفر ب/ 1 ج/ -2 د/ 18

الحل/ ق(س) متصل على [٠، ٣] لأنه حاصل طرح اقترانات متصلة (هـ^س و ل2)

ق'(س) = هـ^س − هـ

٠ = هـ^س − هـ ⇐ هـ^١ = هـ^س ⇐ س = ١ ∈ ]٠، ٣[

ق'(س) غ م عند س = ٠ ، س = ٣

ق(٠) = هـ^٠ − هـ × ٠ = ١ − ٠ = ١

ق(٣) = هـ^٣ − ٣هـ

ق(١) = هـ − هـ = ٠ صغرى مطلقة ⇐ أصغر قيمة للاقتران = ٠

أ.ميّ حوّاري

---

• 2025 دور أول/ إذا كان ق'(س) = −س / √(٩ − س²) ، س ∈ ]−٣، ٣[ ، ما العبارة الصحيحة:

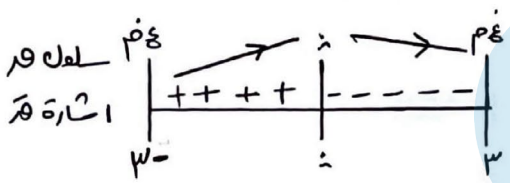
أ/ ق(٠) عظمى محلية
ب/ ق(س) متزايد في ]−٣، ٣[
ج/ ق(٠) قيمة صغرى مطلقة في ]−٣، ٣[
د/ ق(س) متناقص في ]−٣، ٣[

الحل/ ق'(س) = −س / √(٩ − س²) = ٠ ⇐ −س = ٠ ⇐ س = ٠ ∈ ]−٣، ٣[

من اشارة ق'(س):

ق(٠) عظمى محلية لـ ق(س).

| | غ م | | ٠ | | غ م |
|---|---|---|---|---|---|
| سلوك ق | | ↗ | | ↘ | |
| اشارة ق' | | + + + + | | − − − − − | |
| | −٣ | | ٠ | | ٣ |



---

• 2025 دور ثاني/ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية ، معرف على الفترة [أ، ب] ، ما أكبر عدد ممكن من النقاط الحرجة للاقتران ق(س)

أ/ ١ ب/ ٢ ج/ ٣ د/ ٤

الحل/ ق'(أ) غ م طرفية

ق(س) من الدرجة الثانية ⇐ ق'(س) من الدرجة الأولى ⇐ ق'(س) = ٠ عدد حلولها (١)

⇐ أكبر عدد ممكن للنقط الحرجة = ٢

لماذا قلنا أكبر عدد ولم نقل العدد الأكيد: لأنه عند حل ق'(س) = ٠ نحن لا نعلم إن كانت س الناتجة ∈ ]أ، ب[

---

• 2025 دور أول/ إذا كان ق(س) = جتاس + جأس ، س ∈ ]٠، π/٣[ ما قيمة س التي يكون عندها للاقتران ق(س) قيمة قصوى محلية

أ/ π/٢ ب/ π/٣ ج/ π/٤ د/ π/٦

الحل/ ق(س) = جتاس + جأس متصل لأنه جمع اقترانات متصلة على ]٠، π/٣[

ق'(س) = −جاس + ٢جاس جتاس

٠ = جاس(−١ + ٢جتاس)

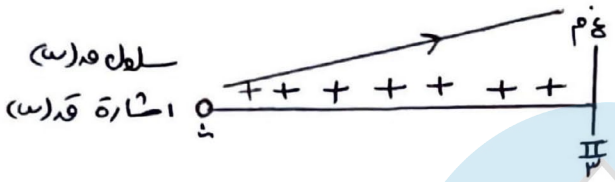
إما جاس = ٠ ⇐ س = ٠، π ∉ ]٠، π/٣[

أو −١ + ٢جتاس = ٠ ⇐ ٢جتاس = ١

جتاس = ١/٢ ⇐ س ∈ π/٣ ∉ ]٠، π/٣[

ق'($\frac{\pi}{3}$) غ م طرف فترة

من اشارة ق'(س) :
يكون للاقتران ق(س) قيمة عظمى
(قصوى) محلية عند س = $\frac{\pi}{3}$




---

• 2025 دور أول / اذا كان ق(س) = س² − ٢ لوهـ س ، س ∈ ]٠، ٥] ما مجموعة قيم س للنقاط الحرجة للاقتران ق(س)

أ/ {٠، ١، ٥}  ب/ {١، ٥}  ج/ {−١، ١، ٥}  د/ {٠، −١، ١، ٥}

الحل/ ق'(٥) غ م طرفية

ق'(س) = ٢س − $\frac{٢}{س}$ = ٠ ⇐ ٢س = $\frac{٢}{س}$ ⇐ $\frac{٢}{٢}$ س² = $\frac{٢}{٢}$ ⇐ $\sqrt{س^٢}$ = $\sqrt{١}$

لاحظ أصفار مقام ق ∉ ]٠، ٥]

⇐ س = ١ ∈ ]٠، ٥] أو س = −١ ∉ ]٠، ٥]

قيم س الحرجة = {١، ٥}

---

• 2025 دور ثاني / إذا كان ق(س) كثير حدود ، س ∈ [٢، ٦] ويقع منحناه في الربع الأول ومتناقصاً على مجاله ، وكان هـ(س) = ٨ − س ، وكان ك(س) = (هـ × ق)(س) معرفاً على [٢، ٦] ، أي العبارات التالية صحيحة .

أ/ ك(س) متناقصاً في [٢، ٦]  ب/ ك(س) له نقطة حرجة في [٢، ٦]

ج/ ك(س) متزايداً في [٢، ٦]  د/ ك(س) ثابت في [٢، ٦]

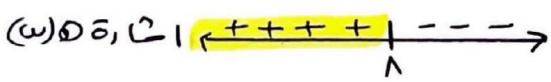
الحل/ * ق كثير حدود متصل على [٢، ٦] ومشتق على ]٢، ٦[

ق يقع في الربع الأول ⇐ ق(س) > ٠ في [٢، ٦]

ق(س) متناقصاً ⇐ ق'(س) < ٠ في ]٢، ٦[

* هـ(س) = ٨ − س لوح متصل وقابل للاشتقاق

٠ = ٨ − س ⇐ س = ٨




هـ(س) > ٠ في [٢، ٦]

هـ'(س) = −١ < ٠ في ]٢، ٦[

* ك(س) = هـ(س) × ق(س) متصل على [٢، ٦] لأنه حاصل ضرب متصلين .

ك' = هـ ق' + ق هـ' على ]٢، ٦[

ك' = (موجب)(سالب) + (موجب)(سالب)

= سالب + سالب = سالب ⇐ بما أن ك' < ٠ في ]٢، ٦[ ⇐ ك(س) متناقصاً في [٢، ٦]

أ.ميّ حوّاري

---

• 2019 تجريبي القدس / ما أكبر قيمة للاقتران ق(س) = $\sqrt[٣]{٣س − ١}$ ، س ∈ [٠، ٣]

أ/ $\frac{١}{٣}$  ب/ ٢  ج/ ٠  د/ −١

الحل/ ق(س) متصل على [٠، ٣] ، جذر دليله فردي .

$ق(س) = (٣س-١)^{\frac{١}{٣}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{١}{\cancel{٣}}(٣س-١)^{-\frac{٢}{٣}} \times \cancel{٣} = \frac{١}{(٣س-١)^{\frac{٢}{٣}}} = ٠ \Leftarrow ١ \neq ٠$

ق'(س) غ م ← أطراف الفترة س = ٠ ، ٣

← أصفار مقام ق' ⇐ ٣س - ١ = ٠ ⇐ ٣س = ١ ⇐ س = $\frac{١}{٣}$ ∈ ]٠ ، ٣[

$ق(٠) = \sqrt[٣]{٣ \times ٠ - ١} = -١$ أصغر قيمة

$ق(٣) = \sqrt[٣]{٣ \times ٣ - ١} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$ أكبر قيمة ✓

$ق(\frac{١}{٣}) = \sqrt[٣]{٣ \times \frac{١}{٣} - ١} = \sqrt[٣]{٠} = ٠$

---

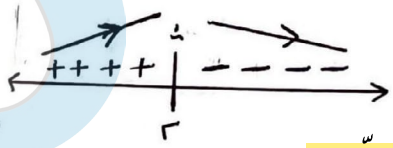
• 2019 رام الله والبيرة / إذا كان ق(س) قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٣) وكان الاقتران $هـ(س) = (١ - ق(س))^٣$ ، فإن للاقتران هـ(س)

أ/ قيمة صغرى محلية عند (٢ ، -٨)
ب/ قيمة عظمى محلية عند (٢ ، -٨)
ج/ قيمة صغرى محلية عند (٢ ، ٨)
د/ قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٨)

الحل/ يجب أن يُحدد السؤال أن ق(س) قابل للاشتقاق

للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٣) ← ق(٢) = ٣
← ق'(٢) = ٠ "ق قابل للاشتقاق"

سلوك ق
اشارة ق'




"بما أن ق(٢) عظمى محلية اذاً اذن ق' > ٠ عندما س < ٢ و ق' < ٠ عند س > ٢"

أ.ميّ حوّاري

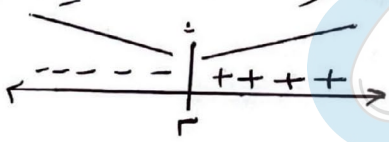
$هـ(س) = (١ - ق(س))^٣$ قابل للاشتقاق

لاحظ أن اشارة هـ'(س) عكس اشارة ق'(س)

$هـ'(س) = ٣(١ - ق(س))^٢ \times -ق'(س) = ٠$

إما ق'(س) = ٠ ⇐ عندما (س = ٢) أو $(١ - ق(س))^٢ = ٠$ لا يمكن تحديد قيمة س.

سلوك هـ(س)
اشارة هـ'(س)




• $هـ(٢) = (١ - ق(٢))^٣ = (١ - ٣)^٣$
$= (-٢)^٣ = -٨$

⇐ يوجد قيمة صغرى محلية عند (٢ ، -٨)

---

• 2019 رام الله والبيرة / إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ ، & -٢ \le س < ٢ \\ ١ ، & س = ٢ \end{cases}$ ، معرف على [-٢ ، ٢]

فإن إحدى العبارات الآتية صحيحة :

أ/ ق(-٢) عظمى محلية
ب/ ق(١) عظمى محلية
ج/ ق(٠) عظمى محلية
د/ ق(٢) عظمى محلية

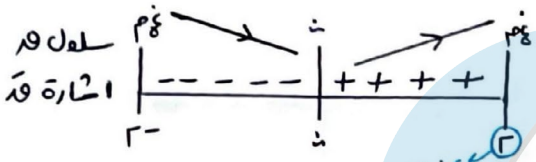
الحل/ ق(س) متصل على [-٢ ، ٢]

لاحظ عند (س = ٢) ⇐ $(\lim_{س \to ٢^-} س^٢ = ٢^٢ = ٤) \neq (ق(٢) = ١)$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٦س + ٣ & \\ ٤م & ، \ س = -٢ \end{cases}$$

$$ق' = ٠$$

$$\Leftarrow ٣س^{٢} - ٦س + ٣ = ٠ \Leftarrow س = ٠ \in ]-٢، ٢[$$




عند $س = ٠$ غير متصل نفس عندها اختبار المشتقة الأولى.

- من إشارة $ق'(س)$:

$ق(٠)$ صغرى محلية و $ق(-٢)$ عظمى محلية

عند $(س = ٢)$ غير متصل نلجأ لمقارنة الصورة بالنهاية

$\lim_{س \to ٢^{-}} ق(س) = ٢^{٣} = ٤ \Leftarrow ق(٢) = ١$ ق(٢) صغرى محلية.

---

- 2019 تجريبي فلسطين/ إذا كان $ق(س) = ٢س^{٣} - ب س^{٢}$ وكان $ق(١) = -١$ هي الصغرى المحلية للاقتران $ق(س)$ فإن قيمة الثابت $ب$ هي على الترتيب:

ب/ ٣٦ ج/ ١٦ د/ ١٦-

**ب/ ٣٦**

الحل/ $ق(١) = -١$ و بما أنه عند $(س = ١)$ قيمة صغرى و $ق(س)$ قابل للاشتقاق $\Leftarrow ق'(١) = ٠$

$ق'(س) = ٦س^{٢} - ٢ب س$

$ق'(١) = ٦(١)^{٢} - ٢ب(١) \Leftarrow ٠ = ٦ - ٢ب$ ـــ معادلة (١)

$ق(١) = ٢(١)^{٣} - ب(١)^{٢} \Leftarrow -١ = ٢ - ب$

$-٣ = -ب \Leftarrow ب = ٣$

$-٢ = ٢ - ٢ب$ ـــ معادلة (٢)

(١) - (٢): نعوض $ب = ٣$ في $-١ = ٢ - ب \Leftarrow -١ = ٢ - ٣ \Leftarrow ب = ١ + ٢$

$ب = ٣$

أ.مي حوّاري

---

- 2019 سلفية/ إذا كان $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ج$ له قيمة صغرى قيمتها ٢

ما قيمة الثابت ج

ب/ ٦ ج/ ٤ د/ ٢

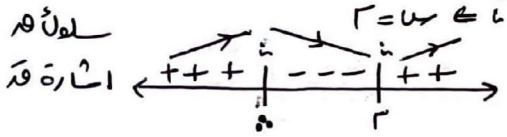
**ب/ ٦**

الحل/ $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ج$ متصل و مشتق على $ح$

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٦س$

$\therefore ٣س(س - ٢) = ٠$

إما $٣س = ٠ \Leftarrow س = ٠$ أو $س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$




للاقتران قيمة صغرى محلية عند $(س = ٢)$

قيمتها (٢) $\Leftarrow ق(٢) = ٢$

$ق(٢) = ٢^{٣} - ٣(٢)^{٢} + ج$

$٢ = ٨ - ١٢ + ج \Leftarrow ٢ = -٤ + ج \Leftarrow ج = ٦$

---

- 2019 الوسطى/ إذا كان $ق(س) = أس^{٣} - ١٢س + ٥$ و $ق(٣) = ٢٣$ ما القيمة الصغرى المطلقة للاقتران

ب/ -٣ ج/ صفر د/ ٥

**ب/ -٥**

الحل/ $ق(س)$ متصل على $ح$

$|س-٣| = \begin{cases} ٣-س ، & س<٣ \\ س-٣ ، & س\geq ٣ \end{cases}$

$ق(س) = |س-٣|-٥ = \begin{cases} ٣-س-٥ ، & س<٣ \\ س-٣-٥ ، & س\geq ٣ \end{cases} \Leftarrow ق(س) = \begin{cases} -س-٢ ، & س<٣ \\ س-٨ ، & س\geq ٣ \end{cases}$

$قَ(س) = \begin{cases} -١ ، & س<٣ \\ ١ ، & س>٣ \\ غم ، & س=٣ \end{cases}$

لاحظ $قَ(٣)^{+} = ١$ ، $قَ(٣)^{-} = -١$

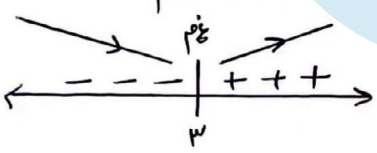
$\Leftarrow قَ(٣)$ غم

$قَ(س) \neq ٠$

$ق(٣) = |٣-٣| - ٥ = -٥$ صغرى مطلقة

(لأنها وحيدة)

سلوك ق
اشارة قَ
قيم س الحرجة




---

• 2019 القدس / إذا كان $قَ(س) = (س^٢-٤س+٤)^٢(س^٢-٩)$ ، ما عدد القيم القصوى للاقتران ق(س)

أ/ صفر ب/ ٤ ج/ ٣ د/ ٢

الحل/ $قَ(س) = (س^٢-٤س+٤)^٢(س^٢-٩)$

$٠ = ((س-٢)^٢)^٢(س-٣)(س+٣)$

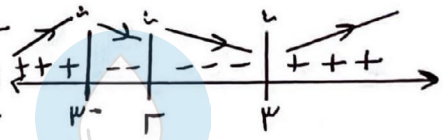
إما $(س-٢)^٤ = ٠ \Leftarrow س-٢ = ٠ \Leftarrow س=٢$

أو $(س-٣) = ٠ \Leftarrow س=٣$ أو $س+٣ = ٠ \Leftarrow س=-٣$

قيم س الحرجة = {٢، ٣، -٣} ولكن ليست كل نقطة حرجة هي قصوى ⇐ يجب البحث في التزايد والتناقص

أ.ميّ حوّاري

سلوك ق
اشارة قَ
س الحرجة




من اشارة قَ يوجد قيمتان قصوتان لـ ق(س) ⇐ عند (س=٣) و (س=-٣).

• لاحظ / لم تتغير اشارة قَ(س) حول س=٢

---

• 2019 قلقيلية / إذا كان $ق(س) = [س] - [س-٢]$ ، $س \in [-١، ١]$ ما قيمة / قيم س التي يكون عندها نقط حرجة

أ/ $]-١، ١[$ ب/ $[-١، ١]$ ج/ $]-١، ١[$ د/ ٢

الحل/ $ق(س) = [س] - ([س]-٢) = [س] - [س] + ٢ = ٢$ لاح متصل على $[-١، ١]$

$قَ(س) = ٠$ ، $\forall س \in ]-١، ١[$

$قَ(س)$ غم ، عند $س = -١، ١$

قيم س الحرجة ، $س \in [-١، ١]$.

• إذا كان $ق(س) = ج$ ، $ج \in ح$ ، $س \in [أ، ب]$ ⇐ فإن $\forall س \in [أ، ب]$ قيم س حرجة.

• 2019 جنين/ إذا كان $ق(س) = (س^2-1)^3(س-2)^4$ وكان الاقتران $ق(س)$ اقتران متصل على $[-3,6]$ فما عدد النقط الحرجة للاقتران $ق(س)$

د/ 5 ج/ 4 ب/ 3 أ/ 3

الحل/ $ق(س) = (س^2-1)^3(س-2)^4 = 0$

إما $س^2-1=0 \Leftarrow س^2=1 \Leftarrow س=1 \in ]-3,6[$ ✓

أو $س=-1 \notin ]-3,6[$ ✗

أو $س-2=0 \Leftarrow س=2 \in ]-3,6[$

* $ق(س)$ يُعدم عند $(س=1, 2)$ ← قيم س الحرجة $= \{-1, 2\}$ ← العدد $= 3$

---

• 2019 طولكرم/ إذا كان $ق(س)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة معرّفًا على $[-6,6]$ فما أكبر عدد من النقط الحرجة يمكن أن نحصل عليها من الاقتران $ق(س)$

د/ 1 ج/ 3 ب/ 2 أ/ 4

الحل/ $ق(س)$ يُعدم عند $(س=-6, س=6)$ أطراف فترة

$ق(س)$ من الدرجة الثالثة ← $ق'(س)$ من الدرجة الثانية

$ق'(س) = 0$ ← عدد الحلول الممكنة $= 2$ ← أكبر عدد من النقط الحرجة $= 4$ أكبر

---

• 2020 القدس/ إذا كان $ق(س)$ كثير حدود و $ق(1) = 0$ و $ق(1) ق(2) < 0$ و $ق(2) < 0$

فإن قيمة $ق(1)$

د/ صغرى مطلقة ج/ عظمى مطلقة ب/ صغرى محلية أ/ عظمى محلية

الحل/ $ق(1) = 0$ ← عند $(س=1)$ حرجة

$ق(2) < 0$ و $ق(1) \times ق(2) < 0$ ← $ق(1)$ و $ق(2)$ لهما نفس الإشارة

← $ق(1) < 0$ ← عند $(س=1)$ صغرى محلية باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

---

• 2020 الوسطى/ ما عدد النقاط الحرجة للاقتران $ق(س) = |س^2-1|$

د/ 3 ج/ 2 ب/ 1 أ/ 0

الحل/ مجال $ق(س)$ : $س^2-1 \geq 0$ وبما أن القيمة المطلقة إما موجب أو صفر نستثني الأصفار

$س^2-1=0 \Leftarrow س^2=1 \Leftarrow س=1$ أو $س=-1$

← مجال $ق(س) = ح - \{-1, 1\}$

$ق(س) = \frac{2س}{س^2-1}$ و $س \neq -1, 1$

$ق(س) = 0 \Leftarrow \frac{2س}{س^2-1} = 0 \Leftarrow س=0 \in ح - \{-1, 1\}$

لاحظ أصفار مقام $ق \notin ح - \{-1, 1\}$

عدد النقط الحرجة واحدة عند $(س=0)$

• ملاحظة 1

$\frac{ك}{كس}(لو|ق(س)|) = \frac{ق'(س)}{ق(س)}$

أ.مي حوّاري

• 2020 تجريبي قلقيلية / إذا كان ق(س) = جا(πس) ، س ∈ [-١ ، ١] ما أكبر قيمة للاقتران ق(س)

أ/ صفر  ب/ ١  جـ/ $\frac{١}{٢}$  د/ $\frac{\pi}{٢}$

الحل/ ق(س) = جا(πس) متصل على [-١ ، ١]

قَ(س) = جتا(πس) × π = ∴

∴ = جتا(πس)  ، س ∈ [-١ ، ١] ⇐ πس ∈ [-π ، π]

πس = $\frac{\pi}{٢}$ ⇐ س = $\frac{١}{٢}$ ∈ ]-١ ، ١[

πس = $-\frac{\pi}{٢}$ ⇐ س = $-\frac{١}{٢}$ ∈ ]-١ ، ١[

* قَ(-١) غ م ، ق(١) غ م طرفية

⇐ س الحرجة = {١ ، -١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$}

ق(١) = جا(π) = ∴

ق(-١) = جا(-π) = -جا(π) = ∴  تذكر: جا(-س) = -جاس

ق($\frac{١}{٢}$) = جا($\frac{\pi}{٢}$) = ١ عظمى مطلقة

ق($-\frac{١}{٢}$) = جا($-\frac{\pi}{٢}$) = -جا($\frac{\pi}{٢}$) = -١ × ١ = -١ صغرى مطلقة

⇐ أكبر قيمة للاقتران هي (١)

أ.ميّ حوّاري

---

• 2022 طولكرم / إذا كان ق(س) = $\frac{أس + ب}{جس + د}$ ، أد - ب جـ ≠ ∴ ما عدد النقط الحرجة للاقتران ق(س)

أ/ صفر  ب/ ١  جـ/ ٢  د/ ٣

الحل/ ق(س) = $\frac{أس + ب}{جس + د}$ متصل على ح/ {$-\frac{د}{جـ}$}

قَ(س) = $\frac{(جس + د)(أ) - (أس + ب) \times جـ}{(جس + د)^٢}$ = $\frac{أجس + أد - أسجـ - بجـ}{(جس + د)^٢}$

⇐ قَ(س) = $\frac{أد - بجـ}{(جس + د)^٢}$ = ∴ ⇐ أد - ب جـ ≠ ∴ لا يوجد قيم حرجة للاقتران.

---

• 2024 طولكرم / إذا كان ق(س) = لو$_{هـ}$|س$^٢$ - ١٦| ، ما عدد النقاط الحرجة للاقتران ق(س)

أ/ ٣  ب/ ٢  جـ/ ١  د/ صفر

الحل/ مجال ق(س) = ح/ {-٤ ، ٤} ومتصل عليه

لأن القيمة المطلقة إما موجب ✓

أو صفر ← يجب استثناء أصفار (س$^٢$ - ١٦)

قَ(س) = $\frac{٢س}{س^٢ - ١٦}$ = ∴ ⇐ ٢س = ∴ ⇐ س = ∴ ∈ ح/ {-٤ ، ٤}

لاحظ أصفار مقام قَ ∉ للمجال

⇐ يوجد نقطة حرجة وحيدة عند (س = ∴).

---

دَعنا نَرَ التعب في عَينيك .. لكن لا تُرينا هزيمتك ..

• 2025 نابلس/ إذا كان ق'(س) متناقص في ح ، منحنى ق'(س) يقطع محور السينات عند (س = ٣) فقط ، إحدى العبارات التالية صحيحة :

أ/ ق(٣) صغرى محلية للاقتران ق(س)  ب/ ق(س) متناقص على [٣، ∞[

ج/ ق(س) متزايد على [٣، ∞[  د/ ق(س) اقتران ثابت في [٣، ∞[

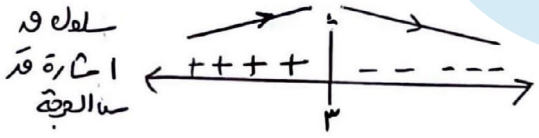
الحل/ ق'(س) متناقص على ح ⇐ ق''(س) < ٠ ، ∀ س ∈ ح

ق'(س) يقطع محور السينات عند (س = ٣) ⇐ (٣، ٠) ∈ ق'(س) ⇐ ق'(٣) = ٠

بما أن ق'(٣) = ٠ "حرجة" و ق''(س) < ٠

⇐ ق''(٣) < ٠

وحسب اختبار المشتقة الثانية ⇐ (٣، ق(٣)) عظمى محلية




بما أنه (عند س = ٣) عظمى إذاً تغيرت اشارة ق'(س) حولها من (+) إلى (-)

⇐ ق(س) متزايد على ]-∞، ٣] ، ومتناقص على [٣، ∞[

---

• 2025 مديرية رام الله/ ما عدد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = $\sqrt{س} - \frac{1}{\sqrt{س}}$ على مجاله

أ/ ٠  ب/ ١  ج/ ٢  د/ ٣

الحل/ ق(س) = $\sqrt{س} - \frac{1}{\sqrt{س}} = \frac{س - 1}{\sqrt{س}}$ متصل على ]٠، ∞[

ق'(س) = $\frac{\sqrt{س} - (س-1) \times \frac{1}{2\sqrt{س}}}{(\sqrt{س})^2}$ = ٠ ⇐ $\sqrt{س} - \frac{س-1}{2\sqrt{س}}$ = ٠

⇐ $\sqrt{س} = \frac{س-1}{2\sqrt{س}}$ ⇐ ٢س = س - ١ ⇐ س = -١ ∉ ]٠، ∞[

أصفار مقام ق' ، س = ٠ ∉ ]٠، ∞[

⇐ لا يوجد نقط حرجة لـ ق(س) على مجاله

أ.ميّ حوّاري

---

• القسم الثاني/ أجب عن الأسئلة الآتية/

• 2007/ عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $\frac{س^2}{س^2+2}$ ، ثم أوجد القيم القصوى للاقتران ق(س)

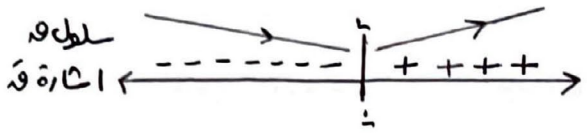
الحل/ ق(س) = $\frac{س^2}{س^2+2}$ متصل على ح ، نسبي والمقام ≠ ٠

ق'(س) = $\frac{(س^2+2)(2س) - س^2(2س)}{(س^2+2)^2} = \frac{\cancel{2س^3} + 4س - \cancel{2س^3}}{(س^2+2)^2} = \frac{4س}{(س^2+2)^2}$

٠ = $\frac{4س}{(س^2+2)^2}$ ، ٤س = ٠ ⇐ س = ٠ ∈ ح

مقام ق'(س) ≠ ٠

• من اشارة ق(س):




١/ ق(س) متزايد عندما س ∈ [ن، ∞[

ق(س) متناقص عندما س ∈ ]-∞، ن]

٢/ عند (س = ن) يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة لأنها وحيدة قيمتها

ق(ن) = $\frac{ن}{ن+٢}$ = ن

---

• 2011/ حدد مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = $\frac{س+١}{س^٢+٣}$

الحل/ ق(س) = $\frac{س+١}{س^٢+٣}$ متصل على ح ، نسبي والمقام ≠ ∴

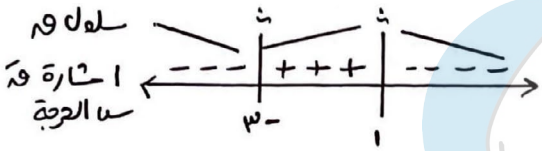
ق'(س) = $\frac{(س^٢+٣)(١)-(س+١)(٢س)}{(س^٢+٣)^٢}$ = $\frac{س^٢+٣-٢س^٢-٢س}{(س^٢+٣)^٢}$ = $\frac{-س^٢-٢س+٣}{(س^٢+٣)^٢}$ = ن

-×( -س^٢ - ٢س + ٣ = ن) ⇐ س^٢ + ٢س - ٣ = ن

(س - ١)(س + ٣) = ن

إما س - ١ = ن ⇐ س = ١ أو س + ٣ = ن ⇐ س = -٣

• من اشارة ق'(س):




١/ ق(س) متزايد على [-٣، ١]

ق(س) متناقص على ]-∞، -٣] ∪ [١، ∞[

٢/ عندما (س = ١) يوجد قيمة عظمى محلية قيمتها ق(١) = $\frac{١+١}{١^٢+٣}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

عند (س = -٣) يوجد قيمة صغرى محلية قيمتها

ق(-٣) = $\frac{-٣+١}{(-٣)^٢+٣}$ = $\frac{-٢}{١٢}$ = $\frac{-١}{٦}$

---

أ.ميّ حوّاري

• 2020 دور أول/ إذا كان ق(س) = ٦√س - ٣س ، أوجد

١/ مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢/ القيم القصوى المحلية ، وحدد المطلقة منها إن وجدت

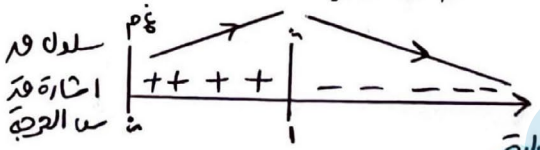
الحل/ نحدد أولاً مجال ق(س): ما تحت الجذر ≥ ن ⇐ س ≥ ن

ق(س) = ٦√س - ٣س متصل على [ن، ∞[ لأنه طرح اقترانات متصلة.

ق'(س) = $\frac{\cancel{٦}^{٣}}{\cancel{٢}_{١}\sqrt{س}}$ - ٣ = ن ⇐ $\frac{\cancel{٣}}{\sqrt{س}}$ = $\cancel{٣}$ ⇐ √س = ١ ⇐ س = ١ ∈ [ن، ∞[

* ق'(ن) غ م طرفية

* أصفار مقام ق'(س): √س = ن ⇐ س = ن ∉ [ن، ∞[




١/ ق(س) متزايد على [ن، ١]

ومتناقص على [١، ∞[

٢/ ق(ن) = ٦√ن - ٣×ن = ن صغرى محلية

ق(١) = ٦√١ - ٣×١ = ٦ - ٣ = ٣ عظمى محلية وهي مطلقة.

---

وذات الفتى والله بالعلم والتقى إذا لم يكونا لا اعتبار لذاته

• 2020 دور ثاني/ إذا كان متوسط التغير للاقتران $ق(س) = أس^3 + بس$ في $[-1, 3]$ يساوي $(22)$ وكان لمنحنى $ق(س)$ قيمة حرجة عند $(س = 2)$ أوجد قيمة كل من الثابتين $أ$ و $ب$

الحل/ بما أن $ق(س)$ لـ $ق$ متصل وقابل للاشتقاق وله قيمة حرجة عند $(س = 2) \Leftarrow ق'(2) = 0$

$ق'(س) = 3أس^2 + ب$

$ق'(2) = 3أ(2)^2 + ب \Leftarrow 0 = 12أ + ب$ ـــ معادلة $(1)$

$\frac{د ق(س)}{د س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{ق(3) - ق(-1)}{3 - (-1)} = 22 \Leftarrow \frac{(أ(3)^3 + ب(3)) - (أ(-1)^3 + ب(-1))}{4} = 44$

$27أ + 3ب - (-أ - ب) = 44 \Leftarrow 28أ + 4ب = 44 \div 4$

$7أ + ب = 11$ ـــ معادلة $(2)$

$(2) - (1)$: $أ = 11$ نعوضها في $(1)$

$0 = 12 \times 11 + ب \Leftarrow 0 = 132 + ب \Leftarrow ب = -132$

---

• 2020 دور ثاني/ إذا كان $ق(س) = \frac{1}{3}س^3 - س^2 - 3س + 4$ أوجد:

1/ مجالات التزايد والتناقص لـ $ق(س)$ 2. القيم القصوى المحلية لـ $ق(س)$ إن وجدت

الحل/ $ق(س) = \frac{1}{3}س^3 - س^2 - 3س + 4$ كثير حدود متصل وقابل للاشتقاق على $ح$

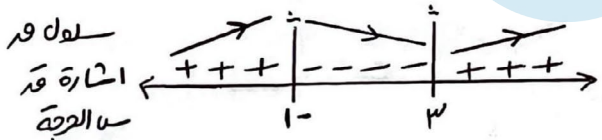
$ق'(س) = س^2 - 2س - 3 = 0 \Leftarrow (س + 1)(س - 3) = 0$

إما $س + 1 = 0 \Leftarrow س = -1$ أو $س - 3 = 0 \Leftarrow س = 3$

• من إشارة $ق'(س)$:

1/ $ق(س)$ متناقص على $[-1, 3]$

ومتزايد في $]-\infty, -1] \cup [3, \infty[$




2/ $ق(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 4 = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 4 = 6 + \frac{-1}{3} = \frac{-1 + 18}{3} = \frac{17}{3}$ عظمى محلية

$ق(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - 3^2 - 3 \times 3 + 4 = \frac{27}{3} - 9 - 9 + 4 = 9 - 9 - 9 + 4 = -5$ صغرى محلية

---

• 2021 دور أول/ إذا كان $ق(س) = هـ^{س} - هـ^{-س}$ ما أصغر قيمة للاقتران $ق(س)$ في $[0, \infty[$

الحل/ $ق(س) = هـ^{س} - هـ^{-س}$ متصل على $[0, \infty[$ لأنه حاصل طرح متصلين ($هـ^{س}$ و كثير حدود)

$ق'(س) = هـ^{س} - هـ^{-س}$

$0 = هـ^{س} - هـ^{-س} \Leftarrow هـ^{س} = هـ^{-س}$ $\Leftarrow س = 1 \div [0, \infty[$

* $ق'(س)$ يغير عند $(س = 0 ، س = 3)$ طرفية.

$ق(1) = هـ - هـ^{-1} \times 1 = هـ - هـ^{-1} = 0$ صغرى مطلقة

$ق(0) = هـ^{0} - هـ^{-0} = 1 - 1 = 0$

$ق(3) = هـ^{3} - هـ^{-3}$

$\Leftarrow$ أصغر قيمة للاقتران هي $ق(1) = 0$

أ.مي حوّاري

• 2021 دور أول/ إذا كان $ق(س) = ٢س^٣ + ب س^٢ + ٢٣س$ وكان له نقطة حرجة واحدة فقط عند $(س=١)$ ما قيمة كل من الثابتين $ب$، $ج$

الحل/ $ق(س) = ٢س^٣ + ب س^٢ + ٢٣س$ متصل ومشتق على $ح$

$ق'(س) = ٦س^٢ + ٢ب س + ٢ج$

$ق$ له نقطة حرجة عند $(س=١) \Leftarrow ق'(١) = ٠$

$ق'(١) = ٦ + ٢ب + ٢ج = ٠ \Leftarrow \frac{٢ب}{٢} + \frac{٢ج}{٢} = \frac{-٦}{٢} \Leftarrow ب + ج = -٣$ ـــ معادلة (١)

لاحظ أن $ق'(س)$ اقتران تربيعي و $ق'(س) = ٦س^٢ + ٢ب س + ٢ج = ٠$

في النقطة الحرجة وحيدة

إذن $ق'$ إما ليس لها حل ✗ أو لها حل ✓ أو لها حلين ✗

$\Leftarrow$ المميز $= ٠$ $\Leftarrow$ لها حل واحد

$\Leftarrow$ المميز $= (٢ب)^٢ - ٤(٦)(٢ج) = ٠$

$\frac{٤}{٤}ب^٢ - \frac{٤}{٤} \times ٢٤ج = ٠ \Leftarrow ب^٢ - ٢٤ج = ٠$ ـــ (٢)

من (١) $\Leftarrow ب + ج = -٣ \Leftarrow ج = -٣ - ب$ نعوضها في (٢)

$ب^٢ - ٢٤(-٣-ب) = ٠ \Leftarrow ب^٢ + ٢٤ب + ٧٢ = ٠$

$(ب+٦)^٢ = ٠ \Leftarrow ب + ٦ = ٠ \Leftarrow ب = -٦$

$ج = -٣ - ب \Leftarrow ج = -٣ - ٦ = -٣ \Leftarrow ج = ٣$

---

• 2021 دور أول/ إذا كان $ق(س) = -٢س^٣ + ٦س^٢ + ٢٤س$ حيث $ق(٥,٥٤٩) = ٠$ وكان لمنحنى $ق(س)$ قيمة صغرى محلية وأخرى عظمى محلية إحداهما تكون عند $(س = -٢)$، أوجد:

١/ قيمة الثابت $ج$ ٢/ قيمة الثابت $ك$ علمًا بأن مجموع القيمتين العظمى والصغرى $(-١٢)$

الحل/ ١/ $ق(س) = -٢س^٣ + ٦س^٢ + ٢٤س + ك$ متصل ومشتق على $ح$

$ق'(س) = -٦س^٢ + ١٢س + ٢٤$

$ق'(س) = -٦(-٢)^٢ + ١٢(-٢) + ج \Leftarrow ٠ = -٢٤ - ٢٤ + ج \Leftarrow ج = ٤٨$

$\frac{-٣٦}{-٣٦} = \frac{-٣٦}{٣٦} \Leftarrow ٠ = -٣٦ + ٣٦ \Leftarrow ٠ = -٦(-٢)^٢ + ١٢(-٢) + ٢٤$

$\Leftarrow ب = -١$

٢/ $ق'(س) = -٦س^٢ + ١٢س + ٢٤$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow -٦س^٢ + ١٢س + ٢٤ = ٠$

$-٦(س+٢)(س-٤) = ٠$

إما $س = ٠$ أو $س + ٢ = ٠ \Leftarrow س = -٢$

| $س$ | $-٢$ | | $٠$ | |
|---|---|---|---|---|
| إشارة $ق'$ | + | 0 | − | 0 + |
| سلوك $ق$ | ↗ | | ↘ | ↗ |

$ق(٠) + ق(-٢) = -١٢ \Leftarrow (-٢)(٠)^٣ + ٦(٠)^٢ + ٢٤(٠) + ك + (-٢)(-٢)^٣ + ٦(-٢)^٢ + ٢٤(-٢) + ك = -١٢$

$ك + ٨ + ٢٤ + ك = -١٢ \Leftarrow ٢ك + ٣٢ = -١٢ \Leftarrow \frac{٢ك}{٢} = \frac{-٤٤}{٢} \Leftarrow ك = -٢٢$

أ.مي حواري

• 2021 دور أول/ إذا كان ق(س) = $س^3 - 6س^2 - 15س + 36$ حيث س ∈ [-2، 6] أوجد:
١/ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢/ القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران ق(س)

الحل/

ق(س) = $س^3 - 6س^2 - 15س + 36$ كثير حدود متصل على [-2، 6]

ق'(س) = $3س^2 - 12س - 15$

$ث = \frac{3}{3}(س^2 - 4س - 5)$

$ث = س^2 - 4س - 5$

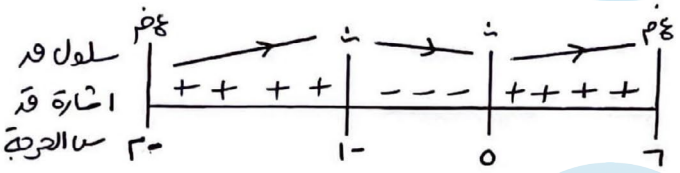
$ث = (س + 1)(س - 5)$

إما $س + 1 = ث$ ← $س = -1 \in [-2، 6]$ أو $س - 5 = ث$ ← $س = 5 \in [-2، 6]$

ق'(س) غ م ← $س = -2$

$س = 6$

• ضع اشارة ق'(س):




١/ ق(س) متناقص في [-1، 5]
ومتزايد في [-2، -1] ∪ [5، 6]

٢/ • ق(-2) = $(-2)^3 - 6(-2)^2 - 15(-2) + 36 = -8 - 24 + 30 + 36$

← ق(-2) = 34 صغرى محلية

• ق(-1) = $(-1)^3 - 6(-1)^2 - 15(-1) + 36 = -1 - 6 + 15 + 36$ = 44 عظمى محلية ومطلقة

• ق(5) = $5^3 - 6(5)^2 - 15(5) + 36 = 125 - 150 - 75 + 36$ = -64 صغرى محلية ومطلقة

• ق(6) = $6^3 - 6(6)^2 - 15(6) + 36 = 216 - 216 - 90 + 36$ = -54 عظمى محلية

---

• 2021 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = $\frac{س^3 + 3}{س - 1}$ حيث س ≠ 1 أوجد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

الحل/

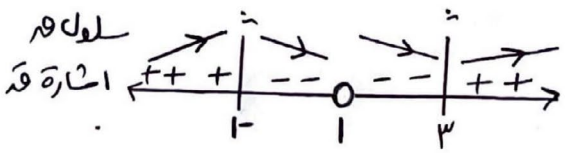
ق(س) = $\frac{س^3 + 3}{س - 1}$ متصل على ح - {1} لأنه كثير حدود والمقام ≠ 0 ∴

ق'(س) = $\frac{(س - 1)(3س^2) - (س^3 + 3)}{(س - 1)^2} = \frac{3س^3 - 3س^2 - س^3 - 3}{(س - 1)^2} = \frac{س^3 - 3س^2 - 3}{(س - 1)^2}$ ∴

← $س^3 - 3س^2 - 3 = ث$ ← $(س + 1)(س - 3) = ث$

إما $س + 1 = ث$ ← $س = -1$ أو $س - 3 = ث$ ← $س = 3$

• ضع اشارة ق'(س):




• ق(-1) = $\frac{(-1)^3 + 3}{-1 - 1} = \frac{2}{-2}$ = -1 عظمى محلية

• ق(3) = $\frac{3^3 + 3}{3 - 1} = \frac{12}{2}$ = 6 صغرى محلية

• 2021 دور ثالث/ إذا كان ق(س) = س$^{٣}$ − ٣س معرفاً في [−٣، ١] ما القيمة الصغرى المطلقة للاقتران ق(س)

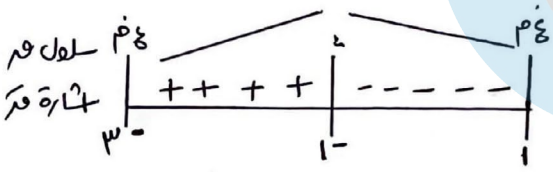
الحل/ ق(س) = س$^{٣}$ − ٣س لوح متصل على [−٣، ١]

ق'(س) = ٣س$^{٢}$ − ٣

∴ = ٣س$^{٢}$ − ٣ ⇐ ٣ = ٣س$^{٢}$ ⇐ ١ = س$^{٢}$ ⟵ س = ١ ∉ ]−٣، ١[ ✗

⟵ س = −١ ∈ ]−٣، ١[ ✓

ق'(س) غ م عند ⟵ س = −٣ ، س = ١ أطراف فترة.




• ق(١) = ١ − ٣ = −٢ صغرى محلية

ق(−٣) = (−٣)$^{٣}$ − ٣ × −٣ = −٢٧ + ٩

⇐ ق(−٣) = −١٨ صغرى مطلقة

---

• 2022 دور أول/ إذا كان ق(س) = (٩ − س)$\sqrt{س}$ معرفاً في [٠، ٤] جد:

١/ مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢/ القيم القصوى المحلية لـ ق(س)

الحل/ ق(س) = (٩ − س)$\sqrt{س}$ متصل على [٠، ٤] ، حاصل ضرب متصلين

ق(س) = ٩$\sqrt{س}$ − س$\sqrt{س}$

ق(س) = ٩$\sqrt{س}$ − س$^{١}$ × س$^{\frac{١}{٢}}$

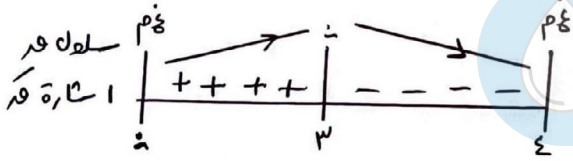
ق(س) = ٩$\sqrt{س}$ − س$^{\frac{٣}{٢}}$

ق'(س) = $\frac{٩}{٢\sqrt{س}}$ − $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ = ٠ ⇐ $\frac{٩}{٢\sqrt{س}}$ = $\frac{٣}{٢}\sqrt{س}$ ⇐ $\frac{٣}{\sqrt{س}}$ = $\sqrt{س}$

٣ = س ∈ ]٠، ٤[

ق'(س) غ م ⟵ أصفار مقام ق' ⇐ $\sqrt{س}$ = ٠ ⇐ س = ٠ ∉ ]٠، ٤[

⟵ أطراف الفترة {٠، ٤}




١/ ق(س) متزايد على [٠، ٣]

ومتناقص على [٣، ٤]

٢/ ق(٠) = (٩ − ٠)$\sqrt{٠}$ = ٩ × ٠ = ٠ صغرى محلية ومطلقة.

ق(٤) = (٩ − ٤)$\sqrt{٤}$ = ٥ × ٢ = ١٠ صغرى محلية

ق(٣) = (٩ − ٣)$\sqrt{٣}$ = ٦$\sqrt{٣}$ عظمى محلية ومطلقة.

---

• 2022 دور أول/ إذا علمت أن س = ٢ لو$_{هـ}$ $\left(\frac{س}{ق(س)}\right)$ وكانت س، ق(س) > ٠ أثبت أن القيمة العظمى المطلقة للاقتران ق(س) هي $\left(\frac{٢}{هـ}\right)$

الحل/ س = ٢ لو$_{هـ}$ $\left(\frac{س}{ق(س)}\right)$ ⇐ س = لو$_{هـ}$ $\left(\frac{س}{ق(س)}\right)^{٢}$ ⇐ هـ$^{س}$ = $\left(\frac{س}{ق(س)}\right)^{٢}$

هـ$^{س}$ = $\frac{س^{٢}}{ق^{٢}(س)}$ ⇐ هـ$^{س}$ ق$^{٢}$(س) = س$^{٢}$ ⇐ ق$^{٢}$(س) = $\frac{س^{٢}}{هـ^{س}}$ بأخذ الجذر للطرفين

$ق(س) = \frac{س}{2هـ^{س}}$ ، $ق(س) > 0$ ، $س \in ح$ ، لأنه حاصل ضرب متصلين ($س$ متصل على $ح$ ، $2هـ^{س}$ متصل على $ح$ لأنه $س \times هـ^{\frac{1}{2}س}$)

$ق'(س) = س \times هـ^{-\frac{1}{2}س} \times -\frac{1}{2} + هـ^{-\frac{1}{2}س} \times 1$

$= هـ^{-\frac{1}{2}س}(س \times -\frac{1}{2} + 1)$

$هـ^{-\frac{1}{2}س} \neq 0$ ، $ق'(س) = 0 \Leftarrow -\frac{1}{2}س + 1 = 0$ أو $س = 2 \in ]0, \infty[$

إشارة $ق'$ حول $ن$:

$+ + + +$ | $- - - -$

$0$ ، $ن = 2$

- ضف إشارة $ق'(س)$:

$ق(2) = 2هـ^{-\frac{1}{2} \times 2} = 2هـ^{-1} = \frac{2}{هـ}$

نظمى محلية وهي مطلقة لأنها وحيدة #

---

2022 دورتان/ إذا كان $ق(س) = س - هـ^{س}$ معرفاً في $[-1, 1]$ جد القيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س)$

الحل/ $ق(س) = س - هـ^{س}$ متصل على $[-1, 1]$ لأنه طرح متصلين ($س$ ، $هـ^{س}$)

$ق'(س) = 1 - هـ^{س} = 0$

$1 = هـ^{س} \Leftarrow هـ^{0} = هـ^{س}$ ، $ن = س = 0 \in ]-1, 1[$

$ق(-1)$ غ م ، $ق(1)$ غ م $\Leftarrow$ أطراف فترة.

إشارة $ق'$ حول $ن$:

$+ + + +$ | $- - - -$

$-1$ ، $ن = 0$ ، $1$ ، غ م ، غ م

- ضف إشارة $ق'(س)$:

* $ق(ن) = ن - هـ^{ن} = -1$ نظمى مطلقة
* $ق(1) = 1 - هـ$ صغرى محلية
* $ق(-1) = -1 - هـ^{-1} = -1 - \frac{1}{هـ}$ صغرى محلية.

---

2023 دور أول/ إذا كان $ق(س) = س^{3} - 6س^{2} + 9س$ ، $س \in [-1, 4]$ جد القيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س)$

الحل/ $ق(س) = س^{3} - 6س^{2} + 9س$ ، $ق$ متصل على $[-1, 4]$

$ق'(س) = 3س^{2} - 12س + 9$

$ن = 3س^{2} - 12س + 9 = 0 \div 3 \Leftarrow ن = س^{2} - 4س + 3$

$ن = (س - 1)(س - 3)$

$س - 1 = ن \Leftarrow س = 1 \in ]-1, 4[$ أو $س - 3 = ن \Leftarrow س = 3 \in ]-1, 4[$

* $ق(س)$ غ م $\Leftarrow$ $س = -1$ ، $س = 4$

- ضف إشارة $ق'(س)$:

إشارة $ق'$ حول $ن$:

$+ + + +$ | $- - -$ | $+ + +$

غ م ، $-1$ ، $ن = 1$ ، $ن = 3$ ، غ م

- $ق(-1) = (-1)^{3} - 6(-1)^{2} + 9(-1)$

$= -1 - 6 - 9 = -16$ صغرى مطلقة

- $ق(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ نظمى مطلقة

- $ق(3) = 3^{3} - 6(3)^{2} + 9 \times 3 = 0$ ∴ صغرى محلية

- $ق(4) = 4^{3} - 6 \times 4^{2} + 9 \times 4 = 4$ نظمى مطلقة

أ.مي حوّاري

• 2023 دورثاني/ إذا كان ق(س) = ٨ لو$_{هـ}$(س) − س$^{٢}$ ، س ∈ ]٠، ٤] ، جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) ، وحدد نوعها

الحل/ ق(س) = ٨ لو$_{هـ}$س − س$^{٢}$ متصل على ]٠، ٤] ، حاصل طرح متصلين (لو$_{هـ}$س ، س > ٠) وكثير حدود

ق'(س) = $\frac{٨}{س}$ − ٢س

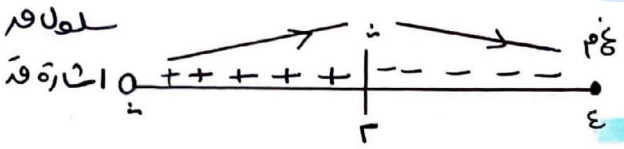
∴ = $\frac{٨}{س}$ − ٢س ⇐ ٢س = $\frac{٨}{س}$ ⇐ $\frac{٢س^{٢}}{٢}$ = $\frac{٨}{٢}$ ⇐ س$^{٢}$ = ٤ ⇐ س = ٢ ∈ ]٠، ٤] ✓

س = −٢ ∉ ]٠، ٤] ✗

ق'(س) غ م ← أصفار مقام ق' : س = ٠ ∉ ]٠، ٤] ✗

← أطراف الفترة : س = ٤ ✓

• من اشارة ق'(س) :



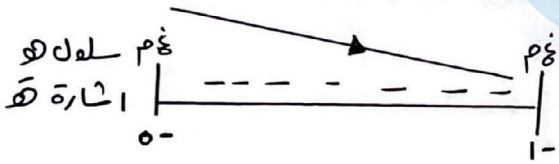

ق(٢) = ٨ لو$_{هـ}$٢ − ٢$^{٢}$

= ٨ لو$_{هـ}$٢ − ٤ عظمى مطلقة

ق(٤) = ٨ لو$_{هـ}$٤ − ٤$^{٢}$ = ٨ لو$_{هـ}$٤ − ١٦ صغرى محلية

---

• 2023 دورثاني/ إذا كان هـ(س) اقتران كثير حدود متناقص على [−٥، −١] حيث هـ(−٥) < ٠ وكان س ق(س) = هـ(س) أثبت أن ق(−١) قيمة عظمى مطلقة للاقتران ق(س) في [−٥، −١]




الحل/ * هـ(س) لوح متصل على [−٥، −١]

هـ(س) متناقص في [−٥، −١]

بما أن هـ(س) متناقص في [−٥، −١]

⇐ هـ(−٥) عظمى مطلقة

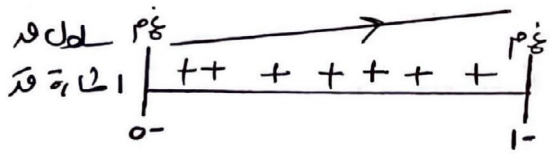
وبما أن هـ(−٥) < ٠ وهي أكبر قيمة ⇐ الاقتران هـ(س) < ٠ في [−٥، −١]

* س ق(س) = هـ(س) ⇐ ق(س) = $\frac{هـ(س)}{س}$ متصل على [−٥، −١] نسبي والمقام ≠ ٠

ق'(س) = $\frac{س هـ'(س) − هـ(س)}{س^{٢}}$ = $\frac{(سالب)(سالب) − (سالب)}{موجب}$ = $\frac{موجب + موجب}{موجب}$

ق'(س) = موجب في ]−٥، −١[

⇐ ق(س) متزايد في [−٥، −١]



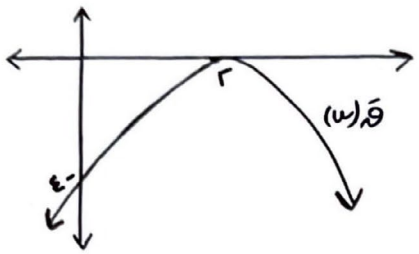

من اشارة ق'(س) ⇐ ق(−١) عظمى مطلقة #

---

أ.مي حواري

الجنّة أغلى من أن تقف !

• 2023 دور ثاني / يمثل الشكل المجاور منحنى ق'(س) لكثير حدود من الدرجة الثالثة ، جد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحناه يمر بـ (ن، ٥)




الحل/ نفرض ق(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + د ، أ ≠ ن

ق يمر بـ (ن، ٥) ⇐ ق(ن) = ٥

ق(ن) = أ(ن)^٣ + ب(ن)^٢ + جـ(ن) + د

د = ٥

أ.مي حواري

من الرسمة (٢، ن) تقع على ق'(س) ⇐ ق'(٢) = ن

(ن، -٤) تقع على ق'(س) ⇐ ق'(ن) = -٤

عند س = ٢ يمكن رسم مماس أفقي ميله = ن ⇐ ق''(٢) = ن

ق'(س) = ٣أ س^٢ + ٢ب س + جـ

ق''(س) = ٦أ س + ٢ب

ق''(٢) = ٦أ(٢) + ٢ب

[ن = ١٢أ + ٢ب] / ٢

ن = ٦أ + ب — (١)

ق'(ن) = -٤

-٤ = ٣أ(ن)^٢ + ٢ب(ن) + جـ

-٤ = جـ

ق'(٢) = ن

ن = ٣أ(٢)^٢ + ٢ب(٢) + جـ

ن = ١٢أ + ٤ب + -٤

+٤ = ١٢أ + ٤ب

+١ = ٣أ + ب — (٢)

بطرح (١) - (٢) ⇐ -١ = ٣أ ⇐ -١/٣ = أ نعوضها في (٢)

١ = ٣ × -١/٣ + ب ⇐ ١ = -١ + ب ⇐ ٢ = ب

⇐ ق(س) = -١/٣ س^٣ + ٢س^٢ - ٤س + ٥

---

• 2023 دور ثالث / جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^٣ - ٣س^٢ - ٩س + ١٧ ، س ∈ [-١، ٥]

الحل/ ق(س) = س^٣ - ٣س^٢ - ٩س + ١٧ كثير حدود متصل على [-١، ٥]

ق'(س) = ٣س^٢ - ٦س - ٩

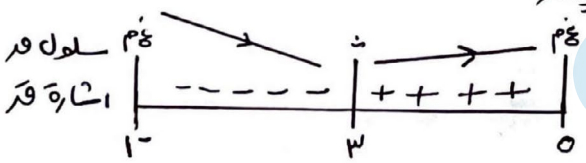
[ن = ٣س^٢ - ٦س - ٩] ÷ ٣ ⇐ ن = س^٢ - ٢س - ٣

ن = (س + ١)(س - ٣)

إما س + ١ = ن ⇐ س = -١ ∉ ]-١، ٥[ ✗ أو س - ٣ = ن ⇐ س = ٣ ∈ ]-١، ٥[ ✓

* ق'(س) غ م ← عند س = -١
← عند س = ٥ طرفيتان

• من اشارة ق':




• ق(-١) = (-١)^٣ - ٣(-١)^٢ - ٩(-١) + ١٧

⇐ ق(-١) = -١ - ٣ + ٩ + ١٧ = ٢٢ عظمى مطلقة

• ق(٣) = ٣^٣ - ٣(٣)^٢ - ٩×٣ + ١٧ = -١٠ صغرى مطلقة

• ق(٥) = ٥^٣ - ٣(٥)^٢ - ٩×٥ + ١٧ = ١٢٥ - ٧٥ - ٤٥ + ١٧ = ٢٢ عظمى مطلقة

• 2024 دور أول/ إذا كان ق(س) = ٣ جاس جتاس ، س ∈ [٠، π] جد القيم القصوى المحلية والمطلقة لمنحنى ق(س)

أ.مي حواري

الحل/ ق(س) = ٣ جاس جتاس = ٣ × ½ جا(٢س)

ق(س) = ٣/٢ جا(٢س) متصل على [٠، π]

ق'(س) = ٣/٢ × ٢ جتا(٢س)

∴ = ٣ جتا(٢س)

∴ = جتا(٢س) ، س ∈ [٠، π] ← ٢س ∈ [٠، ٢π]

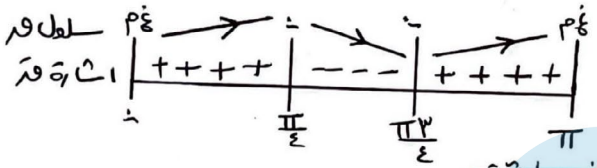
٢س = π/٢ ⇐ س = π/٤ ∈ ]٠، π[

أو ٢س = ٣π/٢ ⇐ س = ٣π/٤ ∈ ]٠، π[

* ق'(س) غ م ← س = ٠ "طرفيتان"
← س = π

• من إشارة ق'(س):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| سلول ق | غ م | ٠ | ٠ | غ م |
| إشارة ق' | + + + + | − − − | + + + + | |
| | ٠ | π/٤ | ٣π/٤ | π |



• ق(٠) = ٣/٢ جا(٠) = ٠ صغرى محلية

• ق(٣π/٤) = ٣/٢ جا(٢ × ٣π/٤)

= ٣/٢ × جا(٣π/٢) = ٣/٢ × −١ = −٣/٢ صغرى مطلقة

• ق(π/٤) = ٣/٢ جا(٢π/٤) = ٣/٢ جا(π/٢) = ٣/٢ × ١ = ٣/٢ عظمى مطلقة

• ق(π) = ٣/٢ جا(٢π) = ٣/٢ × ٠ = ٠ عظمى محلية

---

• 2024 دور ثاني/ باستخدام القيم القصوى ، أثبت أن المقدار س² + ١٦/س − ١١ ، ∀ س ∈ [١، ∞[ موجب دائماً.

الحل/ نفرض ق(س) = س² + ١٦/س − ١١ ، لح متصل على [١، ∞[

ق'(س) = ٢س − ١٦/س² = ٠ ⇐ ٢س = ١٦/س² ⇐ ٢/٢ س³ = ١٦/٢ ⇐ س³ = ٨

س = ٢ ∈ ]١، ∞[

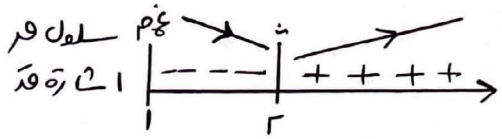
ق'(س) غ م ← س² = ٠ ⇐ س = ٠ ∉ ]١، ∞[ "أصفار مقام ق'"
← س = ١ طرف فترة

• من إشارة ق'(س):

| | | | |
|---|---|---|---|
| سلول ق | غ م | ٠ | |
| إشارة ق' | − − − | + + + + | |
| | ١ | ٢ | |

ق(٢) = ٢² + ١٦/٢ − ١١

= ٤ + ٨ − ١١ = ١ صغرى مطلقة



بما أن ق(٢) = ١ > ٠ و صغرى مطلقة ق(س) ≥ ق(٢)
ق(س) ≥ ١

⇐ ق(س) موجب دائماً على [١، ∞[ #

---

• 2024 دور ثالث/ إذا كان ق(س) = ٤ + س √(١٢ − س) ، س ≤ ١٢ جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) (إن وجدت).

الحل/ $ق(س) = 4 + س\sqrt{12-س}$ متصل على $]-\infty, 12]$ جمع متصلين وما تحت الجذر $\geq 0$

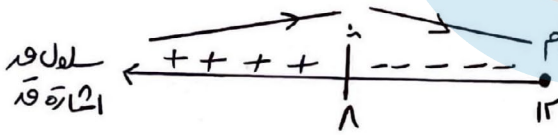
$ق'(س) = س \times \frac{-1}{2\sqrt{12-س}} + 1 \times \sqrt{12-س}$ توحيد مقامات

$= \frac{-س + 2(12-س)}{2\sqrt{12-س}} = \frac{-س + 24 - 2س}{2\sqrt{12-س}} = \frac{24-3س}{2\sqrt{12-س}} = 0$

$24 - 3س = 0 \Leftarrow 3س = 24 \Leftarrow س = 8 \in ]-\infty, 12]$

ق غ م ← أصفار مقام ق' $\Leftarrow 12 - س = 0 \Leftarrow س = 12 \notin ]-\infty, 12]$

← طرفا الفترة $س = 12$




• إشارة ق'(س)

• $ق(8) = 4 + 8\sqrt{4}$

$= 4 + 8 \times 2 = 20$ abs مطلقة

• $ق(12) = 4 + 12\sqrt{0}$

$= 4$ صغرى محلية

أ.مي حواري

---

• 2025 دور أول/ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 - س & ، س \leq 1 \\ س - 1 & ، 1 < س \leq 3 \end{cases}$ ، جد:

P/ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) في $[-3, 6]$

ب/ القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران ق(س) في $[-3, 6]$

الحل • نبحث في اتصال ق(س):

• النقاط المفتوحة:

عندما $س < 1$ ، $ق(س) = س^2 - س$ كثير حدود متصل ومشتقه $ق'(س) = 2س - 1$

عندما $1 < س < 3$ ، $ق(س) = س - 1$ متصل ومشتقه $ق'(س) = 1$

• عند $(س = 1)$ ، $(س = 3)$ طرفا الشعبة غير موجودة

• نقطة التحول $(س = 1)$

$\lim_{س \to 1^+} (س - 1) = 1 - 1 = 0$ ، $ق(1) = \lim_{س \to 1^-} (س^2 - س) = 1 - 1 = 0$

← ق(س) متصل عند $(س = 1)$

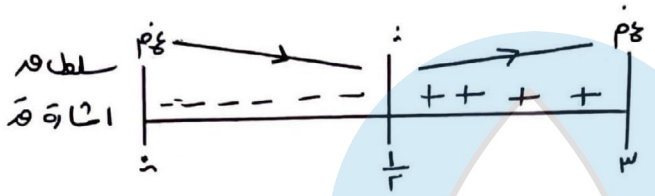
$ق'(1^+) = 1$ ، $ق'(1^-) = 2 - 1 = 1$ ← $ق'(1)$ موجودة

← $ق'(س) = \begin{cases} 2س - 1 & ، س < 1 \\ 1 & ، 1 < س < 3 \\ \text{غير م} & ، س = \{-3, 6\} \end{cases}$

$ق'(س) = 0$ ، عندما $س < 1$ ← $2س - 1 = 0 \Leftarrow 2س = 1 \Leftarrow س = \frac{1}{2}$ ✓

عندما $1 < س < 3$ ← $0 \neq 1$

أ/ من اشارة قَ(س) :




ق(س) متزايد على [١/٢ ، ٣]
ومتناقص على [ث ، ١/٢]

ب/ ق(ث) = ث - ث = ث خطى محلية
ق(٣) = ٣ - ١ = ٢ خطى مطلقة
ق(١/٢) = (١/٢)^٣ - ١/٢ = ١/٨ - ١/٢ = -٣/٨ صغرى مطلقة .

---

• 2025 دورثاني/ إذا كان الاقتران ق(س) = س(س-٣)^٣ + ١ حيث ٢ ≤ س ≤ ٦ جد القيم القصوى المحلية ونوعها للاقتران ق(س)

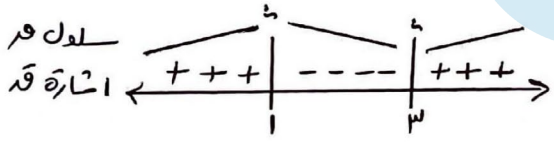
أ/ ق(س) = س(س-٣)^٣ + ١ قابل للاشتقاء على ح

ق'(س) = س × ٣(س-٣)^٢ + (س-٣)^٣ × ١ (اخراج (س-٣) عامل مشترك).

ث = (س-٣)(٣س + س - ٣)

ث = (س-٣)(٤س-٣)

إما س - ٣ = ث ⇐ س = ٣ أو ٤س - ٣ = ث ⇐ ٤س = ٣ ⇐ س = ٣/٤




• من اشارة ق'(س) :

• ق(١) = ١(١-٣)^٣ + ١ = ٤ + ١ = ٥

⇐ ق(١) = ٥ خطى محلية

• ق(٣) = ٣(٣-٣)^٣ + ١ = ١ صغرى محلية

أ.مي حواري

---

• 2020 الصيفي/ جد أكبر وأصغر قيمة للاقتران ق(س) = حاس + ضاس على [ث ، ٢π]

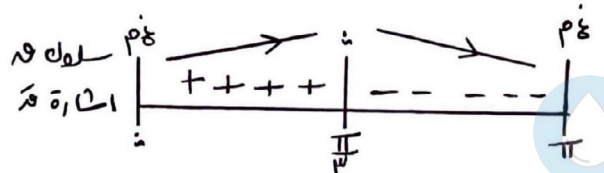
الحل/ ق(س) = حاس + ضاس متصل على [ث ، ٢π] حاصل جمع متصلين

ق'(س) = جتاس - حاس

ث = جتاس(١ - ضاس)

إما حاس = ث ⇐ س = ث ، π ∉ [ث ، ٢π]

أو ١ - ضاس = ث ⇐ ضاس = ١ ⇐ س = π/٣ ∈ [ث ، ٢π]




• ق(π) = حاπ + ضتا(π) = ث + -١ = -١

⇐ ق(π) = -١ صغرى مطلقة

• ق(ث) = حاث + ضتا(ث) = ١ صغرى

• ق(π/٣) = حا π/٣ + ضتا π/٣ = (√٣/٢)^٢ + ١/٢ = ٣/٤ + ١/٢ = ٥/٤ عظمى مطلقة

أكبر قيمة للاقتران (٥/٤) ، أصغر قيمة للاقتران (-١)

• 2020 شمال غزة / إذا كان ق(س) = س(٢ − س)$^{٣}$ ، س ∈ [−٢، ٣] ، جد ما يلي:

١/ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢/ القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) ، مبيناً نوعها.

الحل/ ق(س) = س(٢ − س)$^{٣}$ لـ ح متصل على [−٢، ٣]

ق′(س) = س × ٣(٢ − س)$^{٢}$ × −١ + (٢ − س)$^{٣}$ × ١ إخراج (٢ − س)$^{٢}$ عامل مشترك.

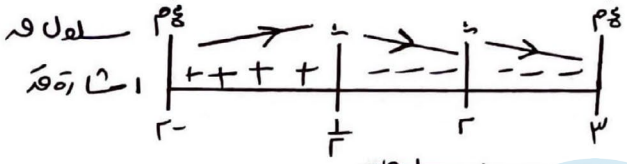
∴ = (٢ − س)$^{٢}$(−٣س + ٢ − س)

∴ = (٢ − س)$^{٢}$(−٤س + ٢)

إما ٢ − س = ∴ ⇐ س = ٢ ∈ ]−٢، ٣[ أو −٤س + ٢ = ∴ ⇐ ٤س = ٢ ⇐ س = $\frac{١}{٢}$ ∈ ]−٢، ٣[

* ق′(س) غ م عند س = −٢ و س = ٣ أطراف فترة.

• من اشارة ق′(س):




١/ ق(س) متزايد على [−٢، $\frac{١}{٢}$]

متناقص على [$\frac{١}{٢}$، ٣]

٢/ ق(−٢) = −٢(٢ − −٢)$^{٣}$ = −٢ × ٦٤ = −١٢٨ صغرى مطلقة

ق(٣) = ٣(٢ − ٣)$^{٣}$ = ٣ × (−١)$^{٣}$ = −٣ صغرى محلية

ق($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$(٢ − $\frac{١}{٢}$)$^{٣}$ = $\frac{٢٧}{١٦}$ عظمى مطلقة.

---

• 2020 أريحا / إذا كان ق(س) = ٢س$^{٣}$ − ٩أس$^{٢}$ + ١٢أ$^{٢}$س + ١ حيث كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند (س = م) قيمة صغرى محلية عند (س = ن) حيث م$^{٢}$ = ن جد قيمة الثابت أ ، أ > ∴

الحل/ ق(س) = ٢س$^{٣}$ − ٩أس$^{٢}$ + ١٢أ$^{٢}$س + ١ لـ ح متصل ومشتق على ح

ق′(س) = ٦س$^{٢}$ − ١٨أس + ١٢أ$^{٢}$

(∴ = ٦س$^{٢}$ − ١٨أس + ١٢أ$^{٢}$) ٦

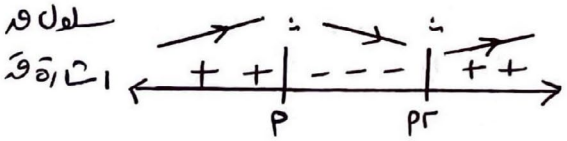
∴ = س$^{٢}$ − ٣أس + ٢أ$^{٢}$

∴ = (س − أ)(س − ٢أ)

إما س − أ = ∴ ⇐ س = أ أو س − ٢أ = ∴ ⇐ س = ٢أ

وبما أن أ > ∴ ⇐ ٢أ > أ

• لاحظ: من اشارة ق′(س):




• عند (س = أ) عظمى محلية ⇐ أ = م

• عند (س = ٢أ) صغرى محلية ⇐ ٢أ = ن

معطى أن / م$^{٢}$ = ن ⇐ أ$^{٢}$ = ٢أ ⇐ أ$^{٢}$ − ٢أ = ∴

أ(أ − ٢) = ∴

إما أ = ∴ مرفوض أ > ∴ أو أ − ٢ = ∴ ⇐ أ = ٢

أ.مي حواري

• 2024 شمال الخليل / إذا كان للاقتران ق(س) = $\sqrt[3]{(\text{أس}-\text{ب})^2}$ + ٥ب ، أ ≠ ٠ ، قيمة قصوى محلية عند (٤، ١٠) ، جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

الحل/

ق(س) = $(\text{أس}-\text{ب})^{\frac{2}{3}}$ + ٥ب متصل على ح

قَ(س) = $\frac{2}{3}(\text{أس}-\text{ب})^{-\frac{1}{3}} \times \text{أ} = \frac{2\text{أ}}{3\sqrt[3]{\text{أس}-\text{ب}}} \neq 0$

بما أن قَ(س) ≠ ٠ و يوجد قيمة قصوى عند س = ٤ ⇐ قَ(٤) غ م ⇐ س = ٤ صفر مقام قَ

٤أ − ب = ٠ ⇐ ٤أ = ب − (١)

* ق(٤) = ١٠ ⇐ $\sqrt[3]{(4\text{أ}-\text{ب})^2}$ + ٥ب = ١٠ نعوض (ب = ٤أ)

⇐ $\sqrt[3]{(4\text{أ}-4\text{أ})^2}$ + ٥ب = ١٠ ⇐ ٥ب = ١٠ ⇐ ب = ٢

٤أ = ب ⇐ ٤أ = ٢ ⇐ أ = $\frac{1}{2}$

أ.مي حواري

---

• 2024 طوباس / إذا كان ق(س) = ٦أس$^2$ − س$^3$ + ١٥أ$^2$س ، أ > ٠ ، له قيمة عظمى محلية عند (س = م) وقيمة صغرى محلية عند (س = ن) وكان ق(م) + ١١ق(ن) = ٩٦ ، جد قيمة / قيم الثابت أ

الحل/ ق(س) = ٦أس$^2$ − س$^3$ + ١٥أ$^2$س متصل ومشتق على ح ، ح ل.

قَ(س) = ١٢أس − ٣س$^2$ + ١٥أ$^2$

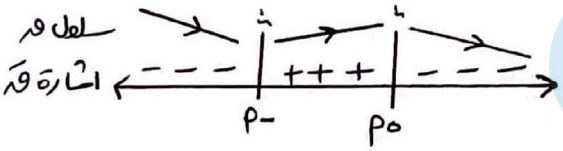
( ٠ = −٣س$^2$ + ١٢أس + ١٥أ$^2$ ) ÷ −٣

٠ = س$^2$ − ٤أس − ٥أ$^2$

٠ = (س + أ)(س − ٥أ)

إما س = −أ أو س − ٥أ = ٠ ⇐ س = ٥أ

بما أن أ > ٠ ⇐ ٥أ > −أ




• من اشارة قَ :

يوجد قيمة عظمى عند (س = ٥أ) ⇐ ٥أ = م

يوجد قيمة صغرى عند (س = −أ) ⇐ ن = −أ

* ق(م) + ١١ق(ن) = ٩٦ ⇐ ق(٥أ) + ١١ق(−أ) = ٩٦

⇐ (٦أ(٥أ)$^2$ − (٥أ)$^3$ + ١٥أ$^2$(٥أ)) + ١١(٦أ(−أ)$^2$ − (−أ)$^3$ + ١٥أ$^2$(−أ)) = ٩٦

(٦أ × ٢٥أ$^2$ − ١٢٥أ$^3$ + ٧٥أ$^3$) + ١١(٦أ × أ$^2$ + أ$^3$ − ١٥أ$^3$) = ٩٦

(١٥٠أ$^3$ − ١٢٥أ$^3$ + ٧٥أ$^3$) + ١١(٦أ$^3$ + أ$^3$ − ١٥أ$^3$) = ٩٦

١٠٠أ$^3$ + ١١ × −٨أ$^3$ = ٩٦ ⇐ ١٠٠أ$^3$ − ٨٨أ$^3$ = ٩٦

⇐ ١٢أ$^3$ = ٩٦ ⇐ أ$^3$ = ٨ ⇐ أ = ٢

---

2024. رام الله/ إذا كان $ق(س) = \frac{٤جاس - ٣س - سجتاس}{٢ + جتاس}$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$ جد:

١/ مجالات التزايد والتناقص لمنحنى ق(س) ٢/ القيم القصوى المحلية لـ ق(س) وصد نوعها

الحل/ $ق(س) = \frac{٤جاس - ٣س - سجتاس}{(٢ + جتاس)}$

أ.مي حواري

$ق(س) = \frac{٤جاس - س(٢ + جتاس)}{(٢ + جتاس)} = \frac{٤جاس}{٢ + جتاس} - \frac{س(٢ + جتاس)}{(٢ + جتاس)}$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{٤جاس}{٢ + جتاس} - س$ متصل على $[٠ ، ٢\pi]$ حاصل قسمة ثم طرح متصلين والمقام $\neq ٠$

$ق'(س) = \frac{(٢ + جتاس)(٤جتاس) - ٤جاس(-جاس)}{(٢ + جتاس)^٢} - ١$

$ق'(س) = \frac{٨جتاس + ٤جتا^٢س + ٤جا^٢س}{(٢ + جتاس)^٢} - ١ = \frac{٨جتاس + ٤(جتا^٢س + جا^٢س)}{(٢ + جتاس)^٢} - ١$

$\Leftarrow ق'(س) = \frac{٨جتاس + ٤ \times ١}{(٢ + جتاس)^٢} - ١ = ن \Leftarrow \frac{٨جتاس + ٤}{٤ + ٤جتاس + جتا^٢س} = ١$

$٤ + ٤جتاس + جتا^٢س = ٨جتاس + ٤$

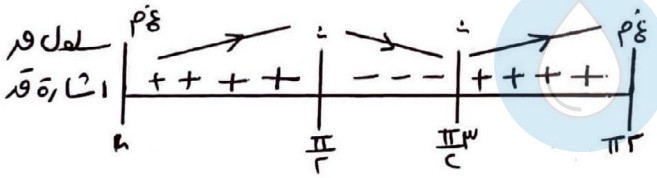
$جتا^٢س - ٤جتاس = ن \Leftarrow جتاس(جتاس - ٤) = ن$

إما $جتاس = ن$ أو $جتاس - ٤ = ن \Leftarrow جتاس = ٤$ لا يمكن لأن $-١ \le جتاس \le ١$

$س = \frac{\pi}{٣} \in ]٠ ، ٢\pi[$

$س = \frac{٥\pi}{٣} \in ]٠ ، ٢\pi[$

* $ق'(س)$ غير معرف $\Leftarrow س = ن$ طرفيتان. $س = ٢\pi$




من إشارة $ق'(س)$:

١/ $ق(س)$ متناقص على $[\frac{\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}]$

$ق(س)$ متزايد على $[٠ ، \frac{\pi}{٣}] \cup [\frac{٥\pi}{٣} ، ٢\pi]$

٢/ $ق(ن) = \frac{٤جا(ن)}{٢ + جتا(ن)} - ن = \frac{٤ \times ن}{١ + ٢} - ن = ن$ صفري محلية

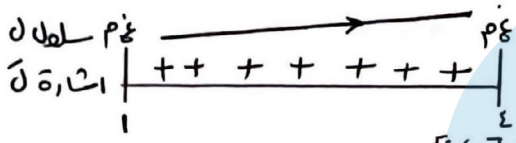
* $ق(\frac{٥\pi}{٣}) = \frac{٤جا(\frac{٥\pi}{٣})}{٢ + جتا(\frac{٥\pi}{٣})} - \frac{٥\pi}{٣} = \frac{٤ \times -١}{٢} - \frac{٥\pi}{٣} = -٢ - \frac{٥\pi}{٣}$ صغرى مطلقة

* $ق(\frac{\pi}{٣}) = \frac{٤جا(\frac{\pi}{٣})}{٢ + جتا(\frac{\pi}{٣})} - \frac{\pi}{٣} = \frac{٤}{٢} - \frac{\pi}{٣} = ٢ - \frac{\pi}{٣}$ عظمى مطلقة

* $ق(٢\pi) = \frac{٤جا(٢\pi)}{٢ + جتا(٢\pi)} - ٢\pi = \frac{٤ \times ٠}{١ + ٢} - ٢\pi = -٢\pi$ صغرى محلية

• القدس الشريف 2025/ إذا كان ل(س) كثير حدود متزايد على [١، ٤] حيث ل(س) = س ه(س)
ل(٤) < ٠ أثبت أن الاقتران ه(س) يأخذ قيمة صغرى مطلقة عند (س = ١)

الحل/ ل(س) قابل للاشتقاق على [١، ٤]

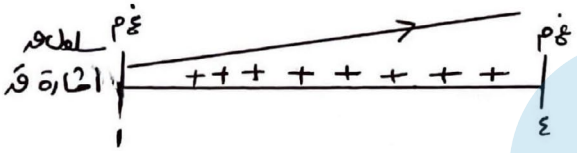



ل(٤) تأخذ مطلقة أكبر قيمة للاقتران
وبما أن أكبر قيمة للاقتران سالبة ← الاقتران سالب في [١، ٤]
← ل(س) < ٠ في [١، ٤]

* ل(س) = س ه(س) ← ه(س) = $\frac{ل(س)}{س}$ متصل على [١، ٤] ؛ بسبب والمقام ≠ ٠

ه'(س) = $\frac{س ل'(س) - ل(س)}{ل^{٢}(س)}$ = $\frac{(موجب)(موجب) \ominus (سالب)}{(موجب)}$ = $\frac{(+)+(+)}{(+)}$

← ه'(س) موجب ← ه'(س) > ٠ في ]١، ٤[ ← ه(س) متزايد على [١، ٤]




← ه(١) صغرى مطلقة #

أ.مي حواري

---

• طولكرم 2025/ باستخدام القيم القصوى أثبت أن ه(س) = ٢٩ + س$^{٤}$ - ٤س$^{٣}$ لا تقطع محور السينات.

الحل/

ه(س) = ٢٩ + س$^{٤}$ - ٤س$^{٣}$ لأن متصل ومشتق على ح

ه'(س) = ٤س$^{٣}$ - ١٢س$^{٢}$

∴ = ٤س$^{٢}$(س - ٣)

إما ٤س$^{٢}$ = ٠ ← س = ٠

أو س - ٣ = ٠ ← س = ٣

• ضابط إشارة ه'(س):

ه(٣) = ٢٩ + ٣$^{٤}$ - ٤(٣)$^{٣}$

= ٢٩ + ٨١ - ٤ × ٢٧

ه(٣) = ٢ صغرى مطلقة ← ه(٣) ≤ ه(س) ← ٢ ≤ ه(س)

إذن ه(س) موجب دائماً يقع فوق السينات ← لا يقطع محور السينات #

---

• خارجي/ أثبت أن الاقتران ه(س) = س$^{٤}$ - ٤س$^{٣}$ + ٣٠ موجب دائماً.

الحل/ ه(س) = س$^{٤}$ - ٤س$^{٣}$ + ٣٠ لأن متصل ومشتق على ح

ه'(س) = ٤س$^{٣}$ - ١٢س$^{٢}$ + ٠

∴ = ٤س$^{٢}$(س - ٣) = ٠

إما ٤س$^{٢}$ = ٠ ← س = ٠

أو س - ٣ = ٠ ← س = ٣

• ه(٣) = ٣$^{٤}$ - ٤ × ٣$^{٣}$ + ٣٠

= ٨١ - ٢٧ × ٤ + ٣٠ = ٣ صغرى مطلقة

ه(٣) ≤ ه(س) ← ٣ ≤ ه(س) ← ه(س) موجب دائماً #

• خارجي/ إذا كان هـ(س) كثير حدود سالب على ح ، وكان له قيمة عظمى محلية عند (٢، -٢)
وكان ق(س) = $\frac{٥}{\sqrt[٣]{هـ^٢(س)+٤}}$ أثبت أن ق(س) له قيمة عظمى محلية عند (٢، $\frac{٥}{٢}$)

الحل/ هـ(س) لـ ح متصل ومشتق على ح ، هـ(س) سالب ← هـ(س) ≠ ٠ على ح .
هـ(س) له قيمة عظمى عند (٢، -٢) ← هـ(٢) = -٢
هـَ(٢) = ٠

سلوك هـ
اشارة هـَ
+ + + + | - - -
٢

* ق(س) = $\frac{٥}{\sqrt[٣]{هـ^٢(س)+٤}}$ = ٥ (هـ^٢(س) + ٤)^(-١/٣) متصل لأنه قسمة اقترانات متصلة ، والمقام ≠ ٠ على ح .

قَ(س) = $\frac{-٥}{٣}$ (هـ^٢(س) + ٤)^(-٤/٣) × ٢هـ(س) هـَ(س) = $\frac{-١٠ هـ(س) هـَ(س)}{٣(هـ^٢(س)+٤)^{٤/٣}}$ = ٠

المقام دائماً موجب

-١٠ هـ(س) هـَ(س) = ٠
هـ(س) ≠ ٠ ، هـ(س) ≠ ٠
أو هـَ(س) = ٠ ← عند س = ٢

• عندما س < ٢
-١٠ × (-) × (+) = (+)

سلوك ق
اشارة قَ
+ + + + | - - -
٢

• عندما س > ٢
(-) (-) (-) = (-)

← لاحظ أن ق(٢) = $\frac{٥}{\sqrt[٣]{هـ^٢(٢)+٤}}$ = $\frac{٥}{\sqrt[٣]{٤+٤}}$ = $\frac{٥}{٢}$

← هـ(٢) = $\frac{٥}{٢}$ عظمى محلية #

## أ.ميّ حوّاري

وحدك ، لن تستطيع . .

تَستَمِدُّ قُوّةً من عيون الّذين تُحبّهم ، من نبضة قلب الّذين تقف معهم ، من ملامح الأصدقاء الصّادقة ، من يدّ الّذين يَشُدّون يداً ، من روح الّذين يُشاطِرون روحًا ، من خُطى الذين يشارِكون دَربًا ، من نُفوسٍ صادقة تسير معك ، من أنفاسٍ صابرة لا تخذلك ، من دعاءٍ في ظهر الغيب يَحمِلك ، من أُمّةٍ لك فيها دورٌ لا يُخطؤك ، منك أنتَ ، حين تكون لك . .

# الدرس الثالث | التقعر ونقط الانعطاف

## • القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة

• 2007 | يقع الاقتران فوقه جميع مماساته عندما يكون الاقتران
أ/ مقعراً لأعلى ب/ مقعراً لأسفل ج/ متزايداً د/ متناقصاً

الحل/ ق(س) فوقه جميع مماساته ← مقعر لأعلى
ق(س) تحت جميع مماساته ← مقعر لأسفل

---

• 2007 / إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية ، فإن ق(س) :
أ/ لا توجد له نقاط انعطاف ب/ توجد له نقطة انعطاف واحدة
ج/ توجد له نقطتي انعطاف د/ توجد له نقطة انعطاف واحدة على الأقل .

الحل/ نفرض ق(س) = أ س² + ب س + جـ ، أ ≠ ٠
ق'(س) = ٢أ س + ب
ق''(س) = ٢أ ≠ ٠
٢أ ≠ ٠ أو أ ≠ ٠

أ.مي حواري

إما ق(س) مقعر لأعلى على ح (أ > ٠) أو مقعر لأسفل على ح (أ < ٠) ← لا يوجد نقط انعطاف

---

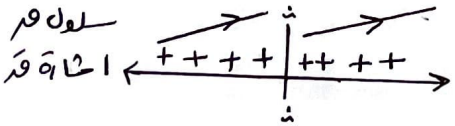
• 2007 + 2018 / إذا كان ق(س) = س |س| ، فإن
أ/ ق(٠) غير موجودة ب/ ق(٠) قيمة عظمى ج/ ق(٠) قيمة صغرى محلية

د/ (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف

الحل/ |س| = { −س ، س ≤ ٠ ; س ، س > ٠ }
ق(س) = { −س² ، س ≤ ٠ ; س² ، س > ٠ }
ق(س) متصل على ح

ق'(س) = { −٢س ، س ≤ ٠ ; ٢س ، س > ٠ }
ق'(٠⁺) = ٠ ، ق'(٠⁻) = ٠ ← ق'(٠) موجودة

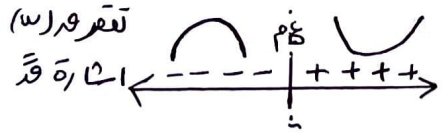
ق'(س) = ٠
• عندما س = ٠ ← ٢س = ٠ ← س = ٠ ∈ ]−∞ ، ٠[
• عندما س > ٠ ← ٢س = ٠ ← س = ٠ ∉ ]٠ ، ∞[



سلوك ق' إشارة ق'

← ق(س) متزايد على ح ← لا يوجد عندها قيم قصوى

ق'(س) = { −٢ ، س < ٠ ; ٢ ، س > ٠ ; غ م ، س = ٠ }



تقعر ق(س) إشارة ق'

ق'(٠)⁺ = ٢ ، ق'(٠)⁻ = −٢ ← ق'(٠) غ م
* ق''(س) ≠ ٠

← (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف ، لأن ق متصل عندها وغيّر من تقعره

2007. إكمال/ إذا كانت النقطة (١، ٢) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س) وكانت
ق'(س) = ٤س^٣ - ل س^٢ حيث ل ثابت ، فإن قيمة الثابت ل تساوي:

أ/ ٤ ب/ ٦ ج/ ١٢ د/ ٢٤

الحل/ نقطة انعطاف لـ ق عند (١، ٢) ← ق(١) = ٢
← ق''(١) = ٠ "لأنه مشتق على 2"

ق''(س) = ١٢س^٢ - ٢ل س
ق''(١) = ١٢ - ٢ل = ٠ ⇐ ١٢ = ٢ل ⇐ ٦ = ل

---

2008. إذا كان ق(س) معرفاً على [-١، ١] ، ق''(س) موجودة في ]-١، ١[ ، يوجد عند (س = ٠) نقطة انعطاف ، فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً:

أ/ منحنى ق مقعر لأسفل على الفترة [-١، ٠] ولأعلى على [٠، ١]
ب/ ق له نقطة حرجة في الفترة ]-١، ١[
ج/ ق' له نقطة حرجة في ]-١، ١[
د/ ق'' له نقطة حرجة في ]-١، ١[

الحل/ يوجد نقطة انعطاف عند (س = ٠) و ق'' موجودة في ]-١، ١[ ⇐ ق''(٠) = ٠
⇐ (٠، ق'(٠)) نقطة حرجة لـ ق'(س)
ق' له نقطة حرجة في ]-١، ١[

أ.مي حواري

---

2010. إذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية واحدة وكان ق'(١) = ٠ ، ق''(١) = -٣
ق(س) يمر بـ (١، -٢) فإن تلك القيمة العظمى هي:

أ/ -٣ ب/ -٢ ج/ ٠ د/ ١

الحل/ ق'(١) = ٠ ⇐ (س = ١) حرجة لـ ق(س)
ق''(١) = -٣ ⇐ ق''(١) < ٠ وباستخدام اختبار المشتقة الثانية (١، ق(١)) عظمى محلية
ق(س) يمر بـ (١، -٢) ⇐ ق(١) = -٢ عظمى محلية

---

2011. إذا كانت ق'(-١) = ق'(٣) = ٠ وكانت ق''(س) > ٠ للفترة ]-٢، ٢[ ، فإن

أ/ ق(-١) عظمى محلية ب/ ق(-١) صغرى محلية
ج/ ق(٣) عظمى محلية د/ ق(٣) صغرى محلية

الحل/ ق'(-١) = ق'(٣) = ٠
ق''(س) > ٠ في ]-٢، ٢[ ⇐ ق''(-١) > ٠ باستخدام اختبار المشتقة الثانية
ق(-١) صغرى محلية
لاحظ س = ٣ ∉ ]-٢، ٢[ ← لا يمكن تحديدها.

---

2011. إذا كان ق(س) = أس^٢ + س^٣ نقطة انعطاف عندما س = -١ ، ما قيمة الثابت أ

أ/ -٣ ب/ -٣/٢ ج/ ٣/٢ د/ ٣

الحل/ ق''(-١) = ٠ "انعطاف و ق مشتق على 2"
ق'(س) = ٢أس + ٣س^٢ ⇐ ق''(س) = ٢أ + ٦س

قَ(-١) = ٢أ + (٦)(-١) ← ∴ = ٢أ - ٦ ⇐ ٢أ = ٦ ⇐ أ = ٣

---

• 2014 / إذا كان ق(س) متصلاً على [١، ٣] وكان قَ(س) < ∴ لجميع س ∈ ]١، ٣[ ، ق(س) له ثلاث نقاط حرجة في [١، ٣] وكان قَ(٢) = ∴ فإن

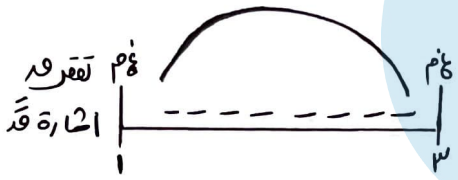
أ/ ق(٢,٥) > ∴ ب/ ق(٢,٥) > ق(٢) ج/ ق(٢,٥) = ق(٢)

د/ ق(٢,٥) < ق(٢)

الحل/ قَ(٢) = ∴ ← س = ٢ حرجة

قَ(١) غ م ، قَ(٣) غ م ← طرفيتان

س الحرجة = {٢، ١، ٣}




قَ(٢) < ∴ وحسب اختبار المشتقة الثانية ← ق(٢) عظمى محلية في [١، ٣] ومطلقة

← ق(٢) > ق(٢,٥)

---

• 2014 إكمال/ النقطة (∴، ١) هي نقطة انعطاف لأحد الاقترانات التالية :

أ/ ق(س) = س² + ١ ب/ ق(س) = ١ - س⁴ ج/ ق(س) = س⁴ + ١

د/ ق(س) = س³ + ١

الحل/ أ. ق(س) = س² + ١ متصل على 2

قَ(س) = ٢س ← قَ(س) = ٢ > ∴ ← ق(س) متعرلأ على 2 ، ليس له نقط انعطاف

ب/ ق(س) = ١ - س⁴ متصل على 2

قَ(س) = -٤س³ ← قَ(س) = -١٢س² = ∴ ← س = ∴

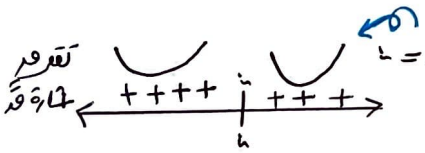
ق لم يغير من تقعره حول (س = ∴)




ج/ ق(س) = س⁴ + ١ متصل على 2

قَ(س) = ٤س³ ← قَ(س) = ١٢س² = ∴ ← س = ∴

ق لم يغير من تقعره حول (س = ∴)




أ.مي حواري

د/ ق(س) = س³ + ١ متصل على 2

قَ = ٣س² ← قَ(س) = ٦س = ∴ ← س = ∴

عند (∴، ١) متصل وغير من تقعره حولها

← (∴، ١) نقطة انعطاف لـ ق



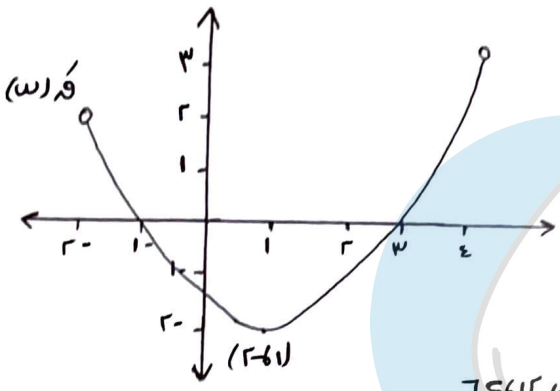

---

ومشروع حفظك للقرآن ، اكتمل ؟

أم وقفت في المنتصف ؟ يا فتى ، والله إني أثق أنك تحمل هِمَّةً صادقةً في صدرك

وتحاول ، أوصيك ألا تترك يدك ...

• 2014 / الشكل المجاور يمثل منحنى ق'(س) فإن نقطة انعطاف منحنى ق(س) هي :




أ/ (١،-٢)  ب/ (١،ق(١))

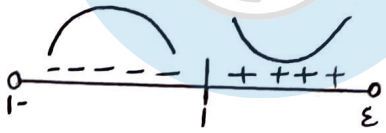
ج/ (٣،∴)  د/ (-١،∴)

الحل/ ق'(س) متناقص على ]-٢،١[ ومتزايد على ]١،٤[

⇐ ق''(س) < ∴ في ]-٢،١[ ، ق''(س) > ∴ على ]١،٤[

لاحظ: يمكن رسم مماس أفقي عند (س=١) لـ ق'(س) ⇐ ق''(١)=∴

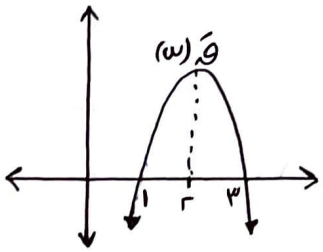
تقعر ق اشارة ق''




عند (١،ق(١)) انعطاف متصل وغير من تقعره

---

• 2015 / الشكل المجاور يمثل منحنى ق'(س) ، إن مجموعة حل المتباينة ق''(س) > ∴ هي




أ/ ]١،٣[  ب/ ]٢،∞[  ج/ ]-∞،٢[

د/ ]-∞،١[ ∪ ]٣،∞[

الحل/ ق''(س) > ∴ ⇐ ق'(س) متزايد

وضا الرسمة ق'(س) متزايد على ]-∞،٢[

⇐ ق''(س) > ∴ في ]-∞،٢[

---

• 2016 / إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{1}{2}$س + جتا(س) معرفاً على [∴،π] فإن منحنى ق(س) يكون مقعراً لأسفل في الفترة :

أ/ [∴،π]  ب/ [∴،$\frac{\pi}{4}$[  ج/ ]$\frac{\pi}{4}$،π[  د/ [∴،$\frac{\pi}{2}$[

الحل/ ق(س) = $\frac{1}{2}$س + جتاس متصل على [∴،π]

ق'(س) = $\frac{1}{2}$ - جاس

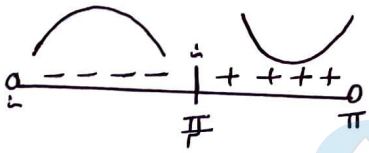
ق''(س) = -جتاس ⇐ ∴ = -جتاس ⇐ جتاس = ∴

س = $\frac{\pi}{2}$ ∈ ]∴،π[

ضا اشارة ق'' :

• ق(س) مقعر لأسفل في [∴،$\frac{\pi}{2}$[

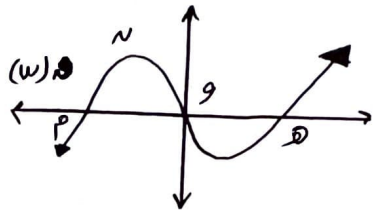
تقعر ق اشارة ق''




أ.مي حواري

---

• 2016 / بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) ، ما النقطة التي يكون عندها ق'(س) ، ق''(س) موجبين




أ/ م  ب/ ن  ج/ هـ  د/ و

الحل/ قَ موجب ← الاقتران متزايد ، قَ سالب ← الاقتران متناقص .

✗ أ/ عند س = م ← قَ(م) = ٠ ، قَ(م-ح) > ٠ ، قَ(م+ح) < ٠

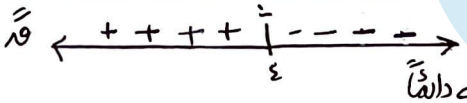
✗ ب/ عند س = ن ← قَ(ن) = ٠ ، يمكن رسم مماس أفقي ، قَ(ن-ح) < ٠ ، قَ(ن+ح) < ٠

✓ جـ/ عند س = هـ ← قَ(هـ) > ٠ ، قَ(هـ+ح) > ٠

✗ د/ عند س = و ← قَ(و) < ٠ ، قَ(و) = ٠ ، "انعطاف"

---

• 2016/ إذا كان ق(س) كثير حدود وكان الشكل المجاور يبين إشارة قَ(س) وكانت قَ(٣) = ٠ فإن العبارة الصحيحة دائماً


قَ
+ + + +

• 2017 دورثاني/ إذا كان $f(x)$ كثير حدود وكانت زاوية ميل المماس لمنحنى $f$ عند أي نقطة عليه في $]0,\frac{\pi}{2}[$ هي زاوية منفرجة فإن العبارة الصحيحة هي :

أ/ $f(x)$ متناقص في $[0,\frac{\pi}{2}]$ ب/ $f(x)$ متزايد في $[0,\frac{\pi}{2}]$

ج/ $f(x)$ مقعر لأعلى في $]0,\frac{\pi}{2}[$ د/ $f(x)$ مقعر لأسفل في $]0,\frac{\pi}{2}[$

الحل/ زاوية ميل $f$ منفرجة في $]0,\frac{\pi}{2}[$ ← الميل = ظاهـ = (-) لأنها منفرجة .

الميل لـ $f$ = $f'(x) < 0$ ∴ في $]0,\frac{\pi}{2}[$

← $f(x)$ مقعر لأسفل في $]0,\frac{\pi}{2}[$

أ.مي حواري

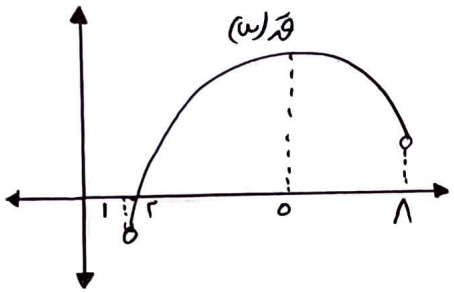
---

• 2017 دورثاني/ الشكل المجاور هو منحنى $f'(x)$

فإن نقطة الانطباف لمنحنى $f(x)$ هي

أ/ $(1, f(1))$ ب/ $(5, f(5))$

ج/ $(2, f(2))$ د/ لا يوجد له نقطة انطباف




الحل/ عند $x=5$ يمكن رسم مماس أفقي لـ $f'(x)$

← $f'(5) = 0$ ∴

وبما أن $f'(x)$ متزايد في $]1,5[$ ومتناقص في $]5,8[$

← $f'(x) > 0$ ∴ في $]1,5[$ و $f'(x) < 0$ ∴ في $]5,8[$

← $(5, f(5))$ نقطة انطباف لـ $f$ لأنه متصل عندها ويغير من تقعره حولها

---

• 2017 دورثاني/ إذا كان $f(x)$ اقتران متصلاً في $]1,3[$ و $f'(x) < 0$ ∴ $x \in ]1,3[$

$f'(2) = 0$ ∴ فأي العبارات صحيحة :

أ/ $f(2)$ صغرى محلية ب/ $(2, f(2))$ نقطة انطباف

ج/ $f(2)$ عظمى محلية د/ $f(x)$ متزايد على $]2,3[$

الحل/ $f'(x) < 0$ ∴ في $]1,2[$ ← $f'(2) < 0$ ∴

وبما أن $f'(2) = 0$ ∴ و $f'(2) < 0$ ∴ وحسب اختبار المشتقة الثانية ← $f(2)$ عظمى محلية .

---

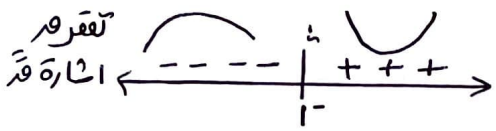
• 2017 دورثاني/ إذا كان $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$ فإن منحنى $f(x)$ يقع فوق جميع مماساته على الفترة :

أ/ $]-\infty,1[$ ب/ $]1,\infty[$ ج/ $]-\infty,-3[$ د/ $]-3,\infty[$

الحل/ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$ متصل ومشتق على $\mathbb{R}$ ، كثير حدود

$f'(x) = x^2 + 2x - 3$

$f'(x) = 2x + 2 = 0$ ∴ ← $2x = -2$ ← $x = -1$




• $f(x)$ مقعر لأعلى في $]-\infty,-1[$

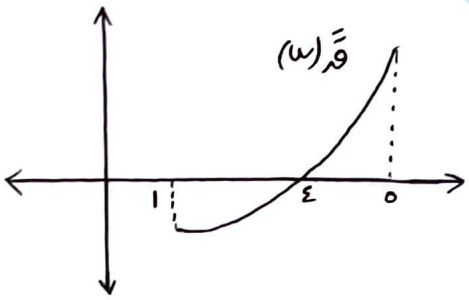
← $f(x)$ يقع فوق جميع مماساته في $]-\infty,-1[$

• 2018/ إذا كانت النقطتان (ب، ق(ب)) و ($\frac{1}{2}$، ق($\frac{1}{2}$)) هما نقطتا انعطاف لمنحنى ق(س)
وكانت ق(س) = ٤ س$^{٣}$ − ل س$^{٢}$ و ما قيمة الثابت ل
أ/ ٣-  ب/ ٢  ج/ ٣  د/ ٦
الحل/ ق قابل للاشتقاق و (ب، ق(ب)) انعطاف ⇐ ق''(ب) = ٠
($\frac{1}{2}$، ق($\frac{1}{2}$)) انعطاف ⇐ ق''($\frac{1}{2}$) = ٠

ق'(س) = ١٢ س$^{٢}$ − ٢ ل س
ق''($\frac{1}{2}$) = ١٢ ($\frac{1}{2}$)$^{٢}$ − ٢ ل × $\frac{1}{2}$ = ٠ ⇐ ٣ − ل = ٠ ⇐ ل = ٣

---

• 2018/ الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) و ق(س) اقتران كثير حدود و ق(٣) = ٠ فأي العبارات صحيحة :
أ/ ق(٣) قيمة صغرى محلية
ب/ ق(س) مقعر لأعلى في ]١، ٥[
ج/ ق(س) مقعر لأعلى في ]٤، ٥[
د/ ق(س) متناقص في [٤، ٥]




الحل/ ق(س) يقع فوق محور السينات في ]٤، ٥[ ⇐ ق(س) > ٠ في ]٤، ٥[
⇐ ق(س) مقعر لأعلى في ]٤، ٥[

أ.مي حواري

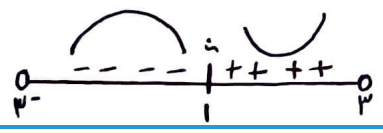
---

• 2019 دور أول/ إذا كان ق(س) اقتران متصل في [١، ٤] وكانت ق'(س) > ٠ لجميع قيم س ∈ ]١، ٤[ وكان للاقتران ق(س) نقاط حرجة فقط و حيث ق'(٣) = ٠ و ما العبارة الصحيحة مما يأتي :
أ/ ق(٣) < ٠  ب/ ق(١) = ق(٤)  ج/ ق(٣) > ق(٢)  د/ ق(٣) < ق(٢)
الحل/ النقط الحرجة لـ ق ⇐ س = ١، ٤ طرفيتان . " المشتقة غير موجودة "
س = ٣ و ق'(٣) = ٠

ق'(س) > ٠ في ]١، ٤[ ⇐ ق'(٣) > ٠ في ]١، ٤[ وحسب اختبار المشتقة الثانية
ق(٣) صغرى محلية ومطلقة "وحيدة"
⇐ ق(٣) < ق(س) في [١، ٤] ⇐ ق(٣) < ق(٢)

---

• 2019 دور أول/ إذا كان ق(س) = س$^{٣}$ − ٣ س$^{٢}$ و س ∈ [−٣، ٣] و ما احداثيات نقطة الانعطاف لمنحنى ق(س)
أ/ (−١، ٤)  ب/ (١، −٢)  ج/ (٤، ٢)  د/ (٠، ١)
الحل/ ق(س) = ٣ س$^{٢}$ − ٦ س
ق'(س) = ٦ س − ٦ = ٠ ⇐ ٦ س = ٦ ⇐ س = ١ ∈ ]−٣، ٣[ .
(١، ق(١)) = (١، −٢) نقطة انعطاف لأن ق متصل عندها وتغير من تقعره حولها



• 2019 دور ثاني/ إذا كان $\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س}^4+5)(3-\text{س})^5(\text{س}-4)^4$ ، ما مجموعة قيم س التي يكون عندها نقط انعطاف لـ ق(س)

أ/ {3، 4}  ب/ {3، -5}  ج/ {3}  د/ {3، 4، -5}

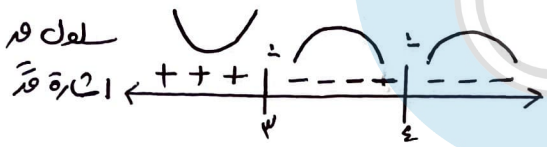
الحل/ $\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س}^4+5)(3-\text{س})^5(\text{س}-4)^4$

$\therefore = (\text{س}^4+5)(3-\text{س})^5(\text{س}-4)^4$

$\text{س}^4+5 \neq \therefore$ أو $3-\text{س} = \therefore \Leftarrow \text{س} = 3$ أو $\text{س}-4 = \therefore \Leftarrow \text{س} = 4$

• يوجد نقطة انعطاف وحدة عند (س = 3)

• لاحظ أن الاقتران لم يغير من تقعره حول س = 4




---

• 2019 دور ثاني/ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3 + \text{ل}\,\text{س}^2 + -9\text{س}$ ، ∈ ح اقتراناً له نقطة انعطاف عند (س = -1) ما ظل زاوية الانعطاف:

أ/ -12  ب/ صفر  ج/ 3  د/ 12

الحل/ $\text{ق}'(-1) = \text{ظاهـ}$

$\text{ق}'(\text{س}) = 3\text{س}^2 + 2\text{ل}\,\text{س} - 9$

$\text{ق}''(\text{س}) = 6\text{س} + 2\text{ل}$

نقطة انعطاف لـ ق عند (س = -1) و ق مشتق على ح ⇐ $\text{ق}''(-1) = \therefore$

$\text{ق}''(-1) = -6 + 2\text{ل} = \therefore \Leftarrow 2\text{ل} = 6 \Leftarrow \text{ل} = 3$

$\text{ق}'(-1) = 3(-1)^2 + 2\times3(-1) - 9 = \text{ظاهـ} \Leftarrow 3-6-9 = \text{ظاهـ} \Leftarrow -12 = \text{ظاهـ}$

أ.مي حواري

---

• 2020 دور أول/ إذا كان الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[3]{6-2\text{س}} + 2$ ، ما قياس زاوية الانعطاف لمنحنى ق(س) إن وجدت

أ/ $\therefore$  ب/ $\frac{\pi}{2}$  ج/ $\pi$  د/ لا توجد زاوية انعطاف

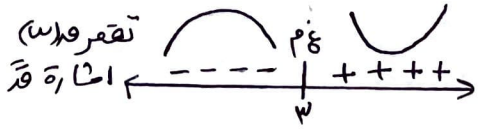
الحل/ $\text{ق}(\text{س}) = (6-2\text{س})^{\frac{1}{3}} + 2$ متصل على ح

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{3}(6-2\text{س})^{-\frac{2}{3}} \times -2 = \frac{-2}{3}(6-2\text{س})^{-\frac{2}{3}}$

$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{4}{9}(6-2\text{س})^{-\frac{5}{3}} \times -2 = \frac{-8}{9} \times \frac{1}{(6-2\text{س})^{\frac{5}{3}}} \neq \therefore$

$\text{ق}''(\text{س})$ غ م ← عند أصفار مقام ق'' ⇐ $6-2\text{س} = \therefore \Leftarrow 6 = 2\text{س} \Leftarrow \text{س} = 3 \in \text{ح}$

• عند (3، ق(3)) نقطة انعطاف لأن ق(س) متصل عندها وغيّر من تقعره.




$\text{ق}'(3) = \text{ظاهـ}$

$\text{ق}'(3) = \frac{-2}{3(6-2\times3)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{-2}{3\times\therefore} = \frac{-2}{\therefore} = -\infty \Leftarrow \text{هـ} = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

---

• 2020 دور أول/ إذا كان لمنحنى ق(س) = جاس + أس² نقطة انعطاف عند (س = $\frac{\pi}{6}$) فما قيمة الثابت أ

أ/ ٤ ب/ -٤ ج/ $-\frac{1}{4}$ د/ $\frac{1}{4}$

الحل/ بما أن ق(س) قابل للاشتقاق عند س = $\frac{\pi}{6}$ ، وله نقطة انعطاف عندها

⇐ قً($\frac{\pi}{6}$) = ٠

قَ(س) = جتاس + ٢أس

قً(س) = -جاس + ٢أ ⇐ قً($\frac{\pi}{6}$) = -جا($\frac{\pi}{6}$) + ٢أ

٠ = $-\frac{1}{2}$ + ٢أ ⇐ $\frac{1}{2}$ = ٢أ ⇐ أ = $\frac{1}{4}$

---

• 2020 دور أول/ إذا كان قَ(س) = ١٨ - ٦س - جا(٢س) فأي من الخصائص الآتية تتحقق في منحنى ق(س) ، ∀س ∈ ح

أ/ متزايد ب/ متناقص ج/ مقعر لأسفل د/ مقعر لأعلى

الحل/ قً(س) = -٦ - ٢جتا(٢س) = ٠

-٦ = ٢جتا(٢س) ⇐ -٣ = جتا(٢س) لا يمكن -١ ≤ جتاس ≤ ١

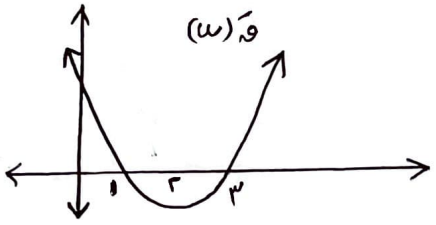
أ.مي حواري

تقعر ق
اشارة قً

ق(س) مقعر لأسفل على ح .

---

• 2020 دور أول/ معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى قَ(س) ، ما المجال الذي يقع فيه منحنى ق(س) تحت جميع مماساته




أ/ ]١، ٣[ ب/ ]٢، ∞[

ج/ ]-∞، ١[ ∪ ]٣، ∞[ د/ ]-∞، ٢[

الحل/ ق يقع تحت مماساته ⇐ ق مقعر لأسفل ← قً(س) < ٠ ⇐ قَ(س) متناقص

قَ متناقص على ]-∞، ٢[

---

• 2020 دور ثاني/ إذا كان ق(س) اقتران متصلاً على ح وكان قَ(س) = $(٢س - ١)^{\frac{4}{3}}$ - ١ ما قياس زاوية الانعطاف لمنحنى ق(س)

أ/ صفر ب/ $\frac{\pi}{4}$ ج/ $\frac{3\pi}{4}$ د/ $\pi$

الحل/ قً(س) = $\frac{4}{3}(٢س - ١)^{\frac{1}{3}} \times ٢ = \frac{8}{3}\sqrt[3]{(٢س - ١)}$ = ٠

⇐ ٢س - ١ = ٠ ⇐ ٢س = ١ ⇐ س = $\frac{1}{2}$

عند س = $\frac{1}{2}$ انعطاف ، ق متصل عندها وغير من تقعره

تقعر ق
اشارة قً

⇐ ظاهـ = قَ($\frac{1}{2}$) = $(٢ \times \frac{1}{2} - ١)^{\frac{4}{3}}$ - ١ ⇐ ظاهـ = -١ ⇐ هـ = $\frac{3\pi}{4}$

• 2015 + 2020 دور ثاني / إذا كان لمنحنى ق(س) = س$^{٣}$ + م س$^{٢}$ − ٩س نقطة انعطاف عند (س = −١) ، فما قيمة الثابت م

أ/ ٣ ب/ ٦ ج/ −٣ د/ −٤

أ.مي حواري

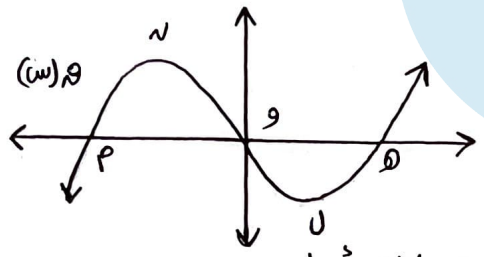
الحل/ ق مشتقة على ح ، وعند (س = −١) انعطاف ⇐ قً(−١) = ٠

قً = ٣س$^{٢}$ + ٢م س − ٩

قً = ٦س + ٢م ⇐ قً(−١) = −٦ + ٢م = ٠ ⇐ ٢م = ٦ ⇐ م = ٣

---

• 2020 دور ثاني / بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) ما النقطة / النقاط التي تكون عندها قَ(س) = ٠ ، قً(س) سالبة




أ/ هـ ، م ب/ ن

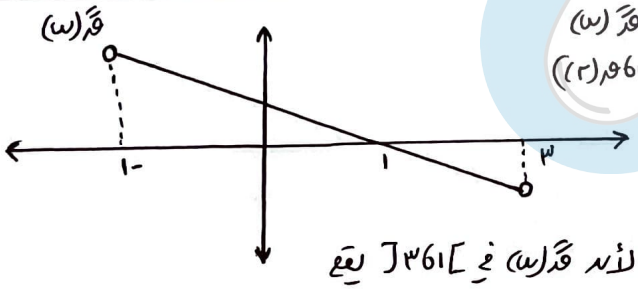
ج/ ل د/ و

الحل/ قَ(س) = ٠ ← يمكن رسم مماس أفقي عندها. "إما ن أو ل"

قً(س) سالبة ← الاقتران مقعر لأسفل. ⇐ النقطة (ن) تحقق الشرطان.

---

• 2020 دور ثاني / يمثل الشكل المجاور منحنى قً(س) إذا كان قَ(٢) = ٠ ماذا تمثل النقطة (٢ ، ق(٢))




أ/ عظمى محلية ب/ صغرى محلية

ج/ ليست حرجة لمنحنى ق(س)

د/ نقطة انعطاف

الحل/ قً(٢) من الرسمة سالبة لأن قً(س) في ]١ ، ٣[ يقع تحت محور السينات.

وبما أن قَ(٢) = ٠ وباستخدام اختبار المشتقة الثانية ⇐ ق(٢) عظمى محلية.

---

• 2020 دور ثالث / ليكن الاقتران ق(س) = جاس − √٣ جتاس ، س ∈ [٠ ، π] ما الاحداثي السيني لنقطة الانعطاف لـ ق(س)

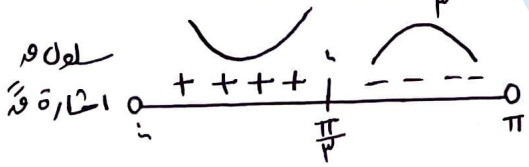
أ/ $\frac{\pi}{٦}$ ب/ $\frac{\pi}{٤}$ ج/ $\frac{\pi}{٣}$ د/ $\frac{\pi}{٢}$

الحل/ ق(س) = جاس − √٣ جتاس متصل على [٠ ، π]

قَ(س) = جتاس + √٣ جاس

قً(س) = − جاس + √٣ جتاس = ٠ ⇐ √٣ جتاس = جاس

⇐ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ = √٣ ⇐ ظاس = √٣ ⇐ س = $\frac{\pi}{٣}$ ∈ ]٠ ، π[




من اشارة قً :

عند س = $\frac{\pi}{٣}$ نقطة انعطاف ، متصل وغير من تقعره حولها

• 2021 دور أول/ إذا كان ق(س) متصلاً على الفترة [١، ٦] وكانت قَ(س) < ٠ لجميع قيم س ∈ ]١، ٦[ ، وكان للاقتران ثلاث نقط حرجة في [١، ٦] فإذا علمت أن قَ(٤) = ٠ ما العبارة الصحيحة فيما يلي:

أ/ ق(٤) < ٠ ب/ ق(٤) < ق(٣) جـ/ ق(٤) > ق(٣) د/ ق(٤) = ق(٣)

الحل/ النقط الحرجة ← قَ(س) غ م ← عند س = ١، ٦ "أطراف الفترة"
← قَ(س) = ٠ ← عند س = ٤

وبما أن قَ(س) < ٠ على ]١، ٦[ ⇐ قَ(٤) < ٠ على ]١، ٦[
وحسب اختبار المشتقة الثانية ⇐ ق(٤) عظمى محلية ومطلقة
⇐ ق(٤) > ق(س) على [١، ٦] ⇐ ق(٤) > ق(٣)

---

• 2021 دور أول/ إذا كان ق(س) = س$^{٣}$ − أس$^{٢}$ وكانت النقطة (−١، ب) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س) ، ما قيمة الثابت ب:

أ/ −٣ ب/ ٢ جـ/ ٣ د/ ٤

الحل/ ق مشتق على ح ⇐ ويوجد نقطة انعطاف عند س = −١ ⇐ قَ(−١) = ٠
قَ(س) = ٣س$^{٢}$ − ٢أس
قَ(س) = ٦س − ٢أ ⇐ قَ(−١) = ٦ × −١ − ٢أ
٠ = −٦ − ٢أ ⇐ ٦ = −٢أ ⇐ أ = −٣
⇐ ق(س) = س$^{٣}$ + ٣س$^{٢}$
ق(−١) = (−١)$^{٣}$ + ٣(−١)$^{٢}$ ⇐ ب = −١ + ٣ ⇐ ب = ٢

---

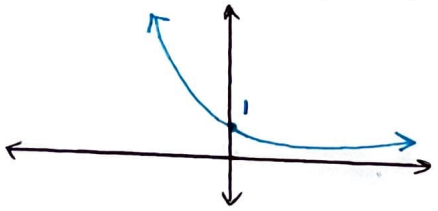
• 2021 دور ثالث/ إذا كان ق(س) = هـ$^{-٢س}$ ، ما العبارة الصحيحة فيما يلي:

أ/ ق(س) متزايد على ح ب/ ق(س) متناقص على ح جـ/ ق(س) مقعر لأسفل
د/ النقطة (٠، ١) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)

الحل/ طريقة (١):
ق(س) = هـ$^{-٢س}$ متصل على ح
قَ(س) = −٢هـ$^{-٢س}$
= سالب × موجب = سالب على ح
بما أن قَ < ٠ على ح ← ق متناقص على ح.

أ.مي حواري

طريقة (٢):
ق(س) = هـ$^{-٢س}$ هو انعكاس لـ هـ$^{٢س}$ في محور الصادات.




من الرسمة ق(س) متناقص على ح
و مقعر لأعلى على ح.

---

• 2021 دور ثاني/ ما العبارة الصحيحة دائماً من العبارات التالية:

أ/ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية فإن له نقطة حرجة واحدة فقط. ← بحيث يكون مجاله ح

ب/ إذا كان الاقتران ق(س) كثير حدود حيث قَ(٢) = ٠ فإن قَ(٢) = ٠

جـ/ الاقتران ق(س) = (١ − س)$^{٤}$ يكون مقعراً للأسفل على ح

د/ إذا كان قَ(أ) ≠ ٠ حيث أ ∈ لمجال ق(س)، فلا يوجد قيم قصوى محلية عند س = أ

الحل/ أ/ نفرض ق(س) = أس² + ب س + جـ ، أ ≠ ٠ متصل ومشتق على ح .

قَ(س) = ٢أس + ب = ٠

٢أس = -ب ⇐ س = $\frac{-ب}{٢أ}$ ∈ ح

⇐ يوجد نقطة حرجة واحدة لـ ق(س) عند (س = $\frac{-ب}{٢أ}$)

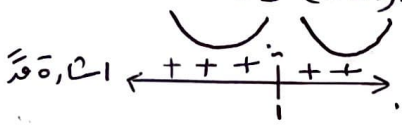
جـ/ ق(س) = (١ - س)⁴ ⇐ قَ(س) = -٤(١ - س)³ ⇐ قً(س) = ١٢(١ - س)² = ٠

⇐ س = ١

قً = ١٢(١ - س)² موجب دائماً ⇐ ق(س) مقعر لأعلى على ح .

"وصفر عند س = ١"

اشارة قً



د/ قَ(أ) ≠ ٠ ولكن قد تكون قَ(أ) غ م ← وقتها يمكن أن تكون هناك قيم قصوى

---

• 2022 دور أول/ إذا كان ق(س) = س³ - ٣س² - جـ س ، وكان قياس زوايا الانعطاف لمنحنى ق(س) هو $\frac{\pi}{٤}$ ، ما قيمة الثابت جـ

أ/ -٤ ب/ -٢ جـ/ ٢ د/ ٤

الحل/ نفرض نقطة الانعطاف س = أ ⇐ قَ(أ) = ظا $\frac{\pi}{٤}$ ⇐ قَ(أ) = ١

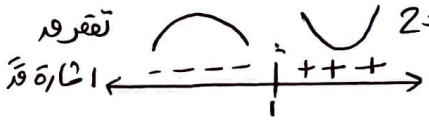
نجد نقطة الانعطاف :

قَ(س) = ٣س² - ٦س - جـ

قً(س) = ٦س - ٦ = ٠ ⇐ $\frac{٦}{٦}$س = $\frac{٦}{٦}$ ⇐ س = ١ ∈ ح

تقعر ق

اشارة قً



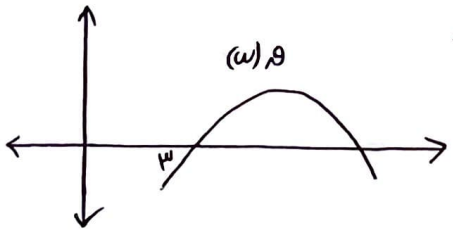
• عند (س = ١) نقطة انعطاف :

قَ(١) = ١ ⇐ قَ(١) = ٣(١)² - ٦(١) - جـ

١ = ٣ - ٦ - جـ ⇐ ١ = -٣ - جـ ⇐ جـ = -٤

---

• 2022 دور أول/ يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران كثير الحدود ق(س) ، أي العبارات الآتية صحيحة دائماً



أ/ قَ(٣) < قً(٣) < ق(٣)

ب/ قً(٣) < قَ(٣) < ق(٣)

جـ/ قً(٣) < ق(٣) < قَ(٣)

د/ ق(٣) < قً(٣) < قَ(٣)

الحل/ من الرسمة ق(٣) = ٠ ، ق(س) متزايد عند س = ٣ ⇐ قَ(٣) > ٠

ق(س) مقعر لأسفل ⇐ قً(٣) < ٠

⇐ قَ(٣) > ق(٣) > قً(٣)

أ.مي حواري

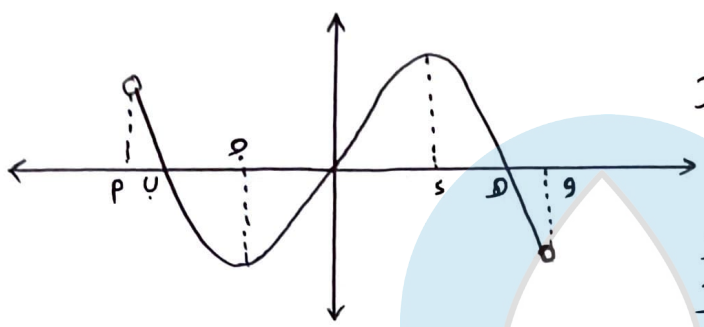
---

• 2024 دور أول/ إذا كان ق(س) = س |س| ما العبارة الصحيحة فيما يلي :

أ/ قَ(٠) غ م ب/ ق(٠) عظمى محلية جـ/ ق(٠) صغرى محلية

د/ (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف

مكرر (2018 + 2007)




• 2024 دور أول / الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ل(س) المعرف على [أ، و]
أي من الفترات التالية تكون عندها ل(س) ل'(س) ل''(س) مقداراً سالباً

أ/ [ب، جـ]  ب/ [ب، ∴]
جـ/ [أ، ب]  د/ [د، هـ]

الحل/ ✗ أ/ [ب، جـ] ← ل(س) يقع تحت محور السينات ← ل(س) سالب
← ل(س) متناقص ← ل'(س) سالب
ل(س) مقعر لأعلى ← ل''(س) موجب
ل × ل' × ل'' = (−)(−)(+) = (+)

✗ ب/ [ب، ∴] ← ل(س) تحت محور السينات ← ل(س) سالب
← ل(س) ← [ب، جـ] متناقص
← [جـ، ∴] متزايد

أ.مي حواري

✓ جـ/ [أ، ب] ← ل(س) فوق محور السينات ← ل(س) موجب
ل(س) متناقص ← ل'(س) سالب
ل(س) مقعر لأعلى ← ل''(س) موجب
⇐ ل ل' ل'' = (+)(−)(+) = (−)

✗ د/ [د، هـ] ← ل(س) فوق محور السينات ← ل(س) موجب
← ل(س) متناقص ← ل'(س) سالب
← ل(س) مقعر لأسفل ← ل''(س) سالب
⇐ ل ل' ل'' = (+)(−)(−) = (+)

---

• 2024 دور أول/ ما قيمة الثابت ب التي تجعل لمنحنى ق(س) = س³ + ب س² − ٧س − ١
نقطة انعطاف عند (س = −٢)

أ/ −١٢  ب/ −٦  جـ/ ٣  د/ ٦

الحل/ ق''(−٢) = ∴ ، ق مشتق على 2
ق'(س) = ٣س² + ٢ب س − ٧
ق''(س) = ٦س + ٢ب ⇐ ق''(−٢) = ٦ × −٢ + ٢ب
∴ = −١٢ + ٢ب ← ١٢ = ٢ب ← ٦ = ب

---

• 2024 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = ٢س³ − أس² نقطة انعطاف عند (½ ، ق(½)) ما قيمة الثابت أ

أ/ −٣  ب/ ٢  جـ/ ٣/٢  د/ ٣

الحل/ قَ(½) = ٠ حيث ق مشتق على 2

قَ(س) = ٦س² − ٢أس

قَ(س) = ١٢س − ٢أ ⟸ قَ(½) = ١٢ × ½ − ٢أ

∴ = ٦ − ٢أ ⟸ ٦ = ٢أ ⟸ ٣ = أ

---

• 2025 دور أول/ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [١، ٤] وكان قَ(س) > ٠ لجميع قيم س ∈ ]١، ٤[ ق(س) له ثلاث نقاط حرجة فقط في [١، ٤] ، قَ(٢) = ٠ ما العبارة الصحيحة فيما يأتي :

أ/ ق(٢) < ق(٤)  ب/ ق(٤) < ق(٢)  ج/ ق(١) < ق(٢)

د/ ق(١) = ق(٢) = ق(٤)

الحل/ س الحرجة لـ ق ⟸ قَ غ م ⟸ س = ١، ٤ أطراف الفترة

قَ(س) = ٠ ⟸ س = ٢

وبما أن قَ > ٠ على ]١، ٤[ ⟸ قَ(٢) > ٠ وحسب اختبار المشتقة الثانية ق(٢) صغرى محلية ومطلقة

⟸ ق(٢) < ق(س) في [١، ٤] ⟸ ق(٢) < ق(٤)

---

• 2025 دور أول/ ما قيمة الثابت م التي تجعل منحنى ق(س) = س³ − م س² − ٩س ، س ∈ ح نقطة انعطاف عند (س = −١)

أ/ ٦  ب/ −٣  ج/ ٣  د/ −٤

الحل/ قَ(−١) = ٠ حيث ق مشتق على ح

قَ(س) = ٣س² − ٢م س − ٩

قَ(س) = ٦س − ٢م ⟸ قَ(−١) = ٦ × −١ − ٢م

∴ = −٦ − ٢م ⟸ ٢م/٢ = −٦/٢ ⟸ م = −٣

أ.مي حواري

---

• 2025 دور أول/ ليكن ق(س) = هـ^س ، س ∈ ح ما العبارة الصحيحة فيما يأتي :

أ/ ق(س) مقعر لأسفل على مجاله  ب/ ق(س) متزايد ومقعر لأعلى في مجاله

ج/ ق(س) موجب ومتناقص في مجاله  د/ ق(س) سالب على مجاله

الحل/ طريقة (١):

ق(س) = هـ^س متصل ومشتق على ح

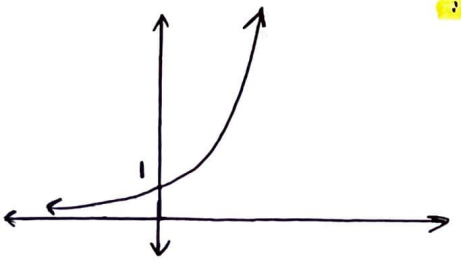
قَ(س) = هـ^س ≠ ٠

هـ^س > ٠ على ح ⟸ ق(س) متزايد على ح

قَ(س) = هـ^س > ٠

ق(س) مقعر لأعلى على ح .

طريقة (٢) :




من الرسمة هـ(س) متزايد ومقعر لأعلى على ح .

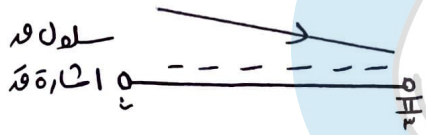
---

• 2024 دور ثالث + 2025 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = لو_هـ(جتا س) ، س ∈ ]٠، π/٣[ ، أي العبارات التالية صحيحة :

أ/ منحنى $f(s)$ مقعر لأعلى عندما $s \in ]0, \frac{\pi}{3}[$
ب/ منحنى $f(s)$ مقعر لأسفل عندما $s \in ]0, \frac{\pi}{3}[$
جـ/ منحنى $f(s)$ متزايد عندما $s \in ]0, \frac{\pi}{3}[$
د/ منحنى $f(s)$ له نقطة انعطاف في $]0, \frac{\pi}{3}[$

الحل/ $f(s) = \int \tan s$ متصل على $]0, \frac{\pi}{3}[$

$f'(s) = \frac{-\sin s}{\cos s} = -\tan s = 0 \Leftarrow s = 0 \in ]0, \frac{\pi}{3}[ \notin \pi, 2\pi$

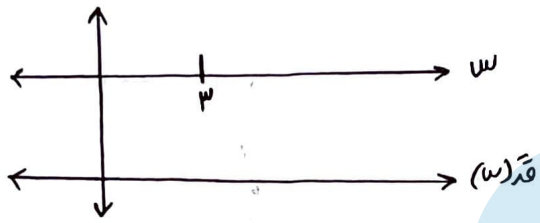



$f(s)$ متناقصة على $]0, \frac{\pi}{3}[$
$f'(s) = -\sec^2 s = (-)$ (موجب) $= (-)$
$f(s)$ مقعر لأسفل في $]0, \frac{\pi}{3}[$ .

أ.مي حواري

---

• 2025 دورة ثاني/ يمثل الشكل المجاور منحنى $f'(s)$




فإذا علمت أن $f(3) = 0$ أي العبارات التالية صحيحة:

أ/ $f(s)$ مقعر لأعلى
ب/ $(3, f(3))$ نقطة انعطاف
جـ/ $f(3)$ قيمة عظمى محلية
د/ $f(3)$ صغرى محلية .

الحل/ $f'(s) < 0$ لأنه يقع تحت محور السينات
$\Leftarrow f'(3) < 0$ ، $f'(3) = 0$ وحسب اختبار المشتقة الثانية $\Leftarrow f(3)$ عظمى محلية .

---

• 2019 سابقة/ إذا كان المستقيم $ص = 1 - 4س$ مماساً لمنحنى $f(s)$ عند نقطة الانعطاف $(1, -3)$ فإن ظل زاوية الانعطاف هو:

أ/ 1 ب/ $-3$ جـ/ 0 د/ $-4$

الحل/ $ص = 1 - 4س \Leftarrow ص' = -4 =$ ميل المماس $= f'(1)$
$f'(1) = \tan \theta \Leftarrow -4 = \tan \theta$ .

---

• 2019 تجريبي رام الله والبيرة/ إذا كان $f(s)$ كثير حدود وكانت $f'(s) < 0$ عندما $s < 3$
وكانت $f'(s) > 0$ عندما $s > 3$ وكانت $f'(1) = 0$ ما العبارة الصحيحة دائماً من العبارات:

أ/ $f'(1) = 0$ ب/ $f'(3) = 0$ جـ/ $f(1)$ عظمى محلية د/ $f(1)$ صغرى محلية

الحل/




$f'(1) < 0$ ، $f'(1) = 0$
وحسب اختبار المشتقة الثانية ($f(1)$ عظمى محلية).

---

• 2019 تجريبي الحنين/ لتكن $f(s)$ كثير حدود $f'(1) = 0$ ، $f'(1) f'(2) < 0$ ، $f'(2) > 0$
فإن

أ/ $f(1)$ عظمى محلية ب/ $f(2)$ قيمة صغرى محلية جـ/ $f(1)$ صغرى محلية

د/ (٢، ق(٢)) نقطة انعطاف .

الحل/ قً(٢) > ٠ ⇐ قً(١) × قً(٢) > ٠

إذن قً(١) > ٠ وبما أن قَ(١) = ٠ وحسب اختبار المشتقة الثانية

⇐ ق(١) صغرى محلية .

---

• 2019 تجريبي الوسطى / الاقتران ق(س) كثير حدود وكان قً(٢) = -٣ ، قَ(٢) = ٠ وكان ق(س) يمر بالنقطة (٢، ٥) ، أي مما يلي قيمة عظمى للاقتران ق(س) :

أ/ -٣ ب/ ٠ ج/ ٥ د/ ٢

الحل/ قَ(٢) = ٠ ، قً(٢) < ٠ وحسب اختبار المشتقة الثانية (٢، ق(٢)) عظمى محلية

⇐ ق(٢) = ٥ عظمى محلية

---

• 2019 الخليل/ إذا كان ق(س) = ٣(أ - ٢) س² + ٨س + ٥ ما قيمة الثابت أ التي تجعل منحنى ق(س) مقعر لأسفل :

أ/ أ < ٢ ب/ أ > ٢ ج/ أ < ١٢ د/ أ > ١٢

الحل/ قَ(س) = ٦(أ - ٢) س + ٨

قً(س) = ٦/٦ (أ - ٢) < ٠/٦ ⇐ أ - ٢ < ٠ ⇐ أ < ٢

---

• 2019 الخليل/ إذا كانت النقطة (٥، ٢) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س) حيث قَ(٥) = ١ ، قَ(٢) = -١ ، ما قياس زاوية الانعطاف للاقتران ق(س)

أ/ $\frac{\pi}{4}$ ب/ $-\frac{\pi}{4}$ ج/ $\frac{\pi}{2}$ د/ $\pi$

الحل/ قَ(٥) = ظاهـ ⇐ ١ = ظاهـ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{4}$

أ.ميّ حوّاري

---

• 2019 الخليل/ إذا كان س١ ، س٢ ∈ [أ، ب] وكان قَ(س١) - قَ(س٢) > ٠ ∀ س١ > س٢

أي العبارات التالية صحيحة دائماً :

أ/ منحنى ق(س) متزايد في [أ، ب] ب/ ق(س) متناقص في [أ، ب]

ج/ ق(س) مقعر لأعلى في ]أ، ب[ د/ ق(س) مقعر لأسفل في ]أ، ب[

الحل/

قَ(س١) - قَ(س٢) > ٠ ⇐ قَ(س١) > قَ(س٢)

س١ > س٢

وحسب تعريف التزايد ⇐ قَ(س) متزايد على [أ، ب] ⇐ قً(س) > ٠ على ]أ، ب[

⇐ ق(س) مقعر لأعلى في ]أ، ب[

---

• 2019 يطا/ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة ، ما أكبر عدد من نقاط الانعطاف لمنحنى قَ(س)

أ/ ١ ب/ ٠ ج/ ٢ د/ ٣

الحل/ ق(س) = أس³ + ب س² + جـ س + د ، أ ≠ ٠

قَ(س) = ٣أس² + ٢ب س + جـ

قً(س) = ٦أس + ٢ب

قًً(س) = ٦أ ← أ > ٠ ، قً > ٠ ← الاقتران مقعر لأعلى

← أ < ٠ ، قً < ٠ ← الاقتران مقعر لأسفل

اذاً لا يوجد نقط انعطاف لمنحنى قَ(س) .

---

• 2020 طوباس/ إذا كان ق(س) كثير حدود معرف على ح وكان قً(١) قً(٣) > ٠ ، قَ(١) = ٠ ، قَ(س) متناقص في [٢،٤] فإن النقطة (١، ق(١)) هي :

أ/ قيمة عظمى محلية لـ ق  ب/ قيمة صغرى محلية لـ ق

جـ/ قيمة صغرى مطلقة لـ ق  د/ نقطة انعطاف لـ ق .

الحل/ قً(١) قً(٣) > ٠ اذن قً(١) ، قً(٣) لهما نفس الاشارة

وبما أن قَ(س) متناقص في [٢،٤] ← قً(س) < ٠ في ]٢،٤[

← قً(٣) < ٠ و قً(١) < ٠

قَ(١) = ٠ ، قً(١) < ٠ وحسب اختبار المشتقة الثانية ← ق(١) عظمى محلية لـ ق

---

• 2020 خانيونس/ إذا كان المستقيم ص + ٣س + ٢ = ٠ مماساً لمنحنى ق(س) عند نقطة الانعطاف (-١،١) ما ظل زاوية الانعطاف عند هذه النقطة :

أ/ -٣  ب/ -١  جـ/ ٠  د/ ١

الحل/ ص + ٣س + ٢ = ٠ ← صَ + ٣ = ٠ ← صَ = -٣ = ميل المماس عند (-١،١) = قَ(-١)

قَ(-١) = ظاهـ

-٣ = ظاهـ

---

• 2024 نابلس/ إذا كان للاقتران ق(س) مماساً أفقياً عند (س = ٢) وكان ٢ - قً(س) < ٠ فإن النقطة (٢، ق(٢)) هي

أ/ نقطة انعطاف  ب/ نقطة قيمة عظمى محلية  جـ/ قيمة صغرى محلية

د/ نقطة قيمة عظمى مطلقة .

الحل/

يوجد مماس أفقي عند س = ٢ ← قَ(٢) = ٠

٢ - قً(س) < ٠ ← ٢ < قً(س) ← ٢ < قً(٢)

قً(٢) > ٠ وحسب اختبار المشتقة الثانية فإن ق(٢) صغرى محلية

أ.ميّ حوّاري

---

• 2024 نابلس/ اذا كان ق(س) = ل(س) - هـ(س) حيث لَ(٣) = هَ(٣) ، لً(٣) < هً(٣)

أي من العبارات التالية صحيحة بالنسبة للاقتران ق(س) عند س = ٣

أ/ قيمة عظمى محلية  ب/ نقطة انعطاف  جـ/ مماس يوازي محور السينات

د/ قيمة صغرى محلية

الحل/ $ق(س) = ل(س) - ك(س)$

$ق'(س) = ل'(س) - ك'(س)$ ← $ق'(٣) = ل'(٣) - ك'(٣) = ٠$ ∴

$ق'(س) = ل'(س) - ك'(س)$

$ق'(٣) = ل'(٣) - ك'(٣)$ = سالب لأن $ل'(٣) < ك'(٣)$ ← $ل'(٣) - ك'(٣) < ٠$ ∴

بما أن $ق'(٣) = ٠$ و $ق'(٣) < ٠$ ∴ ← $ق(٣)$ عظمى محلية

---

• 2024 شمال الخليل/ إذا كان $ق(س)$ كثير حدود مقعر لأسفل عند $س = ٢$ فالعبارة الصحيحة دائماً مما يأتي:

أ/ $ق(س) > ق(س-١)$ ب/ $ق(س) < ق(س-١)$ ج/ $ق(س) < ق(س-١)$

د/ $ق'(س) > ق'(س-١)$

الحل/ نفرض $س_٢ = س$ و $س_١ = س - ١$ ← $س_٢ > س_١$

$ق(س)$ مقعر لأسفل عند $س = ٢$ ← $ق'(س) < ٠$ عند $س = ٢$ ← $ق'(س)$ متناقصة عند $٢$.

وحسب تعريف التزايد والتناقص

$س_٢ > س_١$

$ق'(س_٢) < ق'(س_١)$ «لأنها متناقصة»

← $ق'(س) < ق'(س-١)$.

أ.مي حوّاري

---

• 2025 صيفي/ إذا كان $ق(س)$ كثير حدود له قيمة عظمى مطلقة عند $(٢، -٥)$ وكان $ك(س) = ق(س)$ فإنه يوجد للاقتران $ك(س)$ عند $(٢، ٥)$

أ/ قيمة عظمى محلية ب/ قيمة صغرى محلية ج/ نقطة انطواف

د/ عظمى مطلقة.

الحل/ $ق(س)$ لـ $ق$ متصل وقابل للاشتقاق عند $٢$ وله عظمى مطلقة عند $(٢، -٥)$

← عظمى مطلقة $ق(٢) \geq ق(س)$

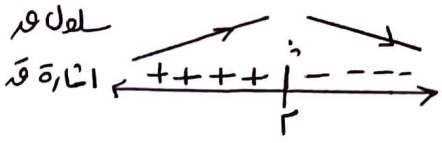
$-٥ \leq ق(س)$ ← $ق(س)$ سالبا على $ق$.

← $ق(٢) = ٠$ «لـ $ق$» ووصية

$ك(س) = ق(س)$ متصل ومشتق على $ق$ و $ق$.

$ك'(س) = ٢ق(س) ق'(س) = ٠$ ∴

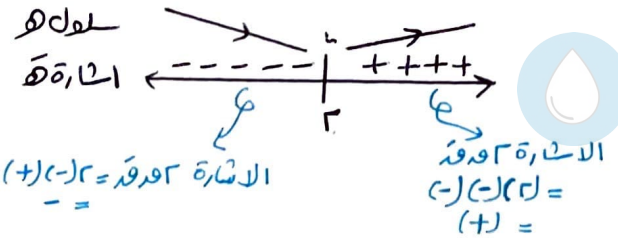
إما $ق(س) = ٠$ ∴ أو $ق'(س) = ٠$ ← عند $س = ٢$ فقط.




• من اشارة $ك'(س)$:

عند $س = ٢$ صغرى محلية ومطلقة

$ك(٢) = ق(٢) = (-٥)^٢ = ٢٥$



• 2025 رام الله/ جد زاوية الانعطاف لمنحنى $ق(س) = \sqrt[3]{س} - س$

أ/ $\pi$ ب/ $\frac{\pi}{2}$ ج/ ٠ د/ $\frac{3\pi}{2}$

الحل/

$ق(س) = \sqrt[3]{س} - س$ متصل على ح

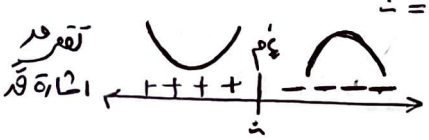
$ق'(س) = \frac{1}{3} س^{-\frac{2}{3}} - 1$

$ق''(س) = \frac{-2}{9} س^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{س^5}} \neq 0$

أ.مي حوّاري

$ق''(س)$ غ م عند أصفار مقام $ق''$ ← $\sqrt[3]{س^5} = 0$ ← $س = 0$

(٠، ق(٠)) نقطة انعطاف ← ق متصل عندها وغير من تقعره




$ق'(0) = ظا هـ$ ← $ق'(0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{0^2}} - 1 = \infty = ظا هـ$ ← $هـ = \frac{\pi}{2}$

---

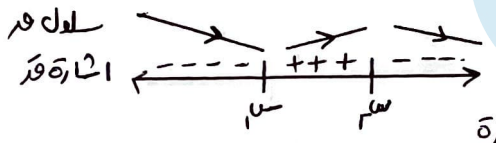
• 2025 مديرية طولكرم/ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة يتخذ قيمة صغرى محلية عند $س_1$ وقيمة عظمى محلية عند $س_2$ ، وكان $س_2 > س_1$ ، ماذا يكون $ق''$ على ح :

أ/ متزايدًا ب/ متناقصًا ج/ مقعرًا لأعلى د/ مقعرًا لأسفل

الحل/ نفرض $ق(س) = أ س^3 + ب س^2 + جـ س + د$ ، $أ \neq 0$

$ق' = 3أ س^2 + 2ب س + جـ$

$ق'(س_1) = 0$ ، $ق'(س_2) = 0$




وبما أن $ق(س_1)$ صغرى و $ق(س_2)$ عظمى تكون اشارة $ق'(س)$ تمامي الشكل وعليه ← $أ < 0$

$ق''(س) = 6أ س + 2ب$

$ق''(س) = 6أ < 0$ ← $ق''(س)$ متناقص على ح .

---

• 2025 رام الله/ إذا كان $ق'(س) = (س - أ)(س - ب)$ ، $أ < ب$ إحدى العبارات التالية خاطئة :

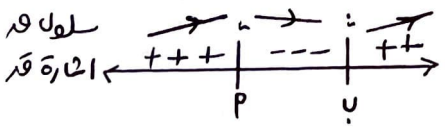
أ/ ق(أ) عظمى محلية ب/ $ق'(أ) = ق'(ب)$ ج/ $ق''(أ) < ق''(ب)$

د/ $ق''(أ) > ق''(ب)$

الحل/ $ق'(س) = (س - أ)(س - ب)$

$0 = (س - أ)(س - ب)$ ← $ق'(أ) = ق'(ب) = 0$

إما $س - أ = 0$ ← $س = أ$ ، أو $س - ب = 0$ ← $س = ب$




ق(أ) عظمى محلية ، ق(ب) صغرى محلية

$ق''(أ) < 0$ ، $ق''(ب) > 0$

← $ق''(ب) > ق''(أ)$

الخيار الخاطئ ← $ق''(أ) > ق''(ب)$

• 2025 طولكرم/ إذا كان ص = ك(س) هي معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة تقع عليه وكان ق(س) ≥ ك(س) ∀س∈ح ، والمستقيم ق(س) يكون على ح :

P/ متزايدًا ب/ متناقصًا ج/ مقعرًا لأعلى د/ مقعرًا لأسفل

الحل/ ق(س) ≥ ك(س) ← ق(س) يقع فوق ك(س)

ق(س) يقع فوق جميع مماساته ← ق(س) مقعر لأسفل على ح .

---

• القسم الثاني| أجب عن الأسئلة التالية

• 2008/ جد مجالات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران ق(س) = ٣جاس جتاس في [٠، ٢π]

الحل/

ق(س) = ٣ جاس جتاس = ٣ × ½ جا(٢س)

← ق(س) = ٣/٢ جا(٢س) متصل على [٠، ٢π]

ق'(س) = ٣/٢ × ٢ جتا(٢س) ← ق'(س) = جتا(٢س)

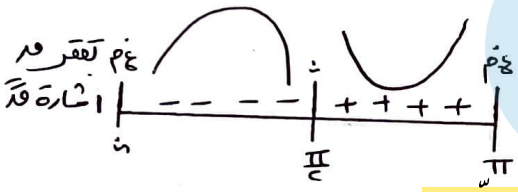
ق''(س) = -٢جا(٢س) = ٠

جا(٢س) = ٠

٢س ∈ ]٠، ٤π[ ← س ∈ ]٠، ٢π[

٢س = ٠ ← س = ٠ ∉ ]٠، ٢π[ ✗

٢س = π ← س = π/٢ ∈ ]٠، ٢π[ ✓




• من إشارة ق''(س) :

ق(س) مقعر لأسفل في ]٠، π/٢[

ومقعر لأعلى في ]π/٢، π[

أ.مي حوّاري

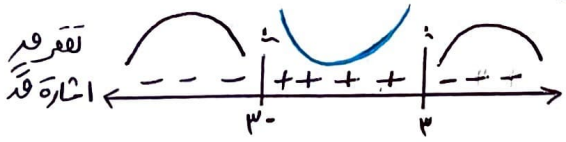
---

• 2009/ إذا كان ق(س) معرفًا على ح ، ق(س) = س/(٩+س٤) جد مجالات التقعر لأعلى للاقتران ق(س)

الحل/ ق(س) = س/(٩+س٤) ← ق'(س) = [(٩+س٤)(١) - س(٤س٣)] / (٩+س٤)٢ = (٩+س٤-٤س٤)/(٩+س٤)٢

← ق'(س) = (٩-س٤)/(٩+س٤)٢ = ٠

٩-س٤ = ٠ ← س٤ = ٩ ← س = ±٣




• من اشارة ق''(س):

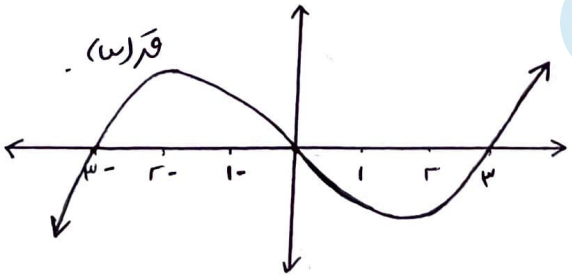
ق(س) مقعر لأعلى على ]-٣، ٣[

---

• 2010/ معتمدًا على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق'(س) جد :

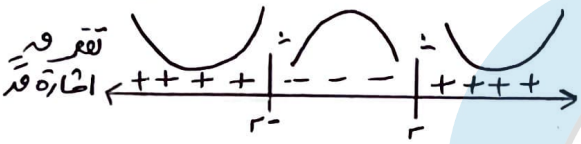
١/ مجالات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران ق(س)

٢/ الاحداثيات السينية لنقاط الانطواء



الحل/ ١/ تقعر ق(س) نحتاج اشارة ق'(س) ← تزايد وتناقص ق(س) .

من الرسمة/ ق(س) متزايدة على ]-∞، -٢[ ∪ ]٢، ∞[ ← ق'(س) على نفس الفترة
و ق(س) متناقصة على ]-٢، ٢[
← ق'(س) سالبة على نفس الفترة




وضح ← • ق(س) مقعر لأعلى على ]-∞، -٢[ ∪ ]٢، ∞[
• ق(س) مقعر لأسفل على ]-٢، ٢[

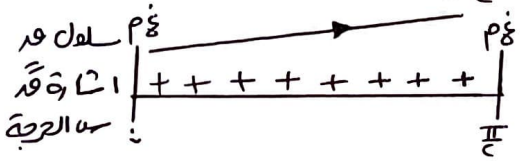
٢/ عند (س = ٢) و (س = -٢) نقطتا انعطاف ق متصل وحذر من تقعر معدومها

---

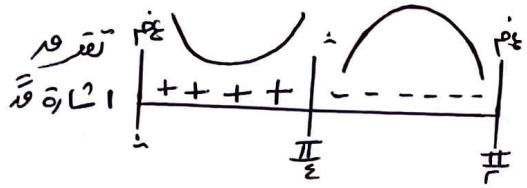
• 2013/ إذا كان ق(س) = جا٢س - جتا(س) و س ∈ [٠، ٢π] أوجد:
١/ القيم العظمى والصغرى للاقتران ق(س)
٢/ فترات التقعر للأعلى ولأسفل للاقتران ق(س)

الحل/ ق(س) = جا٢س - جتا(س) متصل على [٠، ٢π]
ق'(س) = ٢جاس جتاس + جا(س)
ق'(س) = جا(٢س) + جا(س)
ق'(س) = ٣جا(س/٢) = ٠ ← جا(س/٢) = ٠
إما س/٢ = ٠ ← س = ٠ ∉ ]٠، ٢π[
أو س/٢ = π ← س = ٢π ∉ ]٠، ٢π[

١/ • ق(٠) = جا(٠) - جتا(٠) = ٠ - ١ = -١
← ق(٠) = ٠ - ١ = -١ صغرى مطلقة
• ق(π) = جا(٢π) - جتا(π)
← ق(π) = ٠ - (-١) = ١ عظمى مطلقة

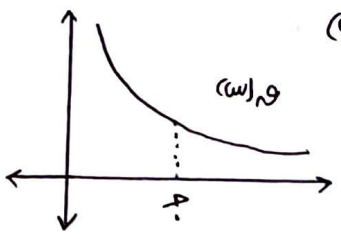



٢/ ق'(س) = ٦جتا(٢س) = ٠ ← جتا(٢س) = ٠
٢س = π/٢ ← س = π/٤ ∈ ]٠، ٢π[
• ق(س) مقعر لأعلى على ]٠، π/٤[ ∪ ]٣π/٤، ٢π[
ق(س) مقعر لأسفل على ]π/٤، ٣π/٤[




---

• 2013/ الشكل المجاور يمثل جزءًا من منحنى الاقتران كثير الحدود ق(س)
فإذا كان م(س) = ق(س) × ق(س) بحيث أن م(ج) > ٠




الحل/ ق(س) يقطع محور السينات ← ق(س) > ٠
ق(س) متناقصة ← ق'(س) < ٠
ق(س) مقعر لأعلى ← ق''(س) > ٠

أ.مي حوّاري

م(س) = ه(س) × ق(س)

م'(س) = ه(س) ق'(س) + ق(س) ق(س)

م'(ج) = ه(ج) ق'(ج) + (ق(ج))²

م'(ج) = (موجب)(موجب) + (سالب)² = موجب ⇐ م'(ج) ≠ ٠

---

• 2016/ إذا كان ه(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة و ص قاعدة الاقتران ه(س) إذا علمت أن النقطة (-١، ٢٥) نقطة قيمة صغرى محلية وأن النقطة (٠، ٣٦) نقطة انعطاف للاقتران ه(س)

الحل/ نفرض ه(س) = أس³ + ب س² + جـ س + ء ، أ ≠ ٠

(٠، ٣٦) نقطة انعطاف ⇐ ق'(٠) = ٠

⇐ ه''(٠) = ٣

(-١، ٢٥) قيمة صغرى محلية ⇐ ه'(-١) = ٠

⇐ ق(-١) = ٠

أ.مي حوّاري

ه(س) = أس³ + ب س² + جـ س + ء

ق(س) = ٣أ س² + ٢ب س + جـ

ق'(س) = ٦أ س + ٢ب ⇐ ق'(٠) = ٦أ(٠) + ٢ب

٠ = ٢ب ⇐ ب = ٠

ق(-١) = ٣أ(-١)² + ٢ب(-١) + جـ ⇐ ٠ = ٣أ - ٢ب + جـ

٠ = ٣أ - ٢ب + جـ ... (١)

ه(٠) = أ(٠)³ + ب(٠)² + جـ(٠) + ء ⇐ ٣ = ء

ه(-١) = أ(-١)³ + ب(-١)² + جـ(-١) + ء ⇐ ٢٥ = -أ + ب - جـ + ٣

٢٢ = -أ + ب - جـ ... (٢)

بجمع (١) + (٢) ⇐ ٢٢ = ٢ب ⇐ ب = ١١

نعوض في (١) ⇐ ٠ = ٣أ - ٢٢ + جـ ⇐ جـ = ٢٢ - ٣أ

نعوض في (٢) ⇐ ٢٢ = -أ + ١١ - (٢٢ - ٣أ) ⇐ ٢٢ = ٢أ - ١١

٢أ = ٣٣ ⇐ أ = ٣/٢

جـ = ٢٢ - ٣(٣/٢) = ٢٢ - ٩/٢ = ٣٥/٢

ه(س) = ٣/٢ س³ + ١١ س² + ٣٥/٢ س + ٣

---

• 2014 الكمال/ إذا كان ه(س) = ٢ جا س ، س ∈ [٠، ٢π] أوجد:

١/ مجالات التزايد والتناقص للاقتران ه(س)

٢/ مجالات التقعر للأعلى ولأسفل لـ ه(س).

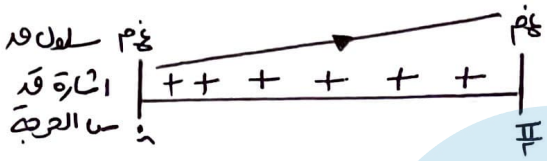
الحل/ ه(س) = ٢ جا س متصل على [٠، ٢π]

ق(س) = ٤ جا س جتا س = ٢ جا(٢س)

ق'(س) = ٤ جتا(٢س) = ٠ ⇐ جا(٢س) = ٠

٢س = ٠ ⇐ س = ٠ ∉ ]٠، ٢π[ أو ٢س = π ⇐ س = π/٢ ∈ ]٠، ٢π[

من اشارة قَ(س) :

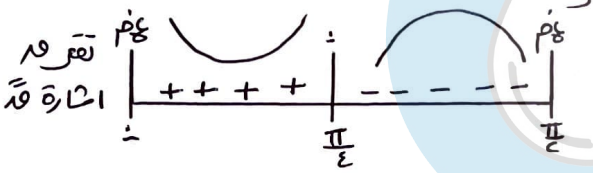



١/ ق(س) متزايد على $[0, \frac{\pi}{2}]$

٢/ قَ(س) = ٢جا(٢س)

قً(س) = ٤جتا(٢س) = ٠ ← جتا(٢س) = ٠

٢س = $\frac{\pi}{2}$ ← س = $\frac{\pi}{4}$ ∈ $]0, \frac{\pi}{2}[$

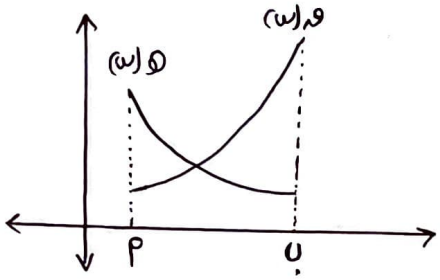



• ق(س) مقعر لأعلى على $]0, \frac{\pi}{4}[$

• ق(س) مقعر لأسفل على $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$

---

• 2016/ الشكل المجاور يمثل منحنيي الاقترانين ق، هـ المعرفين على [أ، ب] بين أن الاقتران $\frac{قَ(س)}{هـ(س)}$ اقتران متزايد




الحل/ من الشكل :

• الاقتران ق(س) على [أ، ب] :

• ق(س) متزايد على [أ، ب] ← قَ(س) > ٠ على ]أ، ب[

• ق(س) مقعر لأعلى على ]أ، ب[ ← قً(س) > ٠ على ]أ، ب[

• ق(س) يقع فوق محور السينات على [أ، ب] ← ق(س) > ٠ على [أ، ب]

• الاقتران هـ(س) على [أ، ب] :

• هـ(س) متناقص على [أ، ب] ← هَ(س) < ٠ على ]أ، ب[

• هـ(س) مقعر لأعلى على ]أ، ب[ ← هً(س) > ٠ على ]أ، ب[

• هـ(س) يقع فوق محور السينات على [أ، ب] ← هـ(س) > ٠ على [أ، ب]

أ.ميّ حوّاري

نفرض ل(س) = $\frac{قَ(س)}{هـ(س)}$ متصل على [أ، ب]

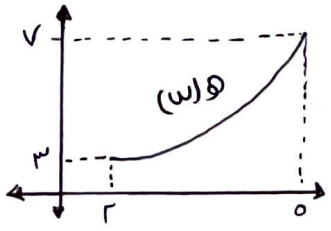
$$لَ(س) = \frac{هـ(س)\,قً(س) - قَ(س)\,هَ(س)}{هـ^2(س)} = \frac{(+)(+) - (+)(-)}{(+)^2}$$

$$لَ(س) = \frac{(+) + (+)}{(+)} = (+) \text{ على } ]أ، ب[$$

بما أن لَ(س) > ٠ على ]أ، ب[ ← ل(س) متزايد على [أ، ب] #

---

• 2016 إكمال/ الشكل المجاور يمثل منحنى هـ(س) في [٢، ٥] وكان ق(س) = س هـ(س) بين أن ق(س) مقعر لأعلى في ]٢، ٥[




الحل/ من الشكل :

هـ(س) يقع فوق محور السينات ← هـ(س) > ٠ في [٢، ٥]

• هـ(س) متزايد على [٢، ٥] ← هـَ(س) > ٠ على ]٢، ٥[
• هـ(س) مقعر لأعلى على ]٢، ٥[ ← هـً(س) > ٠ على ]٢، ٥[

ق(س) = س هـ(س) متصل على [٢، ٥] حاصل ضرب متصلين (لـ ح و هـ(س))
قَ(س) = س هـَ(س) + هـ(س)
قً(س) = س هـً(س) + هـَ(س) + هـَ(س)
قً(س) = س هـً(س) + ٢ هـَ(س)
قً(س) = (+)(+) + (+)(+) = (+)
قً > ٠ على ]٢، ٥[ ← ق(س) مقعر لأعلى على ]٢، ٥[ #

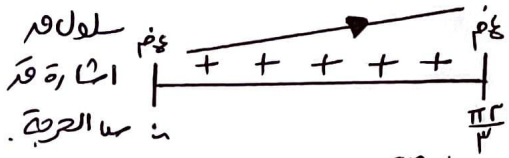
أ.ميّ حوّاري

---

• 2017 دور ثاني / ليكن ق(س) = س − ٢ جتاس معرفاً على [٠، $\frac{٢\pi}{٣}$] أوجد:
١/ مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)
٢/ القيم العظمى والصغرى المحلية لـ ق(س)
٣/ مجالات التقعر لأعلى ولأسفل لـ ق(س)

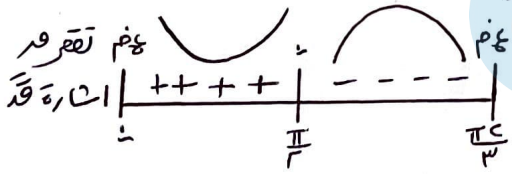
الحل / ق(س) = س − ٢ جتاس متصل على [٠، $\frac{٢\pi}{٣}$] حاصل طرح متصلين (لـ ح و جتاس)
قَ(س) = ١ + ٢ جاس
٠ = ١ + ٢ جاس ← $-\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٢}$ جاس ← $-\frac{١}{٢}$ = جاس

جاس موجب في ]٠، $\frac{٢\pi}{٣}$[




من اشارة قَ(س):
١/ ق(س) متزايد على [٠، $\frac{٢\pi}{٣}$]
٢/ ق(٠) = ٠ − ٢ جتا(٠) = ٠ − ٢×١ = −٢ صغرى مطلقة
ق($\frac{٢\pi}{٣}$) = $\frac{٢\pi}{٣}$ − ٢ جتا($\frac{٢\pi}{٣}$) = $\frac{٢\pi}{٣}$ − ٢×$-\frac{١}{٢}$ = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ١ عظمى مطلقة

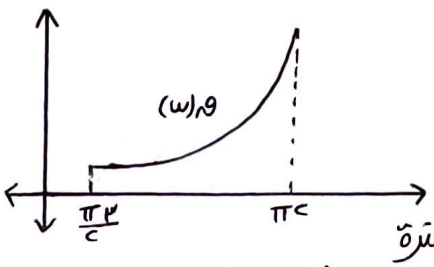
٣/ قً(س) = ٢ جتاس = ٠ ← جتاس = ٠
س = $\frac{\pi}{٢}$ ∈ ]٠، $\frac{٢\pi}{٣}$[




ق(س) مقعر لأعلى على ]٠، $\frac{\pi}{٢}$[
ق(س) مقعر لأسفل على ]$\frac{\pi}{٢}$، $\frac{٢\pi}{٣}$[

---

• 2018 / الشكل المقابل يمثل منحنى ق(س) في ]$\frac{٣\pi}{٢}$، ٢π[
أثبت أن هـ(س) مقعر لأعلى في تلك الفترة
علماً بأن هـَ(س) = قَ(س) جتاس




الحل / من الشكل:
ق(س) متزايد على ]$\frac{٣\pi}{٢}$، ٢π[ ← قَ > ٠ على نفس الفترة
ق(س) مقعر لأعلى على ]$\frac{٣\pi}{٢}$، ٢π[ ← قً > ٠ على نفس الفترة.

هَ(س) = قَ(س) جتاس ، متصل حاصل ضرب متصلين على ]$\frac{3\pi}{2}$ ، $\pi$[

هً(س) = قَ(س) × -جاس + جتاس × قً(س)

هً(س) = (موجب) × (-×-) + (موجب)(موجب)

هً(س) = (+) + (+) > ٠

هً(س) > ٠ على ]$\frac{3\pi}{2}$ ، $\pi$[ ← هـ(س) مقعر لأعلى على ]$\frac{3\pi}{2}$ ، $\pi$[

#

• س ∈ ]$\frac{3\pi}{2}$ ، $\pi$[ "الربع الرابع"

جاس ← سالب

جتاس ← موجب

---

• 2019 دور أول / إذا كان ق(س) = س$^4$ − ٤س$^3$ + ك(س) له نقطة انعطاف أفقي عند (١، ٢)

وكان ع(س) = ك$^2$(س) جد قيمة عً(١)

الحل / ق له نقطة انعطاف أفقي عند (١، ٢) ← ق(١) = ٢

← قَ(١) = ٠

← قً(١) = ٠

ق(س) = س$^4$ − ٤س$^3$ + ك(س)

ق(١) = ١ − ٤ + ك(١)

٢ = −٣ + ك(١)

٥ = ك(١)

قَ(س) = ٤س$^3$ − ١٢س$^2$ + كَ(س)

قَ(١) = ٤ − ١٢ + كَ(١)

٠ = −٨ + كَ(١)

٨ = كَ(١)

قً(س) = ١٢س$^2$ − ٢٤س + كً(س)

قً(١) = ١٢ − ٢٤ + كً(١)

٠ = −١٢ + كً(١)

١٢ = كً(١) .

ع(س) = ك$^2$(س) ← عَ(س) = ٢ك(س) كَ(س)

عً(س) = ٢ك(س) × كً(س) + كَ(س) × ٢كَ(س)

عً(١) = ٢ك(١) كً(١) + ٢كَ(١) كَ(١)

عً(١) = (٢ × ٥ × ١٢) + (٢ × ٨ × ٨) ⇐ عً(١) = ١٢٠ + ١٢٨

عً(١) = ٢٤٨

أ.ميّ حوّاري

---

• 2019 دور أول / إذا كان ق(س) = س$^3$ − ٦س$^2$ + ٩س ، س ∈ [١، ٥] أوجد كلاً مما يلي :

١/ مجالات التزايد والتناقص لـ ق(س)

٢/ القيم القصوى المحلية والمطلقة لـ ق(س)

٣/ مجالات التقعر للأعلى ولأسفل لـ ق(س)

٤/ نقط الانعطاف لمنحنى ق(س)

الحل / ق(س) = س$^3$ − ٦س$^2$ + ٩س متصل على [١، ٥] ومشتق على ]١، ٥[

قَ(س) = (٣س$^2$ − ١٢س + ٩ = ٠) / ٣

س$^2$ − ٤س + ٣ = ٠

(س − ١)(س − ٣) = ٠

✗ إما س − ١ = ٠ ← س = ١ ∉ ]١، ٥[ أو س − ٣ = ٠ ← س = ٣ ∈ ]١، ٥[ ✓

قَ(س) غ م عند س = ١، ٥ طرفيتان .

| سلوك ق | غ م ↘ | ٠ | غ م ↗ |
|---|---|---|---|
| إشارة قَ | − − − − | + + + + | |
| س الحرجة | ١ | ٣ | ٥ |

من اشارة ق(س) :

١/ ق(س) متناقص على [١، ٣] ومتزايد على [٣، ٥]

٢/ ق(١) = ١ − ٦ + ٩ = ٤ عظمى محلية

ق(٥) = ٥^٣ − ٦×٥^٢ + ٩×٥ = ١٢٥ − ١٥٠ + ٤٥ = ٢٠ عظمى مطلقة

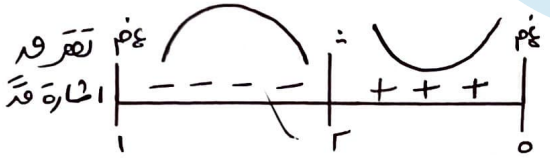
ق(٣) = ٣^٣ − ٦×٣^٢ + ٩×٣ = ٢٧ − ٥٤ + ٢٧ = ٠ صغرى مطلقة

ق'(س) = ٣س^٢ − ١٢س + ٩

ق''(س) = ٦س − ١٢ = ٠ ⇐ ٦س = ١٢ ⇐ س = ٢ ∈ ]١، ٥[ ✓

٣/ ق(س) مقعر لأعلى على ]٢، ٥[

ق(س) مقعر لأسفل على ]١، ٢[




٤/ (٢، ق(٢)) نقطة انعطاف ق متصل عندها وغير من تقعره حولها

ق(٢) = ٢^٣ − ٦×٢^٢ + ٩×٢ = ٨ − ٢٤ + ١٨ = ٢

⇐ (٢، ٢) نقطة انعطاف.

---

• 2019 دور ثاني / ليكن ق(س) = س^٣ − ٣س^٢ − ٩س + ٥ ، س ∈ [−٢، ٦] أوجد كلاً مما يلي

١/ مجالات التزايد والتناقص لـ ق(س)

٢/ القيم القصوى المحلية لـ ق(س)

٣/ مجالات التقعر لأعلى ولأسفل لـ ق(س)

أ.ميّ حوّاري

الحل/

ق(س) = س^٣ − ٣س^٢ − ٩س + ٥ متصل على [−٢، ٦] ك2 ومشتق على ]−٢، ٦[

ق'(س) = (٣س^٢ − ٦س − ٩ = ٠) / ٣

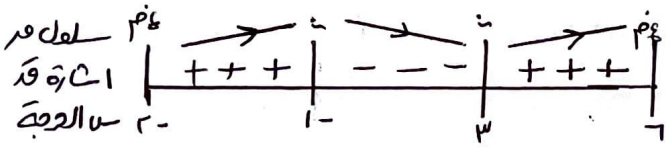
س^٢ − ٢س − ٣ = ٠

(س + ١)(س − ٣) = ٠

إما س + ١ = ٠ ⇐ س = −١ ∈ ]−٢، ٦[ ✓ أو س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣ ∈ ]−٢، ٦[ ✓

١/ ق(س) متناقص في [−١، ٣]

ومتزايد على [−٢، −١] ∪ [٣، ٦]



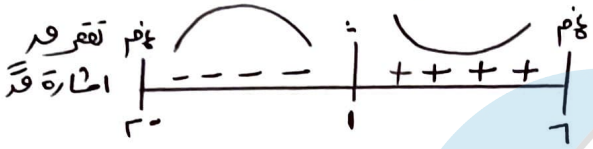

٢/ ق(−٢) = (−٢)^٣ − ٣(−٢)^٢ − ٩×−٢ + ٥ = −٨ − ١٢ + ١٨ + ٥ = ٣ صغرى محلية

ق(−١) = (−١)^٣ − ٣(−١)^٢ − ٩×−١ + ٥ = −١ − ٣ + ٩ + ٥ = ١٠ عظمى محلية

ق(٣) = ٣^٣ − ٣×٣^٢ − ٩×٣ + ٥ = −٢٧ + ٥ = −٢٢ صغرى مطلقة

ق(٦) = ٦^٣ − ٣×٦^٢ − ٩×٦ + ٥ = ٢١٦ − ١٠٨ − ٥٤ + ٥ = ٥٩ عظمى مطلقة

٣) $\text{ق}''(\text{س}) = ٦\text{س} - ٦ = ٠ \Leftarrow ٦\text{س} = ٦ \Leftarrow \text{س} = ١ \in ]-٢ ، ٦[$




• من اشارة $\text{ق}''(\text{س})$ :

ق(س) مقعر لأسفل على $]-٢ ، ١[$

ومقعر لأعلى على $]١ ، ٦[$

---

• 2019 دور ثاني / إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ + \text{ب}\text{س}^٢ + \text{جـ}\text{س} + \text{د}$ حيث $\text{ق}(٠) = ٤$ وكان للاقتران ق(س) نقطة انعطاف عند (س = ١) ومعادلة المماس لمنحنى ق(س) عند نقطة الانعطاف هي $٢\text{س} + \text{ص} - ٥ = ٠$ أوجد قاعدة ق(س).

الحل/ $\text{ق}(٠) = ٤$

ق(س) له انعطاف عند (س = ١) $\Leftarrow \text{ق}''(١) = ٠$

$(١ ، \text{ق}(١)) \in$ للمماس $(٢\text{س} + \text{ص} - ٥) = ٠$

$٢ + \text{ق}(١) - ٥ = ٠ \Leftarrow \text{ق}(١) - ٣ = ٠ \Leftarrow \text{ق}(١) = ٣$

$٢\text{س} + \text{ص} - ٥ = ٠ \Leftarrow ٢ + \text{ص}' = ٠ \Leftarrow \text{ص}' = -٢ =$ ميل المماس

$\Leftarrow -٢ = \text{ق}'(١)$

$\Leftarrow \text{ق}(٠) = ٤ \,/\, \text{ق}'(١) = -٢ \,/\, \text{ق}''(١) = ٠ \,/\, \text{ق}(١) = ٣$

$\text{ق}(٠) = \cancel{٠} + \cancel{\text{ب}(٠)} + \cancel{\text{جـ}(٠)} + \text{د} \Leftarrow \text{د} = ٤$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ + ٢\text{ب}\text{س} + \text{جـ} \Leftarrow \text{ق}''(\text{س}) = ٦\text{س} + ٢\text{ب}$

$\text{ق}''(١) = ٦ + ٢\text{ب} = ٠ \Leftarrow ٢\text{ب} = -٦ \Leftarrow \text{ب} = -٣$

$\text{ق}'(١) = ٣ + ٢\text{ب} + \text{جـ} \Leftarrow -٢ = ٣ + ٢ \times -٣ + \text{جـ} \Leftarrow -٢ + ٣ = \text{جـ}$

$\text{جـ} = ١$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢ + \text{س} + ٤$

أ.ميّ حوّاري

---

• 2020 دور أول / إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = -\frac{١}{٢}\text{جا}^٢\text{س} + \frac{١}{٤}\text{جتا}(٢\text{س}) + \frac{٥}{٤}$ ، $\text{س} \in ]٠ ، \pi[$ أوجد:

١/ مجالات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران ق(س)

٢/ نقطة / نقط الانعطاف للاقتران ق(س)

٣/ زوايا / زاوية الانعطاف للاقتران ق(س)

الحل/ $\text{ق}(\text{س}) = -\frac{١}{٢}\text{جا}^٢(\text{س}) + \frac{١}{٤}\text{جتا}(٢\text{س}) + \frac{٥}{٤}$ متصل على $]٠ ، \pi[$ لأنه حاصل جمع اقترانات متصلة $(\text{جاس} ، \text{جتاس} ، \frac{٥}{٤})$

$\text{ق}'(\text{س}) = -\frac{١}{٢} \times ٢\text{جاس}\,\text{جتاس} + \frac{١}{٤} \times -\text{جا}(٢\text{س}) \times ٢$

$\text{ق}(\text{س}) = -\frac{١}{٢}(\text{جا}(٢\text{س})) + -\frac{١}{٢}(\text{جا}(٢\text{س})) = -\text{جا}(٢\text{س})$

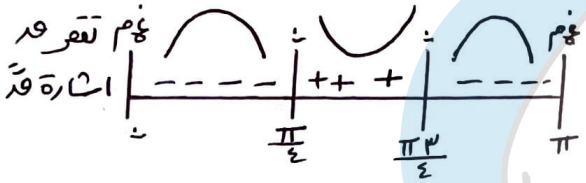
$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جا}(٢\text{س}) \Leftarrow \text{ق}''(\text{س}) = -٢\text{جتا}(٢\text{س}) = ٠$

⇐ جتا(٢س) = ٠

٢س = $\frac{\pi}{2}$ ⇐ س = $\frac{\pi}{4}$ ∈ ]٠، π[

٢س = $\frac{3\pi}{2}$ ⇐ س = $\frac{3\pi}{4}$ ∈ ]٠، π[

١/ من اشارة قَ(س) :




ق(س) مقعر لأسفل على ]٠، $\frac{\pi}{4}$[ ∪ ]$\frac{3\pi}{4}$، π[

و ق(س) مقعر لأعلى على ]$\frac{\pi}{4}$، $\frac{3\pi}{4}$[

٢/ • ق($\frac{\pi}{4}$) = $-\frac{1}{2}$ جا$^2$($\frac{\pi}{4}$) + $\frac{1}{4}$ جتا($\frac{\pi}{2}$) + $\frac{5}{4}$ = $-\frac{1}{2}$($\frac{1}{27}$)$^2$ + $\cancel{\frac{1}{4}}$ × ٠ + $\frac{5}{4}$ = $-\frac{1}{4}$ + $\frac{5}{4}$ = ١

⇐ ($\frac{\pi}{4}$، ١) نقطة انعطاف، ق متصل عندها وغيّر من تقعره حولها

• ق($\frac{3\pi}{4}$) = $-\frac{1}{2}$ جا$^2$($\frac{3\pi}{4}$) + $\frac{1}{4}$ جتا($\frac{3\pi}{2}$) + $\frac{5}{4}$ = $-\frac{1}{2}$($\frac{1}{27}$)$^2$ + $\cancel{\frac{1}{4}}$ × ٠ + $\frac{5}{4}$

⇐ ق($\frac{3\pi}{4}$) = $-\frac{1}{4}$ + $\frac{5}{4}$ = ١ ⇐ ($\frac{3\pi}{4}$، ١) نقطة انعطاف، ق متصل وغيّر من تقعره حولها

٣/ قَ(س) = −جا(٢س)

قَ($\frac{\pi}{4}$) = −جا($\frac{\pi}{2}$) = ظاهـ ⇐ −١ = ظاهـ ⇐ هـ = $\frac{3\pi}{4}$

قَ($\frac{3\pi}{4}$) = −جا($\frac{3\pi}{2}$) = −(−١) = ١ ⇐ ١ = ظاهـ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{4}$

---

2020 دورثاني / إذا كان ق(س) = $\sqrt[3]{س}$ + ٢ أوجد :

١/ مجالات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران ق(س)

٢/ نقطة / نقاط الانعطاف لـ ق(س) "إن وجدت"

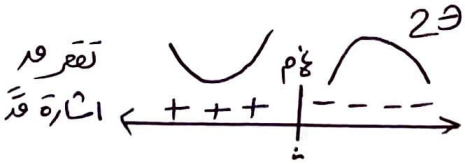
٣/ قياس زاوية / زوايا الانعطاف لـ ق(س) "إن وجدت"

أ.ميّ حوّاري

الحل/ ق(س) = $\sqrt[3]{س}$ + ٢ متصل على 2 .

قَ(س) = $\frac{1}{3}$ س$^{-\frac{2}{3}}$ ⇐ قً(س) = $\frac{-2}{9}$ س$^{-\frac{5}{3}}$ = $\frac{-2}{9\ س^{\frac{5}{3}}}$ ≠ ٠

قً(س) غ م عند أصفار مقام قً ⇐ س = ٠ ∈ 2



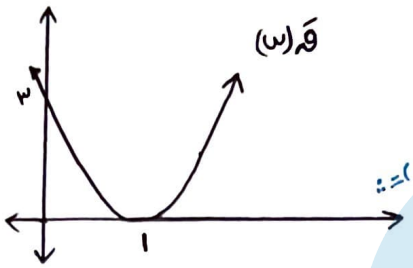

١/ ق(س) مقعر لأعلى على ]−∞، ٠[

ومقعر لأسفل على ]٠، ∞[

٢/ (٠، ق(٠)) = (٠، ٢) نقطة انعطاف، ق متصل عندها وغيّر من تقعره حولها

٣/ قَ(٠) = ظاهـ ⇐ $\frac{1}{3(٠)^{\frac{2}{3}}}$ = $\frac{1}{٠}$ = ظاهـ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{2}$

• 2020 دور ثاني / يمثل الشكل المجاور منحنى ق(س) لكثير حدود من الدرجة الثالثة أوجد قاعدة الاقتران ق(س) إذا علمت أن منحناه يمر بنقطة الأصل ← ق(٠) = ٠




الحل / نفرض ق(س) = أ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + جـ س + د

ق(٠) = د ← ٠ = د

من الرسمة / (١، ٠) تقع على ق ← ق(١) = ٠

(٠، ٣) تقع على ق ← ق(٠) = ٣

عند (س = ١) يمكن رسم مماس أفقي ← ق''(١) = ٠

ق'(س) = ٣أ س$^{٢}$ + ٢ب س + جـ

ق'(٠) = جـ ← ٣ = جـ

ق'(١) = ٣أ + ٢ب + جـ ← ٠ = ٣أ + ٢ب + ٣ ← -٣ = ٣أ + ٢ب — (١)

ق''(س) = ٦أ س + ٢ب

ق''(١) = ٦أ + ٢ب ← ٠ = ٦أ + ٢ب — (٢)

(٢) - (١) / ٣ = ٣أ ← أ = ١ نعوضها في (٢) ← ٠ = ٦ + ٢ب

← -٦ = ٢ب ← -٣ = ب

← ق(س) = س$^{٣}$ - ٣س$^{٢}$ + ٣س

أ.مي حوّاري

---

• 2020 دور ثالث / إذا كان ق(س) = س$^{٣}$ + أ س$^{٢}$ + ب س + جـ له نقطة انعطاف عند (-١، ٨) وكان قياس زاوية الانعطاف عند نقطة الانعطاف تلك يساوي $\frac{٣\pi}{٤}$ أوجد قيم الثوابت أ، ب، جـ

الحل / ق له نقطة انعطاف عند (-١، ٨) ← ق''(-١) = ٠

ق(-١) = ٨

قياس زاوية الانعطاف عند (-١، ٨) = $\frac{٣\pi}{٤}$ ← ق'(-١) = ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ ← ق'(-١) = -١

ق'(س) = ٣س$^{٢}$ + ٢أ س + ب

ق''(س) = ٦س + ٢أ ← ق''(-١) = -٦ + ٢أ ← ٠ = -٦ + ٢أ ← ٦ = ٢أ

← ٣ = أ

ق'(-١) = ٣ - ٢أ + ب ← -١ = ٣ - ٢×٣ + ب ← -١ = -٣ + ب ← ٢ = ب

ق(-١) = -١ + أ - ب + جـ

٨ = -١ + ٣ - ٢ + جـ ← جـ = ٨

أ.مي حوّاري

• 2021 دور أول/ إذا كان ق(س) = ١٢ + س$^{٢}$ + ٢ لو$_{هـ}$(س − ١) ، س > ١ أوجد:

١/ مجالات التقعر لأعلى ولأسفل لـ ق(س)

٢/ نقط الانعطاف (إن وجدت) للاقتران ق(س)

الحل/ ق(س) = ١٢ + س$^{٢}$ + ٢ لو$_{هـ}$(س − ١) متصل على ]١، ∞[ ؛ جمع اقترانات متصلة (لـ ح + لو$_{هـ}$)

ق'(س) = ٢س + $\frac{٢}{س - ١}$

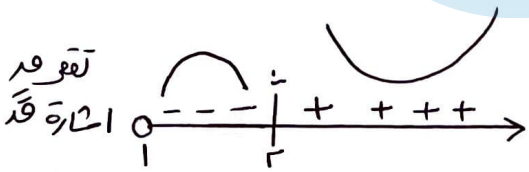
ق''(س) = ٢ − $\frac{٢}{(س-١)^{٢}}$ = ٠ ⇐ ٢ = $\frac{٢}{(س-١)^{٢}}$ ⇐ ١ = (س − ١)$^{٢}$ بأخذ الجذر التربيعي

* لاحظ/ أصفار مقام ق''/ س − ١ = ٠ ، س = ١ ∉ ]١، ∞[

إما س − ١ = ١ ⇐ س = ٢ ✓

أو س − ١ = −١ ، س = ٠ ∉ ]١، ∞[

١/ ق(س) مقعر لأسفل على ]١، ٢[ ومقعر لأعلى على ]٢، ∞[




٢/ (٢، ق(٢)) = (٢، ١٢ + ٢$^{٢}$ + ٢ لو$_{هـ}$ ١)

= (٢، ١٦) نقطة انعطاف ؛ ق متصل وغيّر من تقعره حولها

---

• 2021 دور أول/ إذا كان ق(س) = س$^{٢}$ + $\frac{ب}{س}$ ، س ≠ ٠ ، س ∈ ح باستخدام اختبار المشتقة الثانية بين أن منحنى ق(س) لا يأخذ قيمة عظمى محلية في مجاله

الحل/ ق(س) = س$^{٢}$ + $\frac{ب}{س}$ متصل على ح/{٠} "جمع متصلين لـ ح ونسبي مقامه ≠ ٠"

ق'(س) = ٢س − $\frac{ب}{س^{٢}}$ = ٠ ⇐ ٢س = $\frac{ب}{س^{٢}}$ ⇐ ٢س$^{٣}$ = ب ⇐ س$^{٣}$ = $\frac{ب}{٢}$

⇐ س = $\sqrt[٣]{\frac{ب}{٢}}$ ∈ ح

أ.ميّ حوّاري

ق''(س) = ٢ + $\frac{٢ب}{س^{٣}}$ ⇐ ق''($\sqrt[٣]{\frac{ب}{٢}}$) = ٢ + $\frac{٢ب}{\frac{ب}{٢}}$ = ٢ + ٢ب × $\frac{٢}{ب}$ ، ب ≠ ٠

ق''($\sqrt[٣]{\frac{ب}{٢}}$) = ٢ + ٢ = ٤ > ٠ ⇐ حسب اختبار المشتقة الثانية ($\sqrt[٣]{\frac{ب}{٢}}$ ، ق($\sqrt[٣]{\frac{ب}{٢}}$)) صغرى محلية وحيدة ؛ لا يوجد قيم عظمى لـ ق(س) على مجاله

#

---

• 2021 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = أ س$^{٣}$ + ٣س$^{٢}$ + ٢ب حيث أ، ب ∈ ح وكان لمنحنى ق(س) قيمة عظمى محلية قيمتها ٨ وله نقطة انعطاف عند (س = ١) أوجد قيمة الثابتين أ، ب

ق''(١) = ٠

الحل/ ق(س) = أ س$^{٣}$ + ٣س$^{٢}$ + ٢ب لـ ح متصل ومشتق على ح

ق'(س) = ٣أ س$^{٢}$ + ٦س

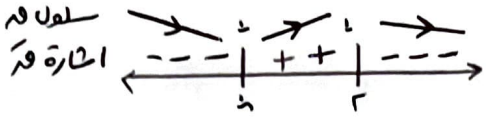
ق''(س) = ٦أ س + ٦

ق''(١) = ٦أ + ٦ = ٠ ⇐ $\frac{٦أ}{٦}$ = $\frac{-٦}{٦}$ ⇐ أ = −١

⇐ ق'(س) = −٣س$^{٢}$ + ٦س = ٠

−٣س(س − ٢) = ٠

إما $-٣س = ٠ \Leftarrow س = ٠$ أو $س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$




ق(٢) عظمى محلية

$\Leftarrow$ ق(٢) = ٨

$-(٢)^٣ + ٣(٢)^٢ + ٢ب = ٨$

$-٨ + ١٢ + ٢ب = ٨ \Leftarrow ٢ب = ٤ \Leftarrow ب = ٢$

---

• 2021 دور ثاني / إذا كان $ق(س) = \frac{١}{٢}س^٤ - ٣س^٣ + ١٢س$ ، $س \in [-٣ ، ٧]$ ، جد

١/ مجالات التقعر لأعلى ولأسفل لـ ق(س)

٢/ نقط الانعطاف "إن وجدت" لـ ق(س)

الحل/ $ق(س) = \frac{١}{٢}س^٤ - ٣س^٣ + ١٢س$ متصل على $[-٣ ، ٧]$ لأنه كح

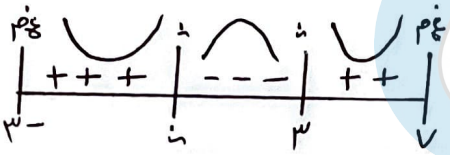
أ.مي حوّاري

$قَ(س) = ٢س^٣ - ٩س^٢ + ١٢$

$قً(س) = ٦س^٢ - ١٨س = ٠$

$٦س(س - ٣) = ٠$

إما $٦س = ٠ \Leftarrow س = ٠ \in ]-٣ ، ٧[$ أو $س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = ٣ \in ]-٣ ، ٧[$




١/ • ق(س) مقعر لأسفل على $]٠ ، ٣[$

ومقعر لأعلى على $]-٣ ، ٠[ \cup ]٣ ، ٧[$

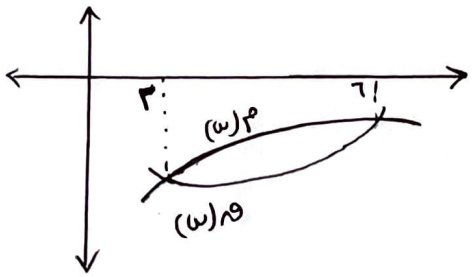
٢/ $(٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠)$ نقطة انعطاف ، ق متصل عندها وغيّر من تقعره حولها

$(٣ ، ق(٣)) = (٣ ، -\frac{٩}{٢})$ نقطة انعطاف ، ق متصل عندها وغيّر من تقعره حولها

* $ق(٣) = \frac{١}{٢}(٣)^٤ - ٣(٣)^٣ + ١٢ \times ٣ = \frac{٨١}{٢} - ٨١ + ٣٦ = \frac{٨١}{٢} - ٤٥ = -\frac{٩}{٢}$

---

• 2021 دور ثاني / الشكل المجاور يمثل منحنيي كل من الاقترانين ق(س) ، م(س) في $[٢ ، ٦]$ حيث $كَ(س) = هـ^{ق(س) مَ(س)}$ ، بين أن ك(س) مقعر لأعلى في $]٢ ، ٦[$




الحل/ * ق ، م يقعان تحت محور السينات في $[٢ ، ٦]$

$\Leftarrow$ ق < ٠ و م < ٠ على $[٢ ، ٦]$ .

* ق(س) متزايد على $[٢ ، ٦] \Leftarrow قَ(س) > ٠$ على $]٢ ، ٦[$

ق(س) مقعر لأعلى على $]٢ ، ٦[ \Leftarrow قً(س) > ٠$ على $]٢ ، ٦[$

* م(س) متزايد على $[٢ ، ٦] \Leftarrow مَ(س) > ٠$ على $]٢ ، ٦[$

* م(س) مقعر لأسفل على $]٢ ، ٦[ \Leftarrow مً(س) < ٠$ على $]٢ ، ٦[$

$كَ(س) = هـ^{ق مَ}$ متصل على $[٢ ، ٦]$

$كً(س) = هـ^{ق مَ}(ق مً + مَ قَ)$

$كً(س) = (موجب)(سالب \times سالب + موجب \times موجب) = موجب(موجب + موجب)$

⇐ ق''(س) موجب على ]٢، ٦[ ← ل(س) مقعر لأعلى على ]٢، ٦[ #

---

2021 دور ثالث / إذا كان المستقيم ص = ١ − ٢س يمس منحنى الاقتران ق(س) = أس³ + ب س² + جـ س عند نقطة انعطاف ق(س) وهي (١، −١١) ما قيمة الثوابت أ، ب، جـ

الحل / (١، −١١) نقطة انعطاف لـ ق(س) ← ق(١) = −١١ ، ق''(١) = ٠

ص = ١ − ٢س مماس لـ ق عند س = ١

ص' = −٢ = ميل المماس ⇐ −٢ = ق'(١)

ق'(س) = ٣أس² + ٢ب س + جـ ← ق''(س) = ٦أس + ٢ب

ق(١) = أ(١)³ + ب(١)² + جـ(١)
−١١ = أ + ب + جـ − (١)

ق'(١) = ٣أ(١)² + ٢ب(١) + جـ
−٢ = ٣أ + ٢ب + جـ − (٢)

ق''(١) = ٦أ(١) + ٢ب
(∵ ٦أ + ٢ب) / ٢
∴ = ٣أ + ب − (٣)

بطرح / (٢) − (١) / −١ = ٢أ + ب − (٤)

بطرح (٣) − (٤) / أ = ١ نعوضها في (٣) ⇐ ∴ = ٣ + ب ⇐ −٣ = ب

نعوض (أ، ب) في (١) ⇐ −١١ = ١ − ٣ + جـ ⇐ −١١ = −٢ + جـ ⇐ −٩ = جـ

---

2022 دور أول / اذا كان ق(س) = ٢جتا²س + س² معرفاً على ]∴، π[ ، حدد فترات التقعر لأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س)

الحل / ق(س) = ٢جتا²س + س² متصل على ]∴، π[ ، حاصل جمع متصلين (جتا²س + ك٢).

ق'(س) = ٤جتاس × −جاس + ٢س

ق''(س) = −٢ × ٢جاس جتاس + ٢س

ق''(س) = −٢جا(٢س) + ٢س

ق''(س) = −٢ × ٢جتا(٢س) + ٢ = ٠

٢ = ٤جتا(٢س) ⇐ ½ = جتا(٢س)

٢س = π/٣ ⇐ س = π/٦ ∈ ]∴، π[ أو ٢س = ٢π − π/٣ في الرابع

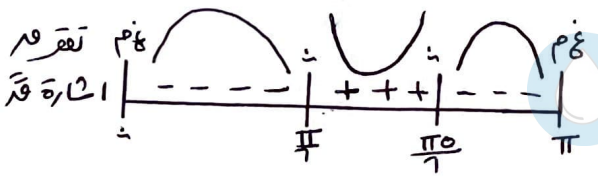
٢س = ٥π/٣ ← س = ٥π/٦ ∈ ]∴، π[

أ.ميّ حوّاري

• من اشارة ق''(س) :

ق(س) مقعر لأعلى على ]π/٦، ٥π/٦[

ومقعر لأسفل على ]٥π/٦، π[ ∪ ]∴، π/٦[




---

• 2022 دور أول / إذا كان م(س) = (ق(س) - س٤)٢ وكان لمنحنى ق(س) كثير الحدود قيمة عظمى محلية عند (-١، ٣) وكانت مَ(-١) = ٨ ما قيمة قَ(-١)

الحل / ق كثير حدود متصل وقابل للاشتقاق على ح

ق له عظمى محلية عند (-١، ٣) ← قَ(-١) = ٠

← ق(-١) = ٣

م(س) = (ق(س) - س٤)٢

مَ(س) = ٢(ق(س) - س٤)(قَ(س) - ٤س٣)

مَ(س) = ٢(ق(س) - س٤)(قَ(س) - ٤س٣) + (قَ(س) - ٤س٣) × ٢(قَ(س) - ٤س٣)

مَ(-١) = ٢(ق(-١) - (-١)٤)(قَ(-١) - ٤) + ٢(قَ(-١) - ٤)٢

٨ = ٢(٣ - ١)(قَ(-١) - ٤) + ٢(٠ + ٢)٢

٨ = ٤(قَ(-١) - ٤) + ٤×٢ ← ٨ = ٤قَ(-١) - ١٦ + ٨ ← قَ(-١) = ٢

---

• 2022 دور أول / إذا كان لمنحنى ق(س) = أس٣ - ب س٤ ، س > ٠ وكان ق(١) = ١ وكان للاقتران ق(س) نقطة انعطاف هي (أ، ق(أ)) جد:

١/ قيم كل من الثابتين أ، ب ٢/ ظل زاوية الانعطاف لمنحنى ق(س)

الحل / ١/ نقطة انعطاف لـ ق عند س = أ ← قَ(أ) = ٠

قَ(س) = ٣أ س٢ - ٤ب س٣ ← قَ(س) = ٦أ س - ١٢ب س٢

قَ(أ) = ٦أ×أ - ١٢ب×أ٢

٠ = ٦أ٢ - ١٢أ٢ب

٠ = ٦أ٢(١ - ٢ب)

إما ٦أ٢ = ٠ ← أ = ٠ ✗ أو ١ - ٢ب = ٠ ← ٢ب = ١ ← ب = ١/٢

ق(١) = أ - ب ← ١ = أ - ١/٢ ← أ = ٣/٢

٢/ ق(س) = ٣/٢ س٣ - ١/٢ س٤

قَ(س) = ٩/٢ س٢ - ٢ س٣ ← ظاهـ = قَ(٣/٢) ← ظاهـ = ٩/٢ (٣/٢)٢ - ٢(٣/٢)٣

← ظاهـ = ٨١/٨ - ٥٤/٨ ← ظاهـ = ٢٧/٨

أ.مي حوّاري

---

• 2022 دور ثاني / إذا كان ق(س) = أس٣ + ب س٢ - ١٢س وكان لمنحنى الاقتران مماساً أفقياً عند (-١، ٧) ما قيمة الثابتين أ، ب.

الحل / لـ ق(س) مماساً أفقياً عند (-١، ٧) ← ق(-١) = ٧

← قَ(-١) = ٠

قَ(س) = ٣أ س٢ + ٢ب س - ١٢

قَ(-١) = ٣أ - ٢ب - ١٢ ← ٠ = ٣أ - ٢ب - ١٢ ← ٣أ - ٢ب = ١٢ ... (١)

ق(-١) = -أ + ب + ١٢ ← ٧ = -أ + ب + ١٢ ← -٥ = -أ + ب ×٢

-١٠ = -٢أ + ٢ب ... (٢)

$١٢ = ٣أ - ٢ب$

$-١٠ = -٢أ + ٢ب$ بالجمع

$أ = ٢$ نعوضها في (١) / $١٢ = ٣ \times ٢ - ٢ب \Leftarrow ١٢ = ٦ - ٢ب$

$\frac{٦}{-٢} = \frac{-٢ب}{-٢} \Leftarrow -٣ = ب$

---

• 2022 دور ثاني/ إذا كان لمنحنى ق(س) = $س^٣ + أس^٢ + بس$ قيمة عظمى محلية عند (س = -١) وقيمة صغرى محلية عند (س = ٢) جد:

١/ قيمة كل من الثابتين أ، ب ٢/ مجالات التقعر للأعلى ولأسفل لـ ق(س)

الحل/ ١/ $ق'(-١) = ق'(٢) = ٠$ ، ق لـ ح متصل ومشتق على ح

$ق'(س) = ٣س^٢ + ٢أس + ب$

$ق'(-١) = ٣ - ٢أ + ب \Leftarrow ٠ = ٣ - ٢أ + ب \Leftarrow ٢أ - ب = ٣$ — (١)

$ق'(٢) = ٣(٢)^٢ + ٢أ \times ٢ + ب \Leftarrow ٠ = ١٢ + ٤أ + ب \Leftarrow ٤أ + ب = -١٢$ — (٢)

(١) + (٢) / $٦أ = -٩ \Leftarrow أ = \frac{-٩}{٦} \Leftarrow أ = \frac{-٣}{٢}$ نعوضها في (١)

$\Leftarrow ٢أ - ب = ٣ \Leftarrow ٢ \times \frac{-٣}{٢} - ب = ٣ \Leftarrow -٣ - ب = ٣ \Leftarrow -٣ - ٣ = ب$

$\Leftarrow -٦ = ب$

٢/ $ق(س) = س^٣ - \frac{٣}{٢}س^٢ - ٦س$

$ق'(س) = ٣س^٢ - ٣س - ٦$

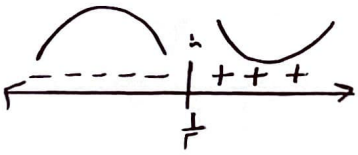
$ق''(س) = ٦س - ٣ = ٠ \Leftarrow ٦س = ٣ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

من إشارة $ق''(س)$:

ق(س) مقعر لأعلى على $]\frac{١}{٢}، \infty[$

ومقعر لأسفل على $]-\infty، \frac{١}{٢}[$

تقعر ق
إشارة $ق''$



---

• 2022 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = $(س^٢ - ٤)^٢$ جد:

١/ مجالات التقعر لأعلى ولأسفل لـ ق(س) ٢/ نقط الانعطاف لـ ق(س)

أ.ميّ حوّاري

الحل/ $ق(س) = (س^٢ - ٤)^٢$ لـ ح متصل ومشتق على ح

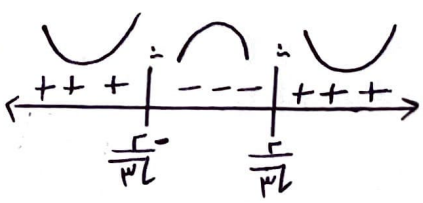
$ق'(س) = ٢(س^٢ - ٤) \times ٢س$

$ق'(س) = ٤س^٣ - ١٦س$

$ق''(س) = ١٢س^٢ - ١٦ = ٠ \Leftarrow ١٢س^٢ = ١٦ \Leftarrow س^٢ = \frac{١٦}{١٢} = \frac{٤}{٣}$

$س^٢ = \frac{٤}{٣} \Leftarrow س = \{\frac{٢}{\sqrt{٣}}، \frac{-٢}{\sqrt{٣}}\}$

سلوك ق
إشارة $ق''$



١/ من إشارة $ق''(س)$:

ق(س) مقعر لأعلى على $]-\infty، \frac{-٢}{\sqrt{٣}}[ \cup ]\frac{٢}{\sqrt{٣}}، \infty[$

و ق(س) مقعر لأسفل على $]\frac{-٢}{\sqrt{٣}}، \frac{٢}{\sqrt{٣}}[$

٢/ $ق\left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right) = \left(\left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right)^٢ - ٤\right)^٢ = \left(\frac{٤}{٣} - ٤\right)^٢ = \left(\frac{-٨}{٣}\right)^٢ = \frac{٦٤}{٩}$

⇐ $\left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}، \frac{٦٤}{٩}\right)$ ، $\left(\frac{-٢}{\sqrt{٣}}، \frac{٦٤}{٩}\right)$ نقطتا انعطاف ، ق متصل عندها وغيّر من تقعره حولها.

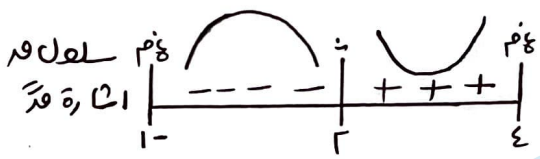
---

• 2023 دور أول/ إذا كان $ق(س) = س^٣ - ٦س^٢ + ٩س$ معرفاً على $[-١، ٤]$ ، جد لمنحنى ق(س) فترات التقعر لأعلى ولأسفل ونقاط الانعطاف إن وجدت

الحل/ $ق(س) = س^٣ - ٦س^٢ + ٩س$ ، ق متصل على $[-١، ٤]$

$قَ(س) = ٣س^٢ - ١٢س + ٩$

$قً(س) = ٦س - ١٢ = ٠ \leftarrow \frac{٦}{٦}س = \frac{١٢}{٦} \leftarrow س = ٢ \in ]-١، ٤[$



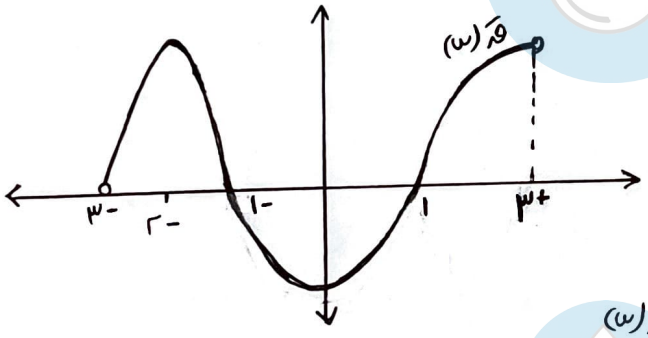

• ق(س) مقعر لأعلى على $]٢، ٤[$
ومقعر لأسفل على $]-١، ٢[$

• $ق(٢) = ٢^٣ - ٦(٢)^٢ + ٩ \times ٢$
$= ٨ - ٢٤ + ١٨ = ٢$

⇐ $(٢، ٢)$ نقطة انعطاف ، ق متصل عندها وغيّر من تقعره حولها.

---

• 2023 دور أول/




يمثل الشكل المجاور منحنى قَ(س) لكثير الحدود ق(س) المعرف على $[-٣، ٣]$
إذا علمت أن للاقتران قَ(س) نقاط انعطاف عند كل من (س=١) و (س=-١) معتمداً عليه جد:

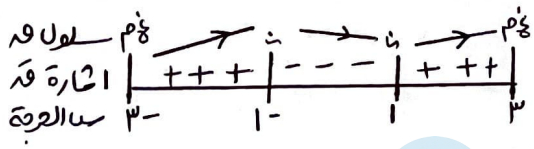
١/ مجالات التزايد والتناقص لـ ق(س)

٢/ مجالات التزايد والتناقص لـ قً(س)

الحل/ ١/ لـ تزايد وتناقص ق(س) نحتاج إلى اشارة قَ ، ومن رسمة قَ:

قَ يقع فوق محور السينات في $]-٣، -١[$ ← قَ(س) > ٠ على نفس الفترة

قَ يقع تحت محور السينات في $]-١، ١[$ ← قَ(س) < ٠ على نفس الفترة.



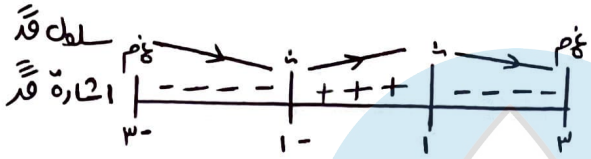

أ.ميّ حوّاري

⇐ ق(س) متزايد على $[-٣، -١] \cup [١، ٣]$ ، ق(س) متناقص على $[-١، ١]$

٢/ تزايد وتناقص قً(س) نحتاج اشارة قً(س) وهي عبارة عن تقعر قَ(س)

قَ(س) مقعر لأسفل على $]-٣، -١[ \cup ]١، ٣[$ ← قً(س) < ٠ على نفس الفترة

• قَ(س) مقعر لأعلى على ]-١، ١[ ← قً(س) > ٠ على نفس الفترة




قً(س) متزايد على ]-١، ١[
ومتناقص على ]-٣، -١[ ∪ ]١، ٣[

---

• 2023 دور ثاني / إذا كان ق(س) = س هـ^س ، س ∈ [-٤، ٢] جد كلاً مما يلي:

١/ مجالات التقعر لأعلى ولأسفل لمنحنى ق في ]-٤، ٢[

٢/ نقاط الانعطاف لـ ق(س) "إن وجدت"

الحل/ ق(س) = س هـ^س متصل على [-٤، ٢] ، حاصل ضرب متصلين (ك ح و هـ^س)

قَ(س) = س هـ^س + هـ^س

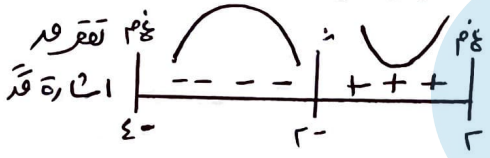
قً(س) = س هـ^س + هـ^س + هـ^س = س هـ^س + ٢هـ^س

∴ = س هـ^س + ٢هـ^س  اخراج هـ^س عامل مشترك

∴ = هـ^س (س + ٢)

هـ^س ≠ ∴  أو س + ٢ = ∴ ← س = -٢ ∈ ]-٤، ٢[

أ.ميّ حوّاري

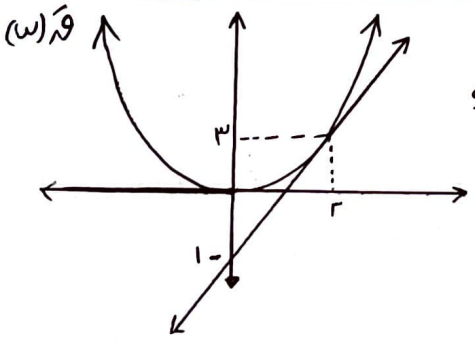



١/ ق(س) مقعر لأعلى على ]-٢، ٢[
ومقعر لأسفل على ]-٤، -٢[

٢/ ق(-٢) = -٢هـ^-٢ = -٢/هـ^٢ ← (-٢، -٢/هـ^٢) نقطة انعطاف ؛ ق متصل وغيّر من تقعره حولها

---

• 2022 دور ثاني / الشكل المجاور يمثل منحنى كثير الحدود قَ(س) ، والمماس له عند (س = ٢) ، معتمداً عليه جد:




١/ مجالات التزايد والتناقص لـ ق(س)

٢/ مجالات التقعر لأعلى ولأسفل لـ ق(س)

٣/ نها (س ← ١) (٣ - قَ(٢س)) / (س - ١)

الحل/ ١/ لـ تزايد وتناقص ق(س) نحتاج اشارة قَ(س)
من الرسمة / قَ(س) يقع فوق محور السينات ← قَ(س) > ٠ على ح .

⇐ ق(س) متزايد على ح

٢/ تقعر ق ← اشارة قً ← تزايد وتناقص قَ

* قَ متناقص على ]-∞، ٠[ ← قً(س) < ٠ على نفس الفترة

⇐ ق(س) مقعر لأسفل على ]-∞، ٠[

* قَ متزايد على ]٠، ∞[ ← قً(س) > ٠ على نفس الفترة

⇐ ق(س) مقعر لأعلى على ]٠، ∞[

٣/ من الرسمة (٢،٣) ∈ قَ ← قَ(٢) = ٣
(٢،٣) (ن،-١)

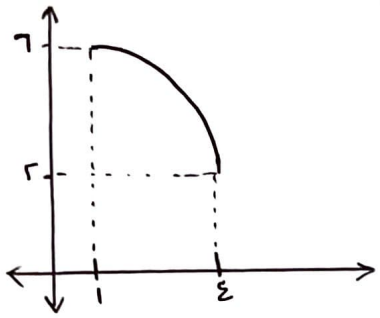
ميل المماس | س=٢ = قَ(٢) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ← قَ(٢) = $\frac{٣-١}{٢}$ = ٢

نها س←١ $\frac{٣ - قَ(٢س)}{س - ١}$ = $\frac{٣ - قَ(٢)}{١ - ١}$ = $\frac{٣ - ٣}{ن}$ = $\frac{ن}{ن}$

باستخدام لوبيتال / نها س←١ $\frac{-٢قَ(٢س)}{١}$ = -٢قَ(٢) = -٢×٢ = -٤

---

• 2023 دور ثاني / الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) في [١،٤] إذا كان ل(س) = ٢س ق(س)
أثبت أن ل(س) مقعراً لأسفل على ]١،٤[



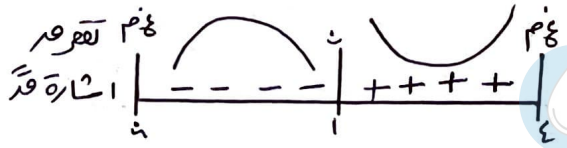

الحل / من الشكل المجاور:
* ق(س) يقع فوق محور السينات في [١،٤]
← ق(س) > ن على [١،٤]
* ق(س) متناقص على [١،٤] ← قَ(س) < ن على ]١،٤[
* ق(س) مقعر لأسفل على ]١،٤[ ← قً(س) < ن على ]١،٤[
* ل(س) = ٢س ق(س) متصل على [١،٤]
لَ(س) = ٢س قَ(س) + ٢ق(س)
لً(س) = ٢س قً(س) + ٢قَ(س) + ٢قَ(س)
لً(س) = ٢س قً(س) + ٤قَ(س)
لً(س) = (موجب)(سالب) + سالب = سالب + سالب
← لً(س) < ن على ]١،٤[ ← ل(س) مقعر لأسفل على ]١،٤[

أ.ميّ حوّاري

---

• 2024 دور أول / إذا كان ق(س) = س² + ٢لو$_{هـ}$س ، س ∈ ]ن،٤] جد:
١/ فترات التقعر لأعلى ولأسفل لمنحنى ق(س) على ]ن،٤]
٢/ نقاط الانعطاف "إن وجدت" لـ ق(س)

الحل / ق(س) = س² + ٢لو$_{هـ}$س متصل على ]ن،٤] ، جمع متصلين (لاح ولو غاريتمي ما داخله +)
قَ(س) = ٢س + $\frac{٢}{س}$ ← قً(س) = ٢ - $\frac{٢}{س^٢}$ = ن ← ٢ = $\frac{٢}{س^٢}$ ← س² = ١
← س = ١ ∈ ]ن،٤] ✓
أو س = -١ ∉ ]ن،٤] ✗




١/ ق(س) مقعر لأعلى على ]١،٤[
ومقعر لأسفل على ]ن،١[

٢/ ق(١) = ١ + ٢لو$_{هـ}$١ = ١ ← (١،١) انعطاف ، ق متصل وغير من تقعره حولها

---

• 2024 دور أول/ اذا كان ق(س) كثير حدود حيث ق(س) = $-\frac{1}{2}$ س$^3$ + ٣س$^2$ + ع(س) ، وكان للاقتران ق(س) نقطة انعطاف أفقي عند (٢،١) وكان ل(س) = ع$^2$(س) + س$^2$ ، ع(س) + ٠ جد ل″(٢)

الحل/ ∵ ق(س) نقطة انعطاف أفقي عند (٢،١) ← ق(٢) = ١ ، ق′(٢) = ٠ ، ق″(٢) = ٠

ق(س) = $-\frac{1}{2}$ س$^3$ + ٣س$^2$ + ع(س)
ق(٢) = $-\frac{1}{2}$(٢)$^3$ + ٣(٢)$^2$ + ع(٢)
١ = −٤ + ١٢ + ع(١)
−٧ = ع(١)

ق′(س) = $-\frac{3}{2}$ س$^2$ + ٦س + ع′(س)
ق′(٢) = $-\frac{3}{2}$ × ٤ + ٦ × ٢ + ع′(٢)
٠ = −٦ + ١٢ + ع′(٢)
−٦ = ع′(٢)

ق″(س) = −٣س + ٦ + ع″(س)
ق″(٢) = −٣ × ٢ + ٦ + ع″(٢)
٠ = ع″(٢)

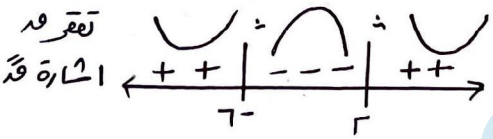
ل(س) = ع$^2$(س) + س$^2$
ل′(س) = ٢ع(س) ع′(س) + ٢س
ل″(س) = ٢ع(س) ع″(س) + ٢ع′(س) ع′(س) + ٢
ل″(٢) = ٢ع(٢) ع″(٢) + ٢(ع′(٢))$^2$ + ٢
ل″(٢) = ٢(−٧)(٠) + ٢(−٦)$^2$ + ٢ = ٢ × ٣٦ + ٢ = ٧٢ + ٢
⇐ ل″(٢) = ٧٤

أ.ميّ حوّاري

---

• 2024 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = (س$^2$ − ١٤) هـ$^س$ ، س ∈ ح جد:
١/ فترات التقعر لأعلى ولأسفل ∵ ق(س)
٢/ نقطة/ نقاط الانعطاف لمنحنى ق(س) ، إن وجدت.

الحل/ ق(س) = (س$^2$ − ١٤) هـ$^س$ متصل على ح (ك ح و هـ$^س$)
ق′(س) = (س$^2$ − ١٤) هـ$^س$ + ٢س هـ$^س$ "إخراج هـ$^س$ عامل مشترك"
ق′(س) = هـ$^س$ (س$^2$ + ٢س − ١٤)
ق″(س) = هـ$^س$ (٢س + ٢) + (س$^2$ + ٢س − ١٤) هـ$^س$
ق″(س) = هـ$^س$ (٢س + ٢ + س$^2$ + ٢س − ١٤)
ق″ = هـ$^س$ (س$^2$ + ٤س − ١٢) = ٠
هـ$^س$ ≠ ٠ أو س$^2$ + ٤س − ١٢ = ٠
(س − ٢)(س + ٦) = ٠
س = ٢ ، س = −٦

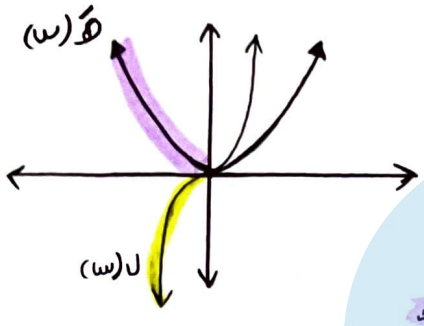


١/ ق(س) مقعر لأسفل على ]−٦، ٢[
ومقعر لأعلى على ]−∞، −٦[ ∪ ]٢، ∞[

تقعر ق
اشارة ق″
+ + | − − − | + +
−٦ ، ٢

٢/ ق(٢) = (٢$^2$ − ١٤) هـ$^2$ = −١٠ هـ$^2$
ق(−٦) = (٣٦ − ١٤) هـ$^{-6}$ = $\frac{22}{هـ^6}$

⇐ (٢، −١٠هـ$^2$) ، (−٦، $\frac{22}{هـ^6}$) انعطاف ، ق متصل عندها وغيّر من تقعره حولها.




• 2024 دور ثاني/ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على 2
قَ(س) = هَ(س) ل(س) بالاعتماد على الشكل المجاور
الذي يمثل هَ(س)، ل(س) حدد نوع التقعر لمنحنى
ق(س) على ]-∞، ٠[

الحل/ في ]-∞، ٠[ :

* هَ(س) يقع فوق محور السينات ← هَ(س) > ٠
* هَ(س) متناقص ← هً(س) < ٠
* ل(س) تحت محور السينات ← ل(س) < ٠
* ل(س) متزايد ← لَ(س) > ٠

قَ(س) = هَ(س) ل(س) متصل حاصل ضرب متصلين على ]-∞، ٠[
قً(س) = هَ لَ + ل هً على ]-∞، ٠[
قً = (موجب)(+) + (سالب)(سالب)
قً = موجب + موجب
← قً > ٠ على ]-∞، ٠[ ← ق مقعر لأعلى على ]-∞، ٠[

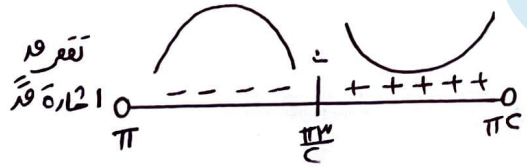
---

• 2024 دور ثالث/ عين فترات التقعر لأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = هـ^س جاس ، س ∈ ]π، ٢π[

الحل/ ق(س) = هـ^س جاس متصل على ]π، ٢π[ ، حاصل ضرب متصلين (هـ^س ، جاس)
قَ(س) = هـ^س جتاس + جاس هـ^س = هـ^س (جتاس + جاس)
قً = هـ^س (-جاس + جتاس) + (جتاس + جاس) هـ^س  اخراج هـ^س عامل مشترك .
قً = هـ^س (-جاس + جتاس + جتاس + جاس)

أ.ميّ حوّاري

قً(س) = هـ^س × ٢ جتاس = ٠
٢هـ^س ≠ ٠  جتاس = ٠
س = ٣π/٢ ∈ ]π، ٢π[




• ق(س) مقعر لأسفل على ]π، ٣π/٢[
ق(س) مقعر لأعلى على ]٣π/٢، ٢π[

---

• 2025 دور أول/ إذا كان ق(س) كثير حدود وكان للاقتران ق(س) نقطة انعطاف أفقي عند (١، ٢) وكان هـ(س) = (س - ق(س))^٣ ما قيمة هً(١)

الحل/ ق(س) لـ ح متصل ومشتق على 2
ق له نقطة انعطاف أفقي عند (١، ٢)
ق(١) = ٢
قَ(١) = ٠
قً(١) = ٠

$\text{هـ}(\text{س}) = (\text{س} - \text{ق}(\text{س}))^{٣}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = ٣(\text{س} - \text{ق}(\text{س}))^{٢}(١ - \text{ق}'(\text{س}))$

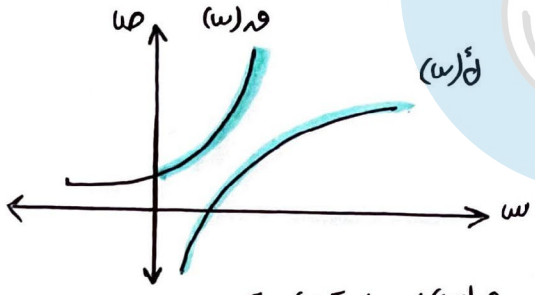
$\text{هـ}''(\text{س}) = ٣(\text{س} - \text{ق}(\text{س}))^{٢} \times -\text{ق}''(\text{س}) + (١ - \text{ق}'(\text{س})) \times ٣ \times ٢(\text{س} - \text{ق}(\text{س}))(١ - \text{ق}'(\text{س}))$

$\text{هـ}''(١) = ٣(١ - \text{ق}(١))^{٢} \times -\text{ق}''(١) + ٦(١ - \text{ق}'(١))^{٢}(١ - \text{ق}(١))$

$\text{هـ}''(١) = ٦(١ - ٠)^{٢}(١ - ٢) = ٦ \times ١ \times -١ \Leftarrow \text{هـ}''(١) = -٦$

---

• 2025 دور أول / يمثل الشكل المجاور منحنى كل من الاقترانين ق(س) ، ك(س) بين أن $\text{ل}(\text{س}) = \frac{\text{ك}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}$ متناقص على $2^{+}$




الحل / من الشكل /

ق(س) يقع فوق محور السينات على $]٠ ، \infty[$ ← ق(س) > ٠ على $]٠ ، \infty[$

ق(س) متزايد على $]٠ ، \infty[$ ← ق'(س) > ٠ على $]٠ ، \infty[$

ك(س) متزايد على $]٠ ، \infty[$ ← ك'(س) > ٠ على $]٠ ، \infty[$

ك(س) مقعر لأسفل على $]٠ ، \infty[$ ← ك''(س) < ٠ على $]٠ ، \infty[$ .

* $\text{ل}(\text{س}) = \frac{\text{ك}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}$ ← $\text{ل}'(\text{س}) = \frac{\text{ق}(\text{س})\text{ك}''(\text{س}) - \text{ك}'(\text{س})\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}^{٢}(\text{س})}$

← $\text{ل}'(\text{س}) = \frac{(\text{موجب})(\text{سالب}) - (\text{موجب})(\text{موجب})}{(\text{موجب})} = \frac{\text{سالب} + \text{سالب}}{\text{موجب}} = \text{سالب}$

ل'(س) < ٠ على $]٠ ، \infty[$ ← ل'(س) متناقص على $2^{+}$ #

---

• 2025 دور أول / إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}}$ ، س ∈ 2 جد:

١/ فترات التقعر لأعلى ولأسفل لـ ق(س)

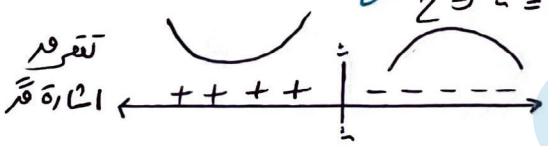
٢/ نقط الانعطاف وزوايا الانعطاف لـ ق(س)

أ.ميّ حوّاري

الحل / $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}}$ متصل على 2

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٣}\text{س}^{-\frac{٢}{٣}}$ ← $\text{ق}''(\text{س}) = -\frac{٢}{٩}\text{س}^{-\frac{٥}{٣}} = \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}}} \neq ٠$

ق''(س) غ م عند أصفار مقام ق'' ← س = ٠ ∈ 2




١/ ق(س) مقعر لأعلى على $]-\infty ، ٠[$ ومقعر لأسفل على $]٠ ، \infty[$

٢/ (٠ ، ٠) نقطة انعطاف ، ق متصل عندها وغير من تقعره .

ظاهـ = ق'(٠) ← ظاهـ = $\frac{-٢}{٩ \times ٠} = -\infty$ ← هـ = $\frac{\pi}{٢}$ زاوية الانعطاف

• 2025 دور ثاني / إذا كان ق(س) = س|س| جد:

١/ فترات التقعر لأعلى ولأسفل لمنحنى ق(س)

٢/ نقط وزوايا الانعطاف لمنحنى ق(س) "إن وجدت".

الحل / ق(س) = س|س| متصل على ح ، حاصل ضرب متصلين (لو ح و |س|)

$|س| = \begin{cases} -س ، س < ٠ \\ س ، س \geq ٠ \end{cases}$

أ.ميّ حوّاري

⇐ ق(س) = س|س| = $\begin{cases} -س^٢ ، س < ٠ \\ س^٢ ، س \geq ٠ \end{cases}$

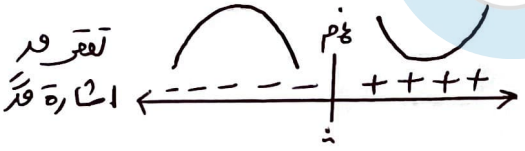
قَ(س) = $\begin{cases} -٢س ، س < ٠ \\ ٢س ، س \geq ٠ \end{cases}$

لاحظ / قَ(٠)$^+$ = ٢ × ٠ = ٠
قَ(٠)$^-$ = -٢ × ٠ = ٠
= [
⇐ قَ(٠) موجودة .

قً(س) = $\begin{cases} -٢ ، س < ٠ \\ ٢ ، س > ٠ \\ غ م ، س = ٠ \end{cases}$

لاحظ / قً(٠)$^+$ = ٢
قً(٠)$^-$ = -٢
≠ [
قً(٠) غ م

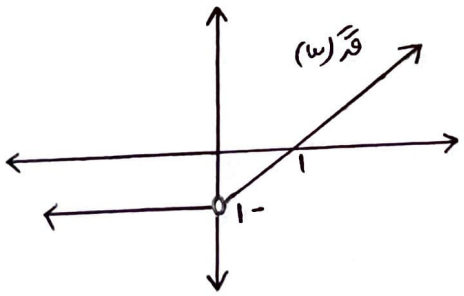
قً(س) ≠ ٠




١/ ق مقعر لأسفل على ]-∞ ، ٠[
ق مقعر لأعلى على ]٠ ، ∞[

٢/ (٠ ، ٠) نقطة انعطاف ، ق متصل عندها وغيّر من تقعره.
قَ(٠) = ظاهـ ⇐ ٠ = ظاهـ ⇐ هـ = ٠ زاوية الانعطاف

• 2025 دور ثاني / يمثل الشكل المجاور منحنى قَ(س) للاقتران ق(س) المعرف على ح - {٠} ، إذا علمت أن معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند س = ١ هي ص - س - ١ = ٠ والنقطة (-٢ ، ٤) نقطة قيمة قصوى وحيدة لـ ق(س) جد:




١/ فترات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران ق(س) ؟

٢/ نقط وزوايا الانعطاف لـ ق(س) "إن وجدت" ؟

٣/ فترات التزايد والتناقص لـ ق(س)

الحل

١/ من الرسمة قَ(س) يقع تحت محور السينات عندما س ∈ ]-∞ ، ٠[ ∪ ]٠ ، ١[
⇐ قً(س) < ٠ على نفس الفترة
قً(س) يقع فوق محور السينات على ]١ ، ∞[ ⇐ قً(س) > ٠ على نفس الفترة .




ق(س) مقعر لأسفل على ]-∞، ٠[ ∪ ]٠، ١[

ق(س) مقعر لأعلى على ]١، ∞[

٢/ (١، ق(١)) نقطة انعطاف ، ق متصل عندها وغيّر من تقعره حولها.

ص - س - ١ = ٠ مماس لـ ق عند س = ١ ⇐ (١، ق(١)) ∈ للمماس

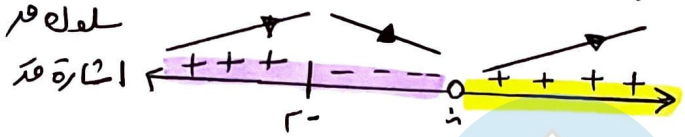
ق(١) - ١ - ١ = ٠ ⇐ ق(١) - ٢ = ٠ ⇐ ق(١) = ٢

⇐ (١، ٢) نقطة الانعطاف

ص - س - ١ = ٠ ⇐ صَ - ١ = ٠ ⇐ صَ = ١ = ميل المماس = قَ(١)

قَ(١) = ظاهـ ⇐ ١ = ظاهـ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{4}$ زاوية الانعطاف

٣/ (-٢، ٤) قيمة قصوى وحيدة ⇐ قَ(-٢) = ٠ ، قً(-٢) < ٠ ⇐ ق(-٢) عظمى محلية.




* معطى قَ(١) = ١

اذن عندما س > ٠

قَ(س) موجبة.

⇐ ق(س) متزايد على ]-∞، -٢] ∪ ]٠، ∞[ ومتناقص على [-٢، ٠[

---

• 2020 نابلس/ اذا كان ق(س) = ٣جا(٢س) + ل(س) نقطة انعطاف أفقي هي ($\frac{\pi}{2}$، $\frac{3\pi}{2}$)

وكان ك(س) = (ل(س) + ٢)$^2$ جد كً($\frac{\pi}{2}$)

الحل/

لـ ق نقطة انعطاف أفقي عند ($\frac{\pi}{2}$، $\frac{3\pi}{2}$) ⇐ ق($\frac{\pi}{2}$) = $\frac{3\pi}{2}$

⇐ قَ($\frac{\pi}{2}$) = ٠

⇐ قً($\frac{\pi}{2}$) = ٠

ق(س) = ٣جا(٢س) + ل(س)

ق($\frac{\pi}{2}$) = ٣جا(π) + ل($\frac{\pi}{2}$)

$\frac{3\pi}{2}$ = ٣ × ٠ + ل($\frac{\pi}{2}$)

$\frac{3\pi}{2}$ = ل($\frac{\pi}{2}$)

قَ(س) = ٦جتا(٢س) + لَ(س)

قَ($\frac{\pi}{2}$) = ٦جتا(π) + لَ($\frac{\pi}{2}$)

٠ = ٦ × -١ + لَ($\frac{\pi}{2}$)

٦ = لَ($\frac{\pi}{2}$)

قً(س) = -١٢جا(٢س) + لً(س)

قً($\frac{\pi}{2}$) = -١٢جا(π) + لً($\frac{\pi}{2}$)

٠ = ٠ + لً($\frac{\pi}{2}$)

٠ = لً($\frac{\pi}{2}$)

ك(س) = (ل(س) + ٢)$^2$ ⇐ كَ(س) = ٢(ل(س) + ٢) لَ(س)

كً(س) = ٢(ل(س) + ٢) لً(س) + لَ(س) × ٢لَ(س)

كً($\frac{\pi}{2}$) = ٢(ل($\frac{\pi}{2}$) + ٢) لً($\frac{\pi}{2}$) + ٢لَ($\frac{\pi}{2}$) لَ($\frac{\pi}{2}$) = ٢ × ٦ × ٦ = ٧٢

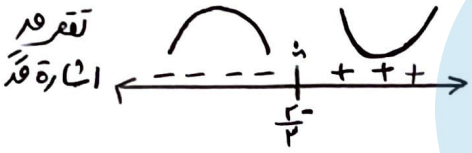
⇐ كً($\frac{\pi}{2}$) = ٧٢

---

أ.ميّ حوّاري

• 2024 شمال الخليل / إذا كان ص = ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة وكان قَ(س) < ٠ عندما س < $\frac{-٢}{٣}$ وكان قً(س) > ٠ عندما س > $\frac{-٢}{٣}$ ويمر منحناه بالنقطة (١، ٦) وكانت معادلة المماس عند س = -١ هي ص = ٢ ، أوجد قاعدة ص = ق(س)

الحل/ ق(س) = أ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + جـ س + د ، أ ≠ ٠ متصل ومشتق على ح .




($\frac{-٢}{٣}$ ، ق($\frac{-٢}{٣}$)) نقطة انعطاف ، ق متصل عندها وغير من تقعره حولها

⇐ قً($\frac{-٢}{٣}$) = ٠

ق يمر بـ (١، ٦) ⇐ ق(١) = ٦

المماس لـ ق عند س = -١ ⇐ (ص = ٢) ⇐ ق(-١) = ٢

صَ = ٠ = قَ(-١)

أ.ميّ حوّاري

⇐ قً($\frac{-٢}{٣}$) = ٠ / قَ(-١) = ٠ / ق(١) = ٦ / ق(-١) = ٢

قَ(س) = ٣أ س$^{٢}$ + ٢ب س + جـ

قً(س) = ٦أ س + ٢ب

قً($\frac{-٢}{٣}$) = ~~٦~~$^{٢}$أ × $\frac{-٢}{٣}$ + ٢ب ⇐ $\frac{٠}{٢}$ = $\frac{-٤}{٢}$أ + $\frac{٢ب}{٢}$ ⇐ ٠ = -٢أ + ب — (١)

قَ(-١) = ٣أ - ٢ب + جـ ⇐ ٠ = ٣أ - ٢ب + جـ — (٢)

ق(١) = أ + ب + جـ + د ⇐ ٦ = أ + ب + جـ + د — (٣)

ق(-١) = -أ + ب - جـ + د ⇐ ٢ = -أ + ب - جـ + د — (٤)

(٣) - (٤) / $\frac{٤}{٢}$ = $\frac{٢}{٢}$أ + $\frac{٢}{٢}$جـ ⇐ ٢ = أ + جـ — (٥)

(٢) - (٥) / -٢ = ٢أ - ٢ب — (٦)

(١) + (٦) / -٢ = -ب ⇐ ب = ٢ نعوضها في (١) ⇐ ٠ = -٢أ + ٢

٢أ = ٢ ⇐ أ = ١

نعوض أ في (٥) / ٢ = ١ + جـ ⇐ جـ = ١

نعوض (أ، ب، جـ) في (٣) ⇐ ٦ = ١ + ٢ + ١ + د ⇐ ٦ = ٤ + د ⇐ ٢ = د

⇐ ق(س) = س$^{٣}$ + ٢س$^{٢}$ + س + ٢

---

• 2024 ضواحي القدس / إذا كان ق(س) = س$^{٤}$ + أ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + جـ س + د فإذا علمت أن ق(س) ليس له نقاط انعطاف في مجاله ، أثبت أن ٣أ$^{٢}$ ≤ ٨ب

الحل/ ق(س) = س$^{٤}$ + أ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + جـ س + د لـ ح متصل ومشتق على ح

قَ(س) = ٤س$^{٣}$ + ٣أ س$^{٢}$ + ٢ب س + جـ

قً(س) = ١٢س$^{٢}$ + ٦أ س + ٢ب = ٠

ق ليس له انعطاف ⇐ قً ≠ ٠ وبما أنها معادلة تربيعية ⇐ المميز ≤ ٠

المميز < ٠ ⇐ لا يوجد حلول ، اشارة قً > ٠ على ح

المميز = ٠ ⇐ يوجد حل واحد ولكن لم يتغير اشارة قً حوله ⇐ ليست انعطاف

المميز ≤ ٠ ⟸ (٦أ)$^{٢}$ − ٤(١٢)(٢ب) ≤ ٠

٣٦أ$^{٢}$ − ٤×١٢×٢ب ≤ ٠ ⟸ $\frac{٣٦أ^{٢}}{١٢}$ ≤ $\frac{٨×١٢ب}{١٢}$

⟸ ٣أ$^{٢}$ ≤ ٨ب #

---

• 2024 بيت لحم/ إذا كان ق(س) كثير حدود له نقطة حرجة واحدة فقط عند س = ٤ ، حيث منحنى قَ(س) متزايد على ح ويقطع محور السينات عند (س = ٢) إذا علمت أن ل(س) = (ق∘هـ)(س)
أثبت أن لً(٣) < ٠ حيث هـ(س) = س$^{٢}$ − ٨

الحل/

ل(س) = (ق∘هـ)(س) متصل على ح ، حاصل تركيب متصلين (ك ح)

لَ(س) = قَ(هـ(س)) هَ(س)

لً(س) = قَ(هـ(س)) هً(س) + هَ(س) قً(هـ(س)) × هَ(س)

⟸ لً(٣) = قَ(هـ(٣)) هً(٣) + (هَ(٣))$^{٢}$ قً(هـ(٣))

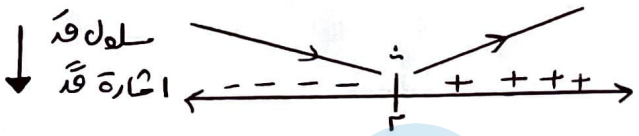
لً(٣) = قَ(١) × ٢ + (٦)$^{٢}$ قً(١)

لً(٣) = ٢قَ(١) + ٣٦قً(١).

نحتاج إيجاد إشارة قَ(١) ، قً(١) .

• هـ(س) = س$^{٢}$ − ٨
هـ(٣) = ٣$^{٢}$ − ٨ = ٩ − ٨
⟸ هـ(٣) = ١
• هَ(س) = ٢س
هَ(٣) = ٢×٣ = ٦
• هً(س) = ٢

• ق(س) ك ح متصل ومشتق على ح ، له نقطة حرجة واحدة فقط عند س = ٤ ⟸ قَ(٤) = ٠
• منحنى قً(س) متزايد على ح ⟸ قً(س) > ٠ على ح
و قً يقطع محور السينات عند س = ٢ ⟸ قً(٢) = ٠ ⟸ س = ٢ حرجة لـ قَ(س) .
قً(٢) > ٠ ، (٢ ، قَ(٢)) صغرى محلية باختبار المشتقة الثانية ، قً < ٠ عندما س < ٢ ، قً > ٠ عندما س > ٢




⟸ قً(١) سالبة .




س = ٤ حرجة واحدة فقط ⟸ قً(٤) > ٠ ⟸ (٤ ، ق(٤)) صغرى محلية .




أ.ميّ حوّاري

⟸ قَ(١) < ٠

نعود لـ لً(٣) = ٢قَ(١) + ٣٦قً(١) = ٢(−) + ٣٦(−)

لً(٣) < ٠ #

• 2025 طولكرم/ إذا كان ق(س) = { س³ − ٦س ، −١ ≤ س ≤ ٣ ، س² − ٢س + ٦ ، ٣ ≤ س ≤ ٥ } ، س ∈ ]−١ ، ٥[ جد:

١/ فترات التقعر لأعلى ولأسفل لـ ق(س)

٢/ نقط الانعطاف وزوايا الانعطاف لمنحنى ق(س) إن وجدت.

الحل/ * البحث في اتصال ق(س):

• عندما −١ ≤ س ≤ ٣ ، ق(س) = س³ − ٦س لـ 2 متصل ومشتق ⇐ قَ(س) = ٣س² − ٦

• عندما ٣ ≤ س ≤ ٥ ، ق(س) = س² − ٢س + ٦ لـ 2 متصل ومشتق ⇐ قَ(س) = ٢س − ٢

• عند (س = ٣)

نها (س² − ٢س + ٦) = ٣² − ٢×٣ + ٦ = ٩ = ق(٣)
س ← ٣⁺

نها (س³ − ٦س) = ٣³ − ٦×٣ = ٢٧ − ١٨ = ٩
س ← ٣⁻

= ⇐ ق(س) متصل عند س = ٣

قَ(س) = { ٣س² − ٦ ، −١ ≤ س ≤ ٣ ؛ ٢س − ٢ ، ٣ ≤ س ≤ ٥ ؛ غ م ، س = ٣ }

قَ(٣)⁺ = ٢×٣ − ٢ = ٤
قَ(٣)⁻ = ٣(٣)² − ٦ = ٢١
≠
قَ(٣) غ م

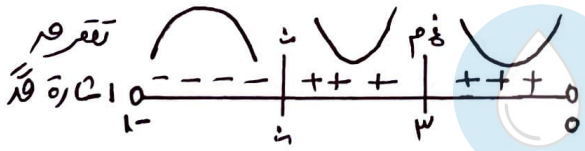
قً(س) = { ٦س ، −١ ≤ س ≤ ٣ ؛ ٢ ، ٣ ≤ س ≤ ٥ ؛ غ م ، س = ٣ }

أ.مي حواري

• قً(س) = ٠

عندما −١ ≤ س ≤ ٣ / ٦س = ٠ ⇐ س = ٠ ∈ ]−١ ، ٣[

عندما ٣ ≤ س ≤ ٥ / ٢ ≠ ٠




١/ ق(س) مقعر لأسفل على ]−١ ، ٠[
ومقعر لأعلى على ]٠ ، ٣[ ∪ ]٣ ، ٥[

٢/ (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠) نقطة انعطاف ؛ ق متصل عندها وغيّر من تقعره حولها

قَ(٠) = ظاهـ ⇐ −٦ = ظاهـ ⇐ زاوية الانعطاف هـ = ظا⁻¹(−٦)

---

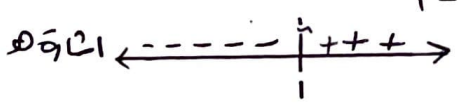
• خارجي/ اذا كان قَ(س) = (س³ − ١) ل(س) وكان منحنى ل(س) يقع فوق محور السينات ومتزايد في ]١ ، ∞[ ومتناقص في ]−∞ ، ١[ جد مجالات تقعر الاقتران ق(س)

الحل/ قَ(س) = (س³ − ١) ل(س)

نفرض هـ(س) = س³ − ١ = ٠ ⇐ س³ = ١ ⇐ س = ١

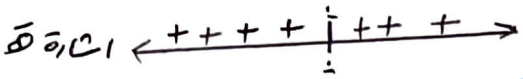
هـ(س) > ٠ على ]١ ، ∞[

هـ(س) < ٠ على ]−∞ ، ١[

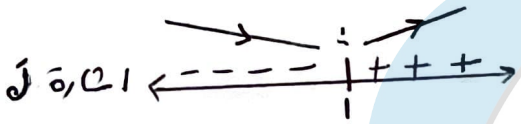


هـ(س) = س$^{٣}$ − ١ ⟸ هـَ = ٣س$^{٢}$ = ٠ ⟸ س = ٠

اشارة هـَ: + + + + | + + +



ل(س) يقع فوق محور السينات ⟸ ل(س) > ٠



اشارة لَ: − − − − − | + + +

قَ(س) = هـ(س) ل(س) متصل على ح ؛ حاصل ضرب متصلين

قً(س) = هـ لَ + ل هـَ

• الحالات :

① قً(١) = هـ(١) لَ(١) + ل(١) هـَ(١) = ~~١ × ٠~~ + (+)(+) = (+)

② قً(٠) = هـ(٠) لَ(٠) + ل(٠) ~~هـَ(٠)~~ = (سالب)(سالب) = (+) .

③ قً(س) على ح / {٠، ١} .

قً(س) = هـ لَ + ل هـَ

= (هـ)(لَ) + (+)(+)

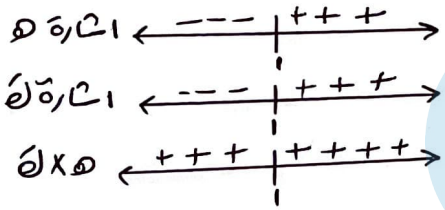
= (+) + (+)

قً > ٠ على ح ⟸ ق مقعر لأعلى على ح .

اشارة هـ: − − − | + + +

اشارة لَ: − − − | + + +

هـ × لَ: + + + | + + + +



أ.مي حواري

• خارجي / اذا كان قَ(−١) = قَ(٢) = ٠ ، قً(س) = −٣س أوجد لمنحنى ق

١/ نقط القيم القصوى ونوعها ٢/ فترات التزايد والتناقص .

٣/ فترات التقعر لأعلى ولأسفل ونقط الانعطاف

(حيث ق له نقطتان حرجتان فقط)

الحل / ١/ قيم س الحرجة س = {−١، ٢}

قً(−١) = −٣ × −١ = ٣ > ٠ ⟸ (−١، ق(−١)) صغرى محلية

قً(٢) = −٣ × ٢ = −٦ < ٠ ⟸ (+٢، ق(٢)) عظمى محلية .

٢/

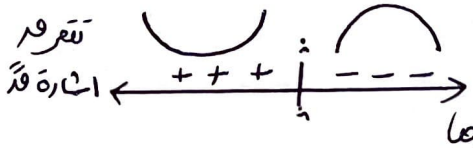
سلوك ق



اشارة قَ: − − − | + + + | − − − − −

−١ ، ٢

ق(س) متزايد على [−١، ٢] ومتناقص على ]−∞، −١] ∪ [٢، ∞[



٣/ قً(س) = −٣س = ٠ ⟸ س = ٠

تقعر ق

اشارة قً: + + + | − − −

ق مقعر لأعلى ]−∞، ٠[ و مقعر لأسفل على ]٠، ∞[

(٠، ق(٠)) نقطة انعطاف ، ق متصل عندها

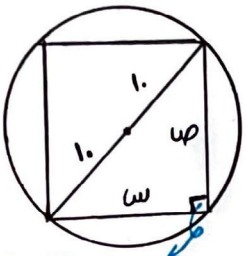
وغيّر من تقعره حولها

# الدرس الرابع | تطبيقات عملية على القيم القصوى

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة الآتية :

• 2007 / أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم .

الحل /




محيطية قياسها ٩٠°
⇐ الضلع المقابل لها هو القطر

نفرض أبعاد المستطيل (س ، ص)

مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = س × ص ← علاقة رئيسية

م = س $\sqrt{٤٠ - س^٢}$

من فيثاغورس :

$س^٢ + ص^٢ = (١٠ + ١٠)^٢$

$س^٢ + ص^٢ = ٤٠٠$

$ص^٢ = ٤٠ - س^٢$

$ص = \sqrt{٤٠ - س^٢}$ ← علاقة مساعدة .

نعوضها

$م' = س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤٠ - س^٢}} + \sqrt{٤٠ - س^٢}$ "توحيد مقامات"

$م' = \frac{-س^٢ + (٤٠ - س^٢)}{\sqrt{٤٠ - س^٢}} = \frac{٤٠ - ٢س^٢}{\sqrt{٤٠ - س^٢}} = ٠$ ⇐ ٤٠ = ٢س² ⇐ ٢٠ = س²

⇐ س = $\sqrt{٢٠}$ = ١٠$\sqrt{٢}$ سم .

اشارة م'

+ + + | - - - -

١٠$\sqrt{٢}$

عند (س = ١٠$\sqrt{٢}$) قيمة عظمى مطلقة لأنها وحيدة عندها أكبر مساحة ممكنة

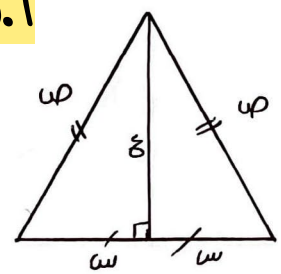
⇐ م = ١٠$\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٤٠ - ٢٠}$

م = ١٠$\sqrt{٢}$ × ١٠$\sqrt{٢}$ = ٢٠ سم²

---

• 2007 دراسات / مثلث متساوي الساقين محيطه ١٨ سم ، أوجد أطوال أضلاعه عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن .

أ.مي حوّاري




الحل / نفرض أضلاع المثلث ٢س ، ص ، ص

• تذكر / العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ، ينصفها .

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ (٢س) × ع

م = س ع ← علاقة رئيسية .

م = س $\sqrt{٨١ - ١٨س}$

$م' = س \times \frac{-١٨}{٢\sqrt{٨١ - ١٨س}} + \sqrt{٨١ - ١٨س}$

$م' = \frac{-٩س + (٨١ - ١٨س)}{\sqrt{٨١ - ١٨س}} = \frac{٨١ - ٢٧س}{\sqrt{٨١ - ١٨س}}$

⇐ ٠ = ٨١ - ٢٧س ⇐ ٨١ = ٢٧س

⇐ س = ٣

اشارة م'

+ + + | - - -

٣

• عند (س = ٣) قيمة عظمى مطلقة "وحيدة" عندها أكبر مساحة ممكنة / ص = ٩ - ٣ = ٦

أضلاع المثلث = ص ، ص ، ٢س = ٦ ، ٦ ، ٦ "متساوي أضلاع"

محيط المثلث = ٢س + ٢ص

١٨ = ٢(س + ص)

٩ = س + ص

٩ - س = ص

من فيثاغورس :

$س^٢ + ع^٢ = ص^٢$

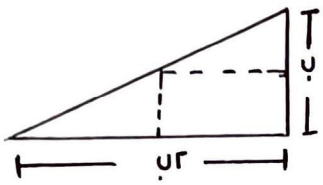
$ع^٢ = ص^٢ - س^٢$

$ع^٢ = (٩ - س)^٢ - س^٢$

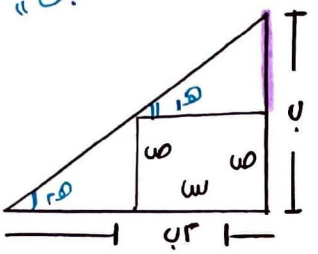
$ع^٢ = ٨١ - ١٨س + س^٢ - س^٢$

ع = $\sqrt{٨١ - ١٨س}$ علاقة مساعدة .

• 2008/ معتمداً على الشكل المجاور، جد بعدي المستطيل ذي المساحة الكبرى، الذي يمكن رسمه داخل مثلث قائم الزاوية، حيث ينطبق أحد أضلاع هذا المستطيل على أحد ضلعي القائمة في المثلث، ورأساه الآخران على ضلعي المثلث الآخرين.




"ب ثابت"




الحل/

نفرض أبعاد المستطيل (س، ص)

مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = س × ص "علاقة رئيسية"

م = ٢(ب − ص)ص

م = ٢ب ص − ٢ص²

م' = ٢ب − ٤ص = ٠

⇐ ٢ب = ٤ص ⇐ ص = ½ب

هـ١ = هـ٢ بالتناظر

⇐ ظاهـ١ = ظاهـ٢

$\frac{ب - ص}{س} = \frac{\cancel{ب}}{٢\cancel{ب}} = \frac{١}{٢}$

⇐ ٢ب − ٢ص = س "علاقة مساعدة"

اشارة م': + + + | − − −

½ب

عند (ص = ½ب) عظمى محلية مطلقة "وحيدة" عندها أكبر مساحة ممكنة.

س = ٢ب − ٢ × ½ب ⇐ س = ٢ب − ب ⇐ س = ب

⇐ أبعاد المستطيل (س، ص) = (ب، ½ب)

أ.مي حوّاري

---

• 2008 إكمال/ جد بعدي المستطيل الواقع في الربع الأول والذي مساحته أكبر ما يمكن والذي تنطبق قاعدته الكبرى على محور السينات ويقع رأساه الآخران على منحنى ق(س) = ٤س − س² + ٢

الحل/

* تذكر/ لرسم منحنى ق(س) = أس² + ب س + جـ نحتاج

١. تقعره ← عندما أ < ٠ ← ق مقعر لأعلى / أ > ٠ ← ق مقعر لأسفل

٢. رأسه ← وتمثل القيمة القصوى له. أو $\left(\frac{-ب}{٢أ}، ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

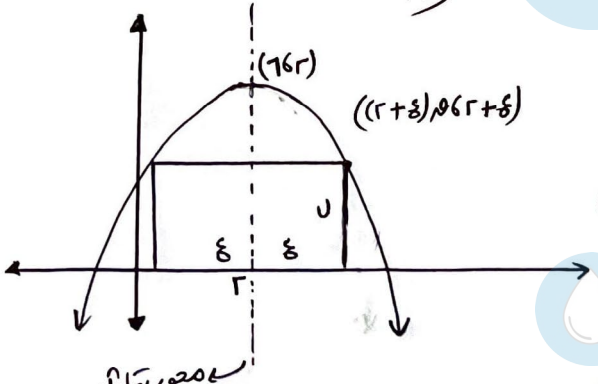
٣. جذوره "ق(س) = ٠"

* ق(س) = ٤س − س² + ٢

أ = −١ < ٠ ← مقعر لأسفل

ق'(س) = ٤ − ٢س = ٠ ⇐ س = ٢

ق(٢) = ٨ − ٤ + ٢ = ٦ ⇐ الرأس (٢، ٦)




مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = ٢ل ع ← علاقة رئيسية.

م = ٢(٦ − ع²) × ع

م = ١٢ع − ٢ع³ نشتق.

ق(٢ + ع) = ل

٤(٢ + ع) − (٢ + ع)² + ٢ = ل.

٨ + ~~٤ع~~ − ٤ − ~~٤ع~~ − ع² + ٢ = ل

٦ − ع² = ل ← علاقة مساعدة.

$م' = ١٢ - ٦ع^٢ = ٠ \Leftarrow ١٢ = ٦ع^٢ \Leftarrow ٢ = ع^٢ \Leftarrow ع = \sqrt{٢}$

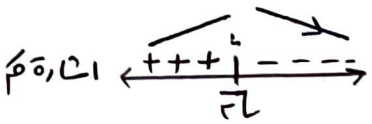
عند $ع = \sqrt{٢}$ قيمة عظمى مطلقة وحيدة.

عندها أكبر مساحة ممكنة.

$ل = ٦ - ع^٢ = ٦ - ٢$

$\Leftarrow ل = ٤$

أبعاد المستطيل $٢ع$ ، $ل = ٢\sqrt{٢}$ ، $٤$



اشارة م'

$+ + + \mid - - - -$ ، $\sqrt{٢}$

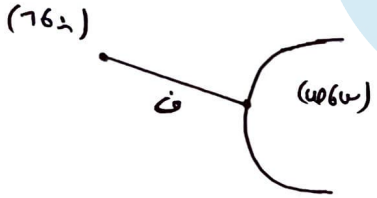
أ.مي حوّاري

---

• 2009 / جد أقصر مسافة بين النقطة $(٠، ٦)$ ومنحنى الاقتران $س^٢ - ص^٢ = ١٦$

الحل / نفرض النقطة $(س، ص)$

$(س، ص)$ $(٠، ٦)$



$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ قانون المسافة بين نقطتين

$ف = \sqrt{(س - ٠)^٢ + (ص - ٦)^٢}$

$ف = \sqrt{س^٢ + (ص^٢ - ١٢ص + ٣٦)}$ علاقة أساسية /

$س^٢ - ص^٢ = ١٦$

$\Leftarrow س^٢ = ١٦ + ص^٢$ علاقة مساعدة.

$ف = \sqrt{١٦ + ص^٢ + ص^٢ - ١٢ص + ٣٦}$

$ف = \sqrt{٢ص^٢ - ١٢ص + ٥٢}$

$ف' = \frac{٤ص - ١٢}{٢\sqrt{٢ص^٢ - ١٢ص + ٥٢}} = ٠ \Leftarrow ٤ص - ١٢ = ٠ \Leftarrow ٤ص = ١٢ \Leftarrow ص = ٣$

عند $(ص = ٣)$ صغرى محلية ومطلقة "وحيدة"

عندها أقصر مسافة ممكنة.

اشارة ف'

$- - - \mid + + +$ ، $٣$



$ف = \sqrt{٢(٩) - ١٢(٣) + ٥٢} \Leftarrow ف = \sqrt{٣٤}$ وحدة مسافة.

---

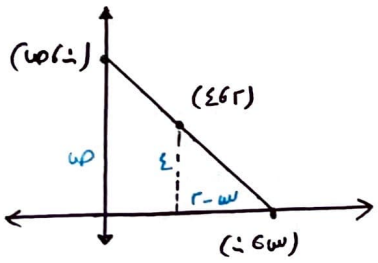
• 2009 إكمال / جد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطة $(٢، ٤)$ ويصنع مع المحورين الاحداثيين في الربع الأول مثلثاً مساحته أصغر ما يمكن.

الحل / نفرض نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات $(س، ٠)$

ومع محور الصادات $(٠، ص)$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$م = \frac{١}{٢} س ص \leftarrow$ علاقة رئيسية.



$م = \frac{١}{٢} س \times \frac{٤س}{س - ٢}$

$م = \frac{٢س^٢}{س - ٢}$

$م' = \frac{(س - ٢) \times ٤س - ٢س^٢}{(س - ٢)^٢}$

$م' = \frac{٤س^٢ - ٨س - ٢س^٢}{(س - ٢)^٢} = \frac{٢س^٢ - ٨س}{(س - ٢)^٢} = ٠$

من تشابه المثلثات.

$\frac{ص}{٤} = \frac{س}{س - ٢}$

$\Leftarrow ص = \frac{٤س}{س - ٢} \leftarrow$ علاقة مساعدة.

• ملاحظة / يمكن ايجاد العلاقة المساعدة عن طريق حساب الميل من $(س، ٠)$ (صفر، ص) و من $(س، ٠)$ $(٢، ٤)$ ومساواتهم ببعض.

$٢س^٢ - ٨س = ٠ \Leftarrow ٢س(س - ٤) = ٠$

$س = ٠$ ✗ ، $س = ٤$




عند (س = ٤) صغرى محلية مطلقة عندها أصغر مساحة ممكنة .

(٤، ٠) (٢، ٤)

$م = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٤ - ٠}{٢ - ٤} = \frac{٤}{-٢} = -٢$

---

• 2010/ يراد صنع وعاء معدني على هيئة أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها $٨١\pi$ سم$^٣$ فإذا كانت تكلفة المواد المستعملة ٣ دنانير لكل سم$^٢$ من قاعدة الأسطوانة ودينارًا واحدًا لكل سم$^٢$ من سطحها الجانبي ، جد أبعاد الأسطوانة التي تجعل تكاليف صنعها أقل ما يمكن .

الحل/ نفرض ارتفاع الأسطوانة ع ، نصف قطر القاعدة نق

التكاليف = تكاليف صنع الجوانب + تكاليف صنع القاعدة

$ت = ١ \times ٢ نق \pi ع + ٣ \times نق^٢ \pi$ ← علاقة رئيسية .

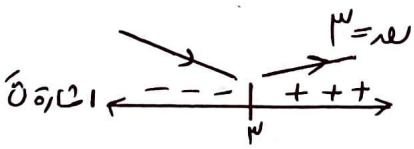
$ت = (٢ نق \pi \times \frac{٨١}{نق^٢}) + ٣ نق^٢ \pi$

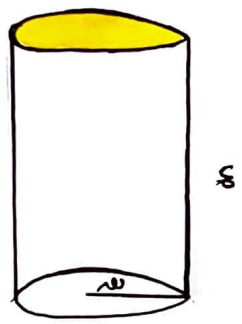
$ت = \frac{١٦٢\pi}{نق} + ٣\pi نق^٢$

$ت' = \frac{-١٦٢\pi}{نق^٢} + ٦\pi نق = ٠$

$\Leftarrow ٦\pi نق = \frac{١٦٢\pi}{نق^٢} \Leftarrow ٦ نق^٣ = ١٦٢$

$\Leftarrow نق^٣ = ٢٧ \Leftarrow نق = ٣$




حجم الأسطوانة = $نق^٢ \pi ع$

$٨١\pi = نق^٢ \pi ع$

$\frac{٨١}{نق^٢} = ع$ ← علاقة مساعدة

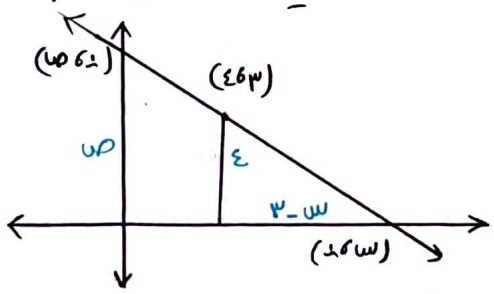
عند (نق = ٣) صغرى محلية مطلقة "وحيدة" عندها أقل تكاليف ممكنة .

$ع = \frac{٨١}{٩} = ٩$ ← أبعاد الأسطوانة ع = ٩ سم ، نق = ٣ سم .

أ.مي حوّاري

---

• 2011/ جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣، ٤) ويصنع مع المحورين الاحداثيين في الربع الأول مثلثًا مساحته أصغر ما يمكن .




الحل/ نفرض نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات (س، ٠) ومع محور الصادات (٠، ص)

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ ق ع = $\frac{١}{٢}$ س ص

$م = \frac{١}{٢} س ص$ ← علاقة رئيسية

$م = \frac{١}{٢} س \times \frac{٤س}{س - ٣} = \frac{٢س^٢}{س - ٣}$

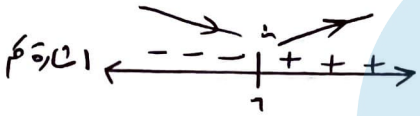
من التشابه/ $\frac{ص}{٤} = \frac{س}{س - ٣}$

$\Leftarrow ص = \frac{٤س}{س - ٣}$ علاقة مساعدة

$م = \frac{٢س^٢}{س-٣} \leftarrow م' = \frac{(س-٣)\times ٤س - ٢س^٢}{(س-٣)^٢} = \frac{٤س^٢ - ١٢س - ٢س^٢}{(س-٣)^٢} = ٠$

$٢س^٢ - ١٢س = ٠ \leftarrow ٢س(س-٦) = ٠$

$س = ٠$ ✗ ، $س = ٦$ ✓




عند (س = ٦) صغرى محلية مطلقة "وحيدة"
عندها أصغر مساحة ممكنة.

(٦، ٠) (٣، ٤)

$م = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٤-٠}{٣-٦} = \frac{٤}{-٣}$

$م = \frac{-٤}{٣}$ $(س_١، ص_١) = (٦، ٠)$

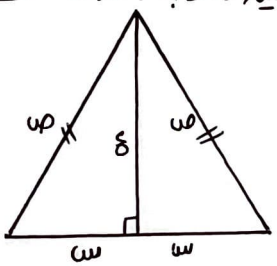
معادلة المستقيم / $ص - ص_١ = م(س - س_١) \Leftarrow ص = \frac{-٤}{٣}(س-٦)$

$ص = \frac{-٤}{٣}س + ٨$

أ.مي حوّاري

---

• 2011 إكمال / سلك طوله ١٢ سم، ثني ليكون مثلثاً متساوي الساقين، أوجد أطوال أضلاع هذا المثلث لتكن مساحته أكبر ما يمكن




الحل / نفرض أبعاد المثلث (٢س، ص، ص)

$م = \frac{١}{٢} ق ع$

$م = \frac{١}{٢}(٢س)\times ع \Leftarrow م = س ع$ علاقة رئيسية

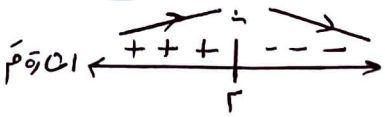
$م = س\sqrt{٣٦ - ١٢س}$

$م' = س \times \frac{-١٢}{٢\sqrt{٣٦-١٢س}} + \sqrt{٣٦-١٢س}$

$م' = \frac{-٦س + (٣٦ - ١٢س)}{\sqrt{٣٦-١٢س}} = ٠$

$-١٨س + ٣٦ = ٠ \Leftarrow ٣٦ = ١٨س$

$\Leftarrow س = ٢$




عند (س = ٢) عظمى محلية مطلقة "وحيدة"
عندها أكبر مساحة ممكنة / $ص = ٦ - ٢ = ٤$

أضلاع المثلث (٢س، ص، ص) = (٤، ٤، ٤)

$\Leftarrow$ المثلث متساوي الأضلاع.

طول السلك = محيط المثلث = ٢س + ٢ص

$١٢ = ٢(س + ص)$

$٦ = س + ص$

$\Leftarrow ص = ٦ - س$

من فيثاغورس:

$س^٢ + ع^٢ = ص^٢$

$ع^٢ = (٦ - س)^٢ - س^٢$

$ع^٢ = ٣٦ - ١٢س + س^٢ - س^٢$

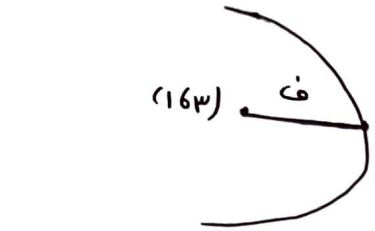
$ع = \sqrt{٣٦ - ١٢س}$

---

• 2012 / جد الإحداثي السيني للنقطة الواقعة على منحنى العلاقة $ص^٢ - ٢ص + ٤س - ٢٣ = ٠$ وتكون أقرب ما يمكن للنقطة (٣، ١).

الحل / نفرض النقطة على المنحنى (س، ص)

باستخدام قانون المسافة بين نقطتين .




$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

$ف = \sqrt{(س - ٣)^2 + (ص - ١)^2}$

$ف = \sqrt{س^2 - ٦س + ٩ + ص^2 - ٢ص + ١}$ ← علاقة رئيسية

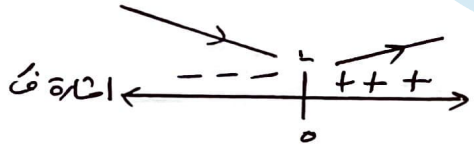
$ص^2 - ٢ص + ٤س - ٢٣ = ٠$

علاقة مساعدة. ← $ص^2 - ٢ص = ٢٣ - ٤س$

$ف = \sqrt{س^2 - ٦س + ١٠ + (٢٣ - ٤س)}$

$ف = \sqrt{س^2 - ١٠س + ٣٣}$

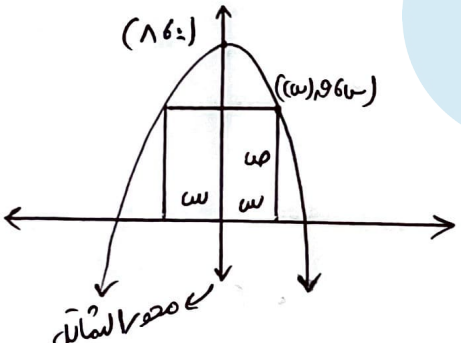
$ف' = \frac{٢س - ١٠}{٢\sqrt{س^2 - ١٠س + ٣٣}} = ٠$ ← $٢س = ١٠$ ← $س = ٥$




• عند $(س = ٥)$ يوجد محلية مطلقة عندها أقصر مسافة ممكنة .

---

• 2013 / جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات والرأسان الآخران على منحنى $و(س) = ٨ - \frac{٤}{٣}س^2$




الحل / $و(س)$ انعكاس $\frac{٤}{٣}س^2$ في السينات ثم إزاحة ٨ وحدات لأعلى ← (٨، ٠) الرأس.

مساحة المستطيل = $٢س \times ص$

م = $٢س ص$ ← امتداد الصف

م = $٢س(٨ - \frac{٤}{٣}س^2)$

م = $١٦س - \frac{٨}{٣}س^3$

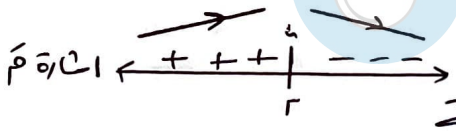
م' = $١٦ - ٤س^2 = ٠$

$١٦ = ٤س^2$ ← $س^2 = ٤$

← $س = ٢$

ص = $و(س)$

علاقة مساعدة. ← $ص = ٨ - \frac{٤}{٣}س^2$




• عند $(س = ٢)$ تظهر محلية مطلقة لأنها وحيدة وعندها أكبر مساحة ممكنة

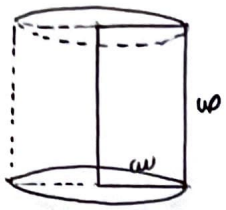
م = $٢ \times ٢ \times (٨ - \frac{٤}{٣} \times ٢^2) = ٤(٨ - \frac{١٦}{٣}) = ٤(\frac{٨}{٣}) = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مساحة .

---

• 2014 / أوجد باستخدام التفاضل أكبر حجم للشكل الناتج من دوران المستطيل محيطه (٦٠ سم) دورة كاملة حول أحد أضلاعه .

الحل / الصلب الناتج عند دوران مستطيل حول أحد أضلاعه هو أسطوانة .

نفرض أبعاد المستطيل (س، ص).




حجم الأسطوانة = $\pi نق^2 ع$

$ح = \pi نق^2 ع$ ← علاقة رئيسية

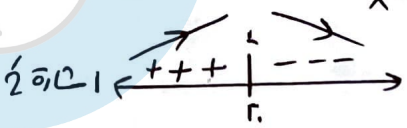
$ح = \pi نق^2 (٣٠ - نق)$

$ح = ٣٠ \pi نق^2 - \pi نق^3$

$ح' = ٦٠ \pi نق - ٣ \pi نق^2 = ٠$

$٣ \pi نق (٢٠ - نق) = ٠$

$نق = ٢٠$ أو $نق = ٠$ (مرفوض)




عند $نق = ٢٠$ قيمة عظمى مطلقة "وحيدة" عندها أكبر حجم ناتج

$ح = \pi (٢٠)^2 (٣٠ - ٢٠) = ١٠ \times \pi \times ٤٠٠ = ٤٠٠٠ \pi$ سم$^3$

س = نق ، ص = ع

محيط المستطيل = $٢(س + ص)$

$٦٠ = ٢(نق + ع)$

$٣٠ = نق + ع$

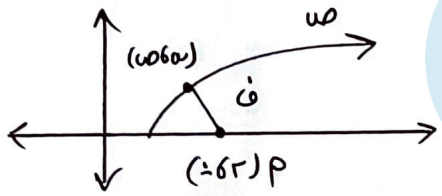
$ع = ٣٠ - نق$ علاقة مساعدة.

**أ.مي حوّاري**

---

2014/ صـ أقرب نقطة واقعة على المنحنى $ص = \sqrt{س - ١}$ إلى النقطة $ب(٢، ٠)$

الحل




نفرض النقطة على المنحنى $(س، ص)$

$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

$(س، ص)$ $(٢، ٠)$

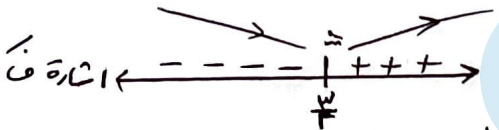
$ف = \sqrt{(س - ٢)^2 + ص^2}$ ← علاقة رئيسية

$ف = \sqrt{س^3 - ٤س + ٤ + س - ١}$

$ف = \sqrt{س^3 - ٣س + ٣}$

$\frac{ف'}{س'} = \frac{٣ - ٣س}{٢\sqrt{س^3 - ٣س + ٣}} = ٠$

$٣ - ٣س = ٠ \leftarrow ٣س = ٣ \leftarrow س = \frac{٣}{٣}$




عند $(س = \frac{٣}{٣})$ صغرى محلية مطلقة وحيدة عندها أصغر مسافة ممكنة

$ص = \sqrt{\frac{٣}{٣} - ١} = \sqrt{\frac{١}{٣}} = \frac{١}{٣}$ ← النقطة $(س، ص) = (\frac{٣}{٣}، \frac{١}{٣})$

$ص = \sqrt{س - ١}$

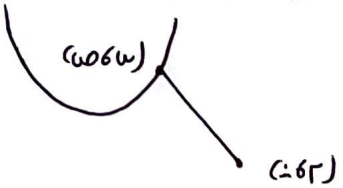
$ص^2 = س - ١$ علاقة مساعدة

---

2015/ أوجد أقصر مسافة بين النقطة $(٤، ٠)$ ومنحنى العلاقة $ص^2 - س^2 = ١$

الحل

نفرض النقطة على المنحنى $(س، ص)$




$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

$(س، ص)$ $(٤، ٠)$

$ف = \sqrt{(س - ٤)^2 + ص^2}$ ← علاقة رئيسية

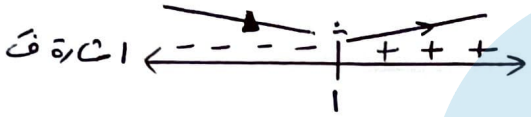
$ف = \sqrt{س^3 - ٤س + ٤ + س - ١}$

$ص^2 - س^2 = ١$

$ص^2 = ١ + س^2$ علاقة مساعدة.

$ف = \sqrt{٢س^٢ - ٤س + ١٢}$

$ف' = \frac{٤س - ٤}{٢\sqrt{٢س^٢ - ٤س + ١٢}} = ٠ \Leftarrow ٤س - ٤ = ٠ \Leftarrow \frac{٤س}{٤} = \frac{٤}{٤} \Leftarrow س = ١$




عند (س = ١) صغرى محلية ومطلقة "وحيدة"
عندها أقصر مسافة ممكنة.

$ف = \sqrt{٢ - ٤ + ١٢} = \sqrt{١٠}$ وحدة مسافة

---

• 2015 كمال/ سلك طوله (٥٦سم) قسّم إلى جزأين، صنع من أحدهما مربع ومن الآخر مستطيل طوله يساوي (٣) أمثال عرضه ما أبعاد المربع والمستطيل ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن

الحل/




أ.مي حوّاري

المساحة = مساحة المستطيل + مساحة المربع

$م = ص \times ٣ص + س^٢$

$م = ٣ص^٢ + س^٢ \leftarrow$ علاقة رئيسية

$م = ٣ص^٢ + (١٤ - ٢ص)^٢$

$م' = ٦ص + ٢(١٤ - ٢ص) \times -٢$

$م' = ٦ص + -٥٦ + ٨ص$

$٠ = ١٤ص - ٥٦ \Leftarrow ٥٦ = ١٤ص \leftarrow ص = ٤$

٥٦ = محيط المستطيل + محيط المربع

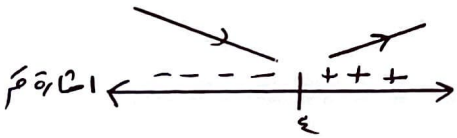
$٥٦ = ٢(ص + ٣ص) + ٤س$

$(٥٦ = ٨ص + ٤س) / ٤$

$١٤ = ٢ص + س$

$١٤ - ٢ص = س$ علاقة مساعدة.

عند (ص = ٤) صغرى محلية ومطلقة عندها أقل مساحة ممكنة.



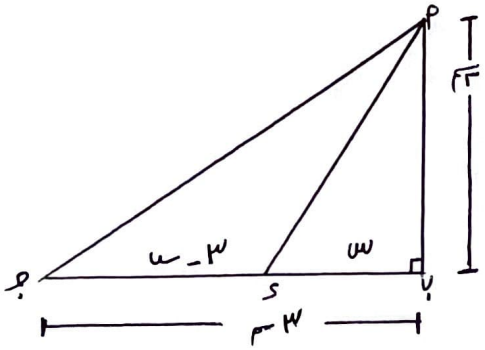

$س = ١٤ - ٢ \times ٤ = ١٤ - ٨ = ٦$ طول المربع

أبعاد المستطيل (ص، ٣ص) = (٤، ١٢)

---

• 2016/ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب إذا كان طول أب = ٢سم وطول ب جـ = ٣سم، د نقطة على ب جـ، أوجد طول د جـ حيث يكون مجموع طول (د جـ) ومثلي (أ د) أقل ما يمكن.

الحل/




$ل = د جـ + ٢أ د$

$ل = (٣ - س) + ٢أ د$

باستخدام فيثاغورس

$(أ د)^٢ = (س)^٢ + ٢^٢$

$أ د = \sqrt{٤ + س^٢}$

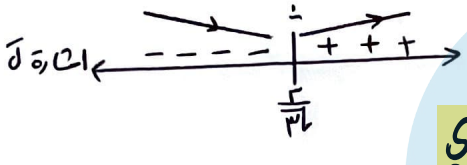
$\Leftarrow ل = (٣ - س) + ٢\sqrt{٤ + س^٢}$

$ل' = -١ + \frac{٢ \times ٢س}{٢\sqrt{٤ + س^٢}} = ٠$

$\Leftarrow ١ = \frac{٢س}{\sqrt{٤ + س^٢}}$

$(\sqrt{٤+س^٢} = ٢س)^٢ \leftarrow ٤+س^٢ = ٤س^٢ \leftarrow \frac{٤}{٣} = \frac{٣}{٣}س^٢ \leftarrow \frac{٤}{٣} = س^٢ \leftarrow س = \sqrt{\frac{٤}{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

• عند $س = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ صغرى محلية مطلقة "وحيدة"
عندها أقل ل ممكنة.

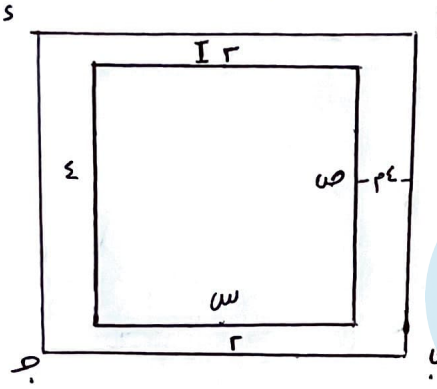



$د_ج = ٣ - س = ٣ - \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

أ.مي حوّاري

---

• 2017/ أرض مستطيلة الشكل رؤوسها أ، ب، جـ، د تتكون من حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢٠٠ متر مربع محاطة بأرصفة عرض كل من الرصيفين أب، جـ د يساوي (٤ متر) وعرض كل من الرصيفين الآخرين ٢ متر أوجد أقل مساحة ممكنة لقطعة الأرض




مساحة قطعة الأرض = (أب) × (ب جـ)

$م = (ص+٢+٢)(س+٤+٤)$

$م = (ص+٤)(س+٨)$ ← علاقة رئيسية

$م = (\frac{٣٢٠٠}{س}+٤)(س+٨)$

$م = \frac{٣٢٠٠س}{س} + \frac{٣٢٠٠ \times ٨}{س} + ٤س + ٤ \times ٨$

$م = ٣٢٠٠ + \frac{٢٥٦٠٠}{س} + ٤س + ٣٢$

$م' = -\frac{٢٥٦٠٠}{س^٢} + ٤ = ٠$

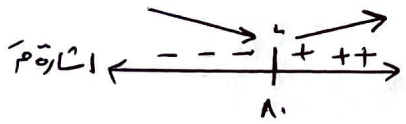
$٤ = \frac{٢٥٦٠٠}{س^٢} \Leftarrow ٤س^٢ = ٢٥٦٠٠$

$س^٢ = ٦٤٠٠ \Leftarrow س = ٨٠$

مساحة الحديقة = س ص

$٣٢٠٠ = س ص$

$ص = \frac{٣٢٠٠}{س}$ علاقة مساعدة.



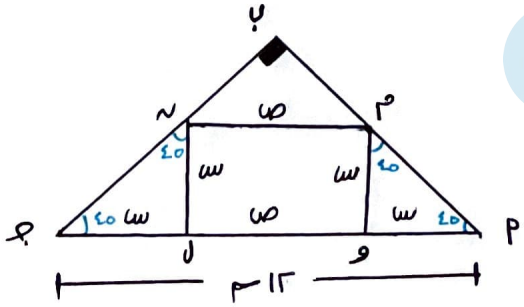

عند (س = ٨٠) قيمة صغرى مطلقة لأنها وحيدة
عندها أقل مساحة ممكنة

$ص = \frac{٣٢٠٠}{٨٠} = ٤٠ \Leftarrow م = (ص+٤)(س+٨) = (٤٠+٤)(٨٠+٨)$

$م = ٤٤ \times ٨٨ = ٣٨٧٢$ م²

---

• 2018/ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، ومتساوي الساقين وطول أ جـ = ١٢ سم، ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث ينطبق أحد أضلاعه على الوتر أ جـ، ويقع رأسان الآخران على ضلعي القائمة.




الحل/ نفرض طول المستطيل = س، عرضه = ص

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$م = س \times ص$ ← علاقة رئيسية

بما أن △أ ب جـ قائم الزاوية ومتساوي الساقين ← ∡أ = ∡جـ = ٤٥°

← ∡أ م و = ٤٥° أيضاً ← △أ و م متساوي الساقين ← أ و = س

∡ل ن جـ = ٤٥° أيضاً ← △ن ل جـ متساوي الساقين ← ل جـ = س .

← ١٢ = س + ص + س ← ١٢ = ٢س + ص ← ص = ١٢ − ٢س علاقة مساعدة .

م = س ص = س (١٢ − ٢س)

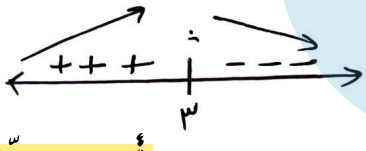
م = ١٢س − ٢س² ← م' = ١٢ − ٤س = ٠ ← ١٢/٤ = ٤س/٤ ← س = ٣

• عند (س = ٣) عظمى مطلقة لأنها وحيدة عندها أكبر مساحة ممكنة .

ص = ١٢ − ٢×٣ = ١٢ − ٦ = ٦

المساحة = س ص = ٦×٣ = ١٨ سم²

+ + + | ٣ | − − −



أ.مي حوّاري

• 2019 دور أول / تتحرك النقطة أ (س، ص) على منحنى ق(س) بحيث ميل المماس عندها في أي لحظة يساوي ١٢س − ٣س² ، س > ٠ جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث أ ب و حيث و نقطة الأصل

الحل / المساحة = ½ (ب و)(أ ب)

م = ½ س ص ← علاقة رئيسية .

م = ½ س (١٢س² − ٣س³)

م = ٦س³ − ٣/٢ س⁴

م' = ١٨س² − ٦س³ = ٠

٦س² (٣ − س) = ٠

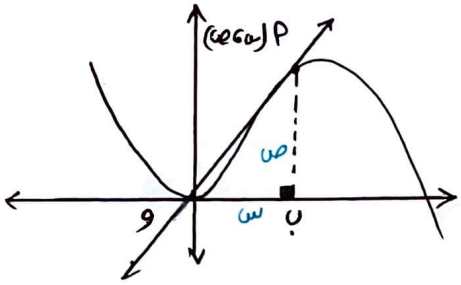
س = ٠ ✗ ، س = ٣

ميل المماس = Δص/Δس = (ص − ٠)/(س − ٠)

ق'(س) = ص/س

١٢س − ٣س² = ص/س

١٢س² − ٣س³ = ص علاقة مساعدة



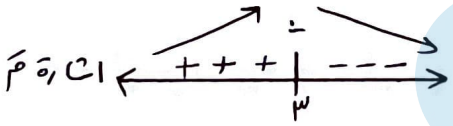
عند (س = ٣) عظمى مطلقة لأنها وحيدة عندها أكبر مساحة ممكنة

+ + + | ٣ | − − −

اشارة م'

م = ½ × ٣ (١٢×٩ − ٣×٣³) = ٣/٢ (١٠٨ − ٨١) = ٨١/٢ وحدة مربعة

• 2019 دور ثاني / ثني سلك طوله ١٢سم ليكون مثلثاً متساوي الساقين جد أطوال أضلاع المثلث والتي تجعل مساحته أكبر ما يمكن.



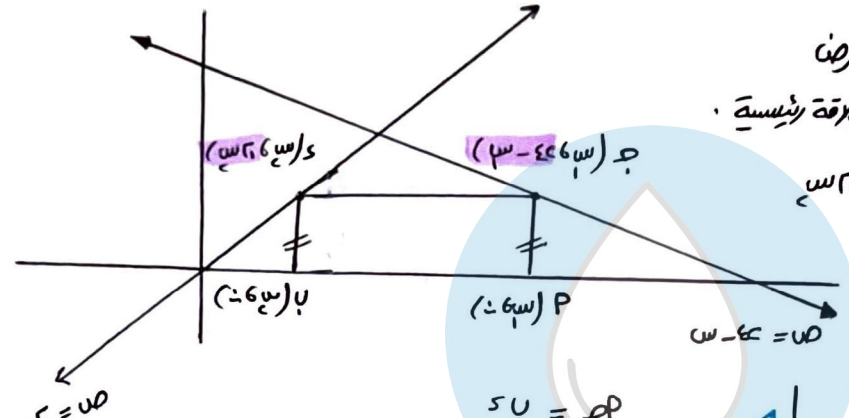
الحل / (٤، ٤، ٤) متساوي أضلاع . مكرر (2011 الكمال)

• 2020 دور أول / أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه في الربع الأول حيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات أما الرأسان الآخران فإحداهما يقع على المستقيم ص = ٢٠س والآخر على المستقيم ص = ٤٢ − س .

الحل / ص = ٤٢ − س ← ص' = −١

ص = ٢٠س ← ص' = ٢٠

≠ التماثل غير موجود




مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = (س - س) × ٢٠س علاقة رئيسية .

م = (٤٢ - ٢٠س - س) × ٢٠س

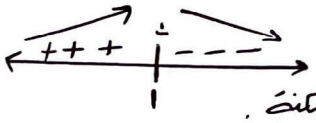
م = (٤٢ - ٢١س) × ٢٠س

م = ٨٤٠س - ٤٢٠س²

م' = ٨٤٠ - ٨٤٠س = ٠

٨٤٠ = ٨٤٠س

س = ١




عند س = ١ يظهر مطلقة لأنها وحيدة و عندها أكبر مساحة ممكنة .

م = ٨٤٠ - ٤٢٠ = ٤٢٠ وحدة مربعة

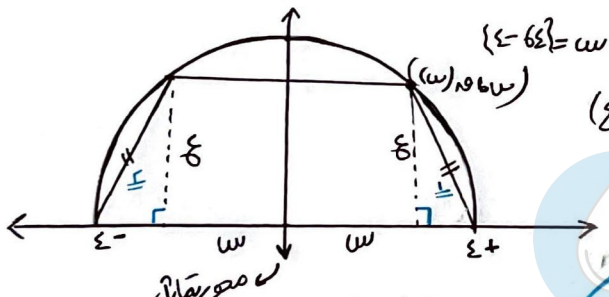
أ.مي حوّاري

---

• دورة 2020 / أوجد مساحة أكبر شبه منحرف متساوي الساقين يمكن رسمه داخل منحنى الاقتران ق(س) = √(١٦ - س²) بحيث أن رؤوسه أصغر الاقتران والأسيه الأخرى تقعان على منحنى ق(س) فوق محور السينات .

الحل / ص = √(١٦ - س²) ← ص² = ١٦ - س² ← ص² + س² = ١٦ معادلة دائرة مركزها (٠، ٠) و نصف = ٤

أصفاره ← ٠ = ١٦ - س² ← س² = ١٦ ← س = {٤، -٤}




مساحة شبه المنحرف = ½ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

م = ½ (٤ + ٤ + س + س) × ع

م = ½ (٨ + ٢س) × ع ← علاقة رئيسية .

ع = ق(س) = √(١٦ - س²) ← علاقة مساعدة .

م = ½ × ٢ (٤ + س) √(١٦ - س²)

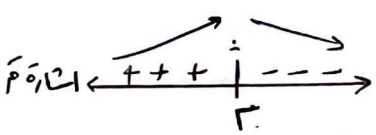
م = (٤ + س) √(١٦ - س²)

م' = (٤ + س) × (-٢س / ٢√(١٦ - س²)) + √(١٦ - س²)

م' = (-س² - ٤س + ١٦ - س²) / √(١٦ - س²) = (-٢س² - ٤س + ١٦) / √(١٦ - س²)

م' = ٠ ← ٠ = -٢س² - ٤س + ١٦ (÷ -٢) ← ٠ = س² + ٢س - ٨

٠ = (س + ٤)(س - ٢) ← س = -٤ (مرفوض) ، س = ٢

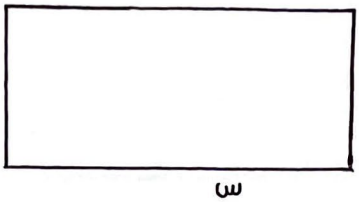



عند (س = ٢) يظهر مطلقة و وحيدة و عندها مساحة أكبر شبه منحرف

م = (٤ + ٢)√(١٦ - ٤) = ١٢√٣ وحدة مساحة .

• 2020 دور ثالث/ يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل في أرضه وذلك بإحاطتها بسياج فإذا كان لديه ٨٠ متر من الأسلاك ما مساحة أكبر حديقة يمكنه للرجل إحاطتها.

الحل/ نفرض طول المستطيل = س و عرضه = ص




مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = س ص ← علاقة رئيسية

م = س (٤٠ − س)

م = ٤٠س − س²

م' = ٤٠ − ٢س = ٠ ⇐ ٢س = ٤٠

س = ٢٠ ⇐

م'' = −٢ < ٠ ∴ و عند س = ٢٠ يوجد نهاية عظمى محلية مطلقة وحيدة عندها أكبر مساحة ممكنة.

م = ٢٠(٤٠ − ٢٠) = ٤٠٠ متر مربع

طول السلك = محيط المستطيل

٢(س + ص) = ٨٠

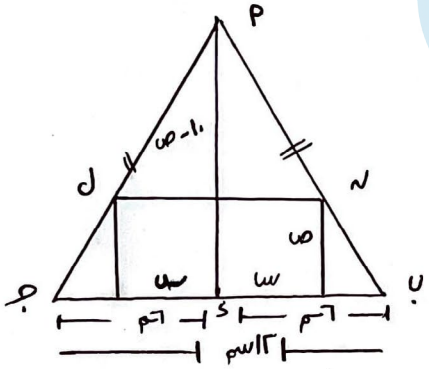
س + ص = ٤٠

ص = ٤٠ − س علاقة مساعدة.

---

• 2021 دور أول/ جد مساحة أكبر مستطيل يمكن وضعه داخل مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ١٠ سم بحيث ينطبق أحد أضلاعه على قاعدة المثلث ويقع الرأسان الآخران على ساقي المثلث.

الحل/ ∆أ ب ج ∼ ∆ل م ج و ينصف $\overline{ع ك}$ ⇐ $\overline{ل و}$ = $\overline{و م}$ = ٦ سم.




مساحة المستطيل = الطول × العرض

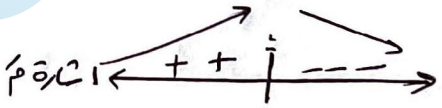
م = ٢س ص ← علاقة رئيسية.

م = ٢ × $\frac{٣}{٥}$ (١٠ − ص) ص

م = $\frac{٦}{٥}$ (١٠ص − ص²)

م' = $\frac{٦}{٥}$ (١٠ − ٢ص) = ٠ ⇐

١٠ − ٢ص = ٠ ⇐ ص = ٥




عند (ص = ٥) يوجد نهاية عظمى مطلقة لأنها وحيدة عندها أكبر مساحة ممكنة.

م = $\frac{٦}{٥}$ (١٠ − ٥) × ٥ = ٦ × ٥ = ٣٠ سم²

من تشابه المثلثين (∆أ م ج ∼ ∆ل ن م)

$\frac{ص - ١٠}{١٠} = \frac{س ٢}{١٢}$

١٠س = ٦(ص − ١٠)

س = $\frac{٦}{١٠}$ (ص − ١٠)

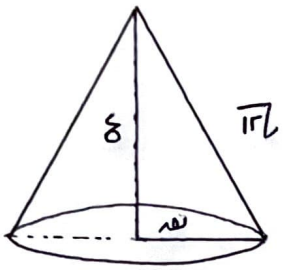
س = $\frac{٣}{٥}$ (ص − ١٠) علاقة مساعدة.

أ.مي حوّاري

---

• 2021 دور ثاني/ أوجد حجم أكبر مخروط دائري قائم طول راسمه ١٢ سم.

الحل:




حجم المخروط $= \frac{1}{3}\pi$ نق$^2$ ع

المساحة الجانبية $= \pi$ نق ع ← علاقة رئيسية

$ح = \frac{\pi}{3}$ نق$^2$ ع

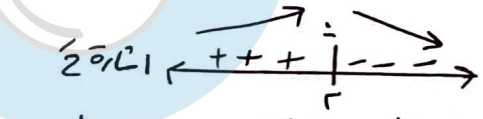
$ح = \frac{\pi}{3}(١٢ - ع^2)(ع)$

$ح = \frac{\pi}{3}(١٢ع - ع^3)$

$ح' = \frac{\pi}{3}(١٢ - ٣ع^2) = ٠$

$١٢ = ٣ع^2 \leftarrow ٤ = ع^2$

$ع = ٢$ سم




عند ($ع = ٢$) تأخذ مطاعة وحيدة عندها أكبر حجم ممكن.

$ح = \frac{\pi}{3}(١٢ - ٤)(٢) = ١٦$ سم$^3$

باستخدام فيثاغورس:

$نق^2 + ع^2 = ١٢$

$نق^2 = ١٢ - ع^2$

أ.مي حوّاري

---

2022 دور أول/ جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ٤ سم، بحيث يقع أحد أضلاعه على قطر الدائرة ورأساه الآخران على الدائرة.

الحل/ نفرض طول المستطيل ($٢س$) و عرضه $= (ص)$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$م = ٢س ص$ ← علاقة رئيسية

$م = ٢س\sqrt{١٦ - س^2}$

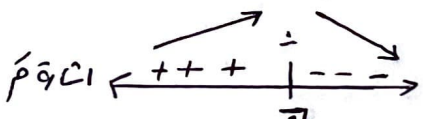
$م' = ٢س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{١٦ - س^2}} + \sqrt{١٦ - س^2} \times ٢$

$م' = \frac{-٢س^2 + ٢(١٦ - س^2)}{\sqrt{١٦ - س^2}}$

$م' = \frac{-٤س^2 + ٣٢}{\sqrt{١٦ - س^2}} = ٠$

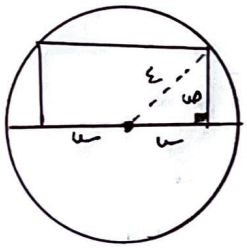
$-٤س^2 + ٣٢ = ٠ \leftarrow ٤س^2 = ٣٢ \leftarrow س^2 = ٨$

$س = \sqrt{٨}$




عند ($س = \sqrt{٨}$) تأخذ مطاعة عندها أكبر مساحة ممكنة.

$م = ٢\sqrt{٨}\sqrt{١٦ - ٨} = ٢ \times ٨ = ١٦$ سم$^2$.




باستخدام فيثاغورس:

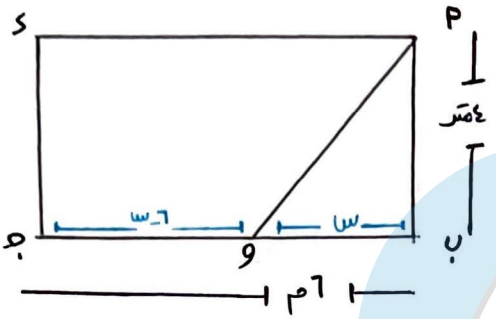
$س^2 + ص^2 = ع^2$

$ص^2 = ١٦ - س^2$

$ص = \sqrt{١٦ - س^2}$ علاقة مساعدة

---

2022 دور ثاني/ أ ب ج د مستطيل فيه $\overline{أب} = ٤$ سم، $\overline{ب ج} = ٦$ سم، و (و) نقطة على الضلع $(\overline{ب ج})$ عين موقع النقطة (و) بحيث تكون قيمة المقدار $٣(\overline{أو})^2 + (\overline{وج})^2$ أقل ما يمكن.




الحل/ ل = ٣(أو) + (وج)

ل = ٣(√(١٦ + س²)) + (٦ - س)

ل' = ٣ × (٢س / ٢√(١٦ + س²)) - ١ = ٠

(٣س / √(١٦ + س²)) = ١

(٣س = √(١٦ + س²))²

٩س² = ١٦ + س²

٨س² = ١٦ ⇐ س² = ٢

⇐ س = √٢

باستخدام فيثاغورس :

(أو)² = (٤)² + س²

أو = √(١٦ + س²) علاقة مساعدة .

اشارة ل': - - - - | + + +  (٠ ، √٢)

عند س = √٢ صغرى محلية ومطلقة عندها أقل ل ممكنة .

ب و = س = √٢ م ، وج = ٦ - س = ٦ - √٢ م

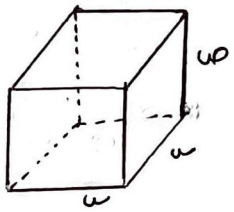
⇐ تبعد و عن ب = √٢ م وعن وج = ٦ - √٢ م

أ.مي حوّاري

---

• 2023 دور أول/ سلك طوله ١٢٠ سم ، تم قطعه إلى أجزاء لتشكيل حواف (أحرف) صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ما أكبر حجم ذلك الصندوق

الحل/ نفرض أبعاد المتوازي القاعدة (س ، س) الارتفاع (ص) .




حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = (س × س) × ص

ح = س² ص ← علاقة رئيسية .

ح = س² (٣٠ - ٢س)

ح = ٣٠س² - ٢س³

ح' = ٦٠س - ٦س² = ٠

٦س (١٠ - س) = ٠

س = ٠ ، س = ١٠

طول السلك = مجموع أطوال أحرفه

(١٢٠ = ٨س + ٤ص) / ٤

٣٠ = ٢س + ص

٣٠ - ٢س = ص ← علاقة مساعدة .

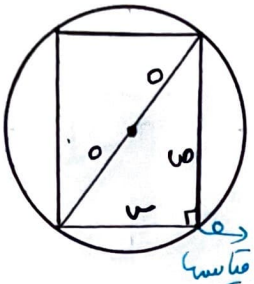
اشارة ح': + + + | - - -  (٠ ، ١٠)

عند (س = ١٠) عظمى مطلقة عندها أكبر حجم ممكن.

ح = ١٠² (٣٠ - ٢٠) = ١٠٠ × ١٠ = ١٠٠٠ سم³

• 2023 دور ثاني / ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها يساوي (٥سم)؟

الحل/




مساحة المستطيل = س ص

م = س ص علاقة رئيسية .

م = س $\sqrt{١٠ - س^٢}$

م' = س × $\frac{-٢س}{٢\sqrt{١٠ - س^٢}}$ + $\sqrt{١٠ - س^٢}$

م' = $\frac{-س^٢ + ١٠ - س^٢}{\sqrt{١٠ - س^٢}}$ = ٠

$-٢س^٢ + ١٠ = ٠$

$١٠ = ٢س^٢ \leftarrow س^٢ = ٥٠$

س = $\sqrt{٥٠}$

محيطية قياسها ٩٠° ← الضلع المقابل هو قطر الدائرة

باستخدام فيثاغورس /

$ص^٢ + س^٢ = ١٠^٢$

ص = $\sqrt{١٠ - س^٢}$ علاقة مساعدة

اشارة م'

+ + + | - - -

$\sqrt{٥٠}$

عند (س = $\sqrt{٥٠}$) عظمى مطلقة «وحيدة» عندها أكبر مساحة ممكنة .

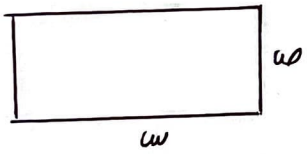
م = $\sqrt{٥٠}\sqrt{١٠ - ٥٠}$ = $\sqrt{٥٠} \times \sqrt{٥٠}$ = ٥٠ سم²

---

• 2023 دور ثالث / ما مساحة أكبر مستطيل يمكن إحاطته بسياج طوله ١٦ متر.

الحل/ نفرض أبعاد المستطيل (س ، ص)

مساحة المستطيل = الطول × العرض




م = س × ص ← علاقة رئيسية .

م = (س)(٨ − س)

م = ٨س − س²

م' = ٨ − ٢س = ٠

٨ = ٢س ⇐ س = ٤

م'' = −٢ ∴ ، عند (س = ٤) عظمى مطلقة

عندها أكبر مساحة ممكنة .

م = ٤(٨ − ٤) = ١٦ متر²

محيط المستطيل = ٢(س + ص)

١٦ = ٢(س + ص)

٨ = س + ص

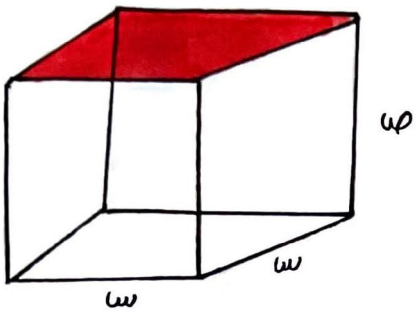
⇐ ٨ − س = ص علاقة مساعدة

---

• 2024 دور أول / يراد انشاء خزان على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومفتوح من الأعلى بتكلفة (٤٨ دينار) فإذا كانت تكلفة المتر المربع من القاعدة (١٦ دينار) وتكلفة المتر المربع من الجوانب (٤) دنانير أوجد أبعاد الخزان حيث تكون سعته أكبر ما يمكن.

الحل/ نفرض أبعاد المتوازي : القاعدة س ، س

الارتفاع = ص




سعة المتوازي (حجمه) = مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = س² ص ← علاقة رئيسية

ح = س² (٣ − س²/س) = س(٣ − س²)

ح = ٣س − س³

ح' = ٣ − ٣س² = ٠

٣ = ٣س² ⇐ س² = ١

⇐ س = ١

اشارة ح': + + + | − − − − (١)

عند (س = ١) عظمى مطلقة عندها أكبر حجم ممكن.

ص = (٣ − ١)/١ = ٢

الأبعاد (س، س، ص) = (١، ١، ٢) م

التكاليف = تكاليف القاعدة + تكاليف الجوانب

٤٨ = ١٦ × (س × س) + ٤(٤ س ص)

(٤٨ = ١٦س² + ١٦ س ص) / ١٦

٣ = س² + س ص

٣ − س² = س ص

⇐ ص = (٣ − س²)/س علاقة مساعدة.

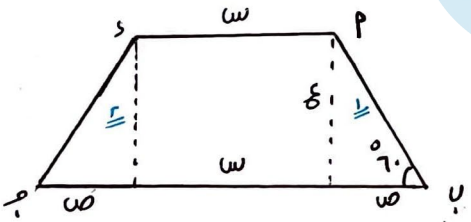
أ.مي حوّاري

---

• 2024 دور ثاني / أ ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين محيطه (٤٠ سم) وقياس الزاوية أ ب جـ = ٦٠°

احسب أطوال أضلاعه التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن

الحل/




مساحة شبه المنحرف = ½ (ب جـ + أ د) × ع

م = ½ ((س + ٢ص) + س) × ع

م = ½ (٢س + ٢ص) ع

م = (س + ص) ع علاقة رئيسية.

م = (س + ص) × √٣ ص

م = (٢٠ − ٣ص + ص) √٣ ص

م = (٢٠ − ٢ص) × √٣ ص

م = (٢٠ص − ٢ص²) √٣

م' = (٢٠ − ٤ص) × √٣ = ٠

٢٠ = ٤ص ⇐ ص = ٥ سم

اشارة م': + + | − − − (٥)

• عند (ص = ٥) عظمى مطلقة عندها أكبر مساحة ممكنة.

الأضلاع / ب أ = د جـ = ٢ص = ١٠ سم

أ د = س = ٢٠ − ١٥ = ٥ سم

ب جـ = س + ٢ص = ٥ + ١٠ = ١٥ سم

Δ (١) يطابق Δ (٢) بحالة (ض، ز، ز)

لأن شبه المنحرف متساوي الساقين.

• محيط شبه المنحرف = ٤٠

• ظا ٦٠ = ع/ص ⇐ √٣ = ع/ص ⇐ ع = √٣ ص

عن طريق فيثاغورس:

ص² + ع² = (أ ب)²

ص² + ٣ص² = (أ ب)² ⇐ ٤ص² = (أ ب)²

⇐ أ ب = ٢ص = د جـ

⇐ محيط شبه المنحرف = أ ب + د جـ + أ د + ب جـ

٤٠ = ٢ص + ٢ص + س + س + ٢ص

(٤٠ = ٦ص + ٢س) / ٢

٢٠ = ٣ص + س ⇐ س = ٢٠ − ٣ص

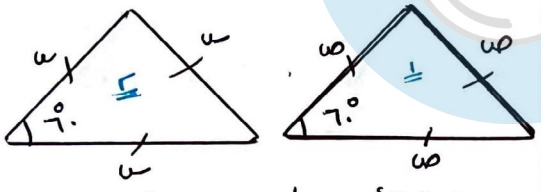
• 2024 دور ثالث / جد أقصر مسافة بين النقطة أ(٢، ٠) ومنحنى العلاقة ص² − س² = ٨

الحل / ف = √١٠ وحدة مسافة "مكرر 2015"

---

• 2025 دور أول / سلك طوله ١٨ سم قسّم إلى جزأين، ثني كل منهما على شكل مثلث متساوي الأضلاع، ما طول ضلع كل من المثلثين لتكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن.

الحل / • تذكر / مساحة Δ = ½ حاصل ضرب ضلعين متجاورين × جا (الزاوية المحصورة بينهما).




طول السلك = محيط Δ١ + محيط Δ٢

(١٨ = ٣ص + ٣س) / ٣

٦ = ص + س

٦ − س = ص ← علاقة مساعدة.

المساحة = مساحة Δ١ + مساحة Δ٢

م = ½ × ص × ص جا ٦٠ + ½ س² جا ٦٠

م = ½ ص² × √٣/٢ + ½ س² × √٣/٢

م = √٣/٤ (س² + ص²) ← علاقة رئيسية.

م = √٣/٤ (س² + (٦ − س)²)

م = √٣/٤ (س² + ٣٦ − ١٢س + س²)

م = √٣/٤ (٢س² − ١٢س + ٣٦)

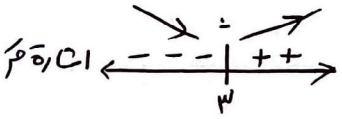
م' = √٣/٤ (٤س − ١٢) = ٠ ⇐ ٤س = ١٢ ⇐ س = ٣ سم

عند (س = ٣) صغرى مطلقة عندها أقل مساحة ممكنة.

ص = ٦ − س = ٣ سم

⇐ طول ضلع المثلث الأول = ص = ٣ سم.

" " " الثاني = س = ٣ سم

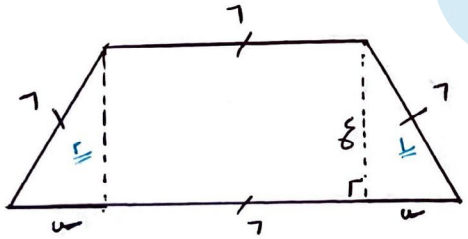



أ.مي حوّاري

---

• 2017 + 2025 دور ثاني / شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها ٦ سم، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف.

الحل /




Δ١ يطابق Δ٢ حسب (ض، ز، ز)

لأن شبه المنحرف متساوي الساقين

باستخدام فيثاغورس:

س² + ع² = ٦²

ع = √(٣٦ − س²) علاقة مساعدة.

مساحة شبه المنحرف = ½ (ق١ + ق٢) ع

م = ½ (٦ + ٢س + ٦) × ع

م = (٦ + س) ع علاقة رئيسية

⇐ م = (٦ + س) √(٣٦ − س²)

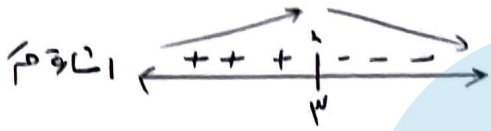
م' = (٦ + س) × (−٢س) / (٢√(٣٦ − س²)) + √(٣٦ − س²)

م' = (−٦س − س² + ٣٦ − س²) / √(٣٦ − س²) = ٠

(−٢س² − ٦س + ٣٦ = ٠) / −٢

$س^2 + ٣س - ١٨ = ٠ \Leftarrow (س - ٣)(س + ٦) = ٠$

$س = ٣$ ، $س = -٦$ ✗




• عند (س = ٣) عظمى مطلقة عندها أكبر مساحة ممكنة.

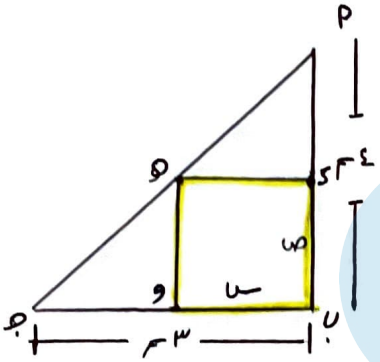
$م = (٦+٣)\sqrt{٣٦-٩} = ٩\sqrt{٢٧} = ٩\sqrt{٩\times٣} = ٩\times٣\sqrt{٣}$

$\Leftarrow م = ٢٧\sqrt{٣}$ سم$^2$.

أ.مي حوّاري

---

• 2020 أريحا / أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٣ سم ، د نقطة على أ ب ، هـ نقطة على أ جـ ، و نقطة على ب جـ ، جد أبعاد المستطيل (هـ و ب د) التي تكون عندها مساحة المستطيل أكبر ما يمكن




الحل

مساحة المستطيل = الطول × العرض

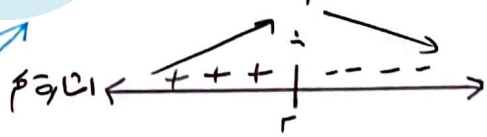
م = س ص علاقة رئيسية.

$م = (٣ - \frac{٣}{٤}ص)ص$

$م = ٣ص - \frac{٣}{٤}ص^2$

$م' = ٣ - \frac{٣}{٢}ص = ٠$

$٣ = \frac{٣}{٢}ص \Leftarrow ص = ٢$




عند (ص = ٢) عظمى مطلقة لأنها وحيدة،، عندها أكبر مساحة ممكنة.

$س = ٣ - \frac{٣}{٤}\times٢ = ٣ - \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$

$\Leftarrow$ أبعاد المستطيل (س ، ص) = $(٢ ، \frac{٣}{٢})$

$\triangle$ أ د هـ يشابه $\triangle$ أ ب جـ

$\Leftarrow \frac{٤-ص}{٤} = \frac{س}{٣}$

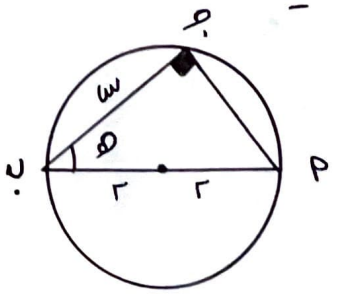
$\Leftarrow (٤س = ١٢ - ٣ص) / ٤$

$س = \frac{١٢}{٤} - \frac{٣}{٤}ص$

$\Leftarrow س = ٣ - \frac{٣}{٤}ص$ علاقة مساعدة

---

• 2020 غرب غزة / دائرة طول قطرها أ ب = ٤ سم بدأت النقطة جـ الحركة على الدائرة من ب باتجاه أ جد قياس الزاوية ب التي تجعل مساحة $\triangle$ أ ب جـ أكبر ما يمكن.




الحل

$\measuredangle$ جـ = ٩٠° محيطية على القطر أ ب

مساحة $\triangle$ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$(أ ب)(ب جـ) جا هـ

$م = \frac{١}{٢}(٤)$ س جا هـ

م = ٢ س جا هـ علاقة رئيسية.

م = ٢ × ٤ جتا هـ جا هـ

م = ٤ جا (٢هـ)

$م' = ٨$ جتا ٢هـ = ٠

جتا هـ = $\frac{س}{٤}$

$\Leftarrow$ ٤ جتا هـ = س علاقة مساعدة

إما جتا ٢هـ = ٠ ، ٢هـ = $\frac{\pi}{٢}$ ← هـ = $\frac{\pi}{٤}$

أو ٢هـ = $\frac{٣\pi}{٢}$ ، هـ = $\frac{٣\pi}{٤}$ مرفوض لأن △ أ ب جـ قائم .

اشارة م

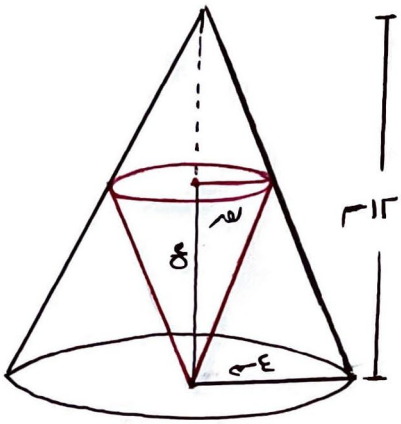
+ + + | − − −

$\frac{\pi}{٤}$

عند هـ = $\frac{\pi}{٤}$ عظمى مطلقة "وحيدة" عندها أكبر مساحة ممكنة

---

• 2020 الوسطى / جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته (٤سم) وارتفاعه (١٢سم) حيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي .




الحل / نفرض أبعاد المخروط الداخلي (ق ، ع)

حجم المخروط الداخلي = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = $\frac{\pi}{٣}$ ق$^٢$ ع ← علاقة رئيسية

أ.مي حوّاري

ح = $\frac{\pi}{٣}$ ق$^٢$ (١٢ − ٣ق)

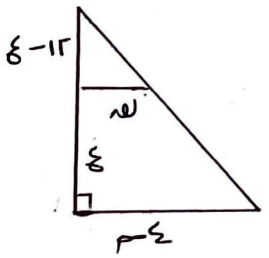
ح = $\frac{\pi}{٣}$ (١٢ق$^٢$ − ٣ق$^٣$)

ح = $\pi$ (٤ق$^٢$ − ق$^٣$)

ح = $\pi$ (٨ق − ٣ق$^٢$) = ٠

ق (٨ − ٣ق) = ٠

ق = ٠ × ، ق = $\frac{٨}{٣}$




من تشابه المثلثات :

$\frac{ق}{\cancel{٤}_{١}} = \frac{١٢ - ع}{\cancel{١٢}_{٣}}$

٣ق = ١٢ − ع

ع = ١٢ − ٣ق

" علاقة مساعدة "

اشارة ح

+ + + | − − −

$\frac{٨}{٣}$

عندما ق = $\frac{٨}{٣}$ عظمى مطلقة "وحيدة" عندها أكبر حجم ممكن .

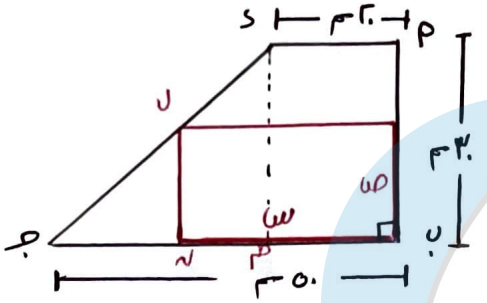
ح = $\pi$ (٤ × $\frac{٨}{٣}$)$^٢$ − ($\frac{٨}{٣}$)$^٣$ = $\pi$ ($\frac{٢٥٦}{٩}$ − $\frac{٥١٢}{٢٧}$) = $\pi$ ($\frac{٢٥٦}{٢٧}$)

⇐ ح = $\frac{٢٥٦\pi}{٢٧}$ سم$^٣$ .

---

• 2023 طولكرم / جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل شبه المنحرف أ ب جـ د الذي فيه $\overline{أد}$ // $\overline{بجـ}$ ، $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{بجـ}$ ، $\overline{أب}$ = ٣٠ سم ، $\overline{أد}$ = ٢٠ سم ، $\overline{بجـ}$ = ٥٠ سم حيث يقع أحد أضلاعه على $\overline{أب}$ ، والضلع الآخر على $\overline{بجـ}$ ورأسه الرابع على $\overline{جـد}$

الحل/ نفرض أبعاد المستطيل (س، ص)
مساحة المستطيل = الطول × العرض
م = س ص علاقة رئيسية.




Δ دم ج شبه Δ ل ن ج

$\frac{\text{دم}}{\text{ل ن}} = \frac{\text{م ج}}{\text{ن ج}}$ ←

$\frac{٢٠ - ص}{س} = \frac{٢٠}{٥٠ - س}$ ←

ص = ٥٠ − س ← علاقة مساعدة.

م = س (٥٠ − س)
م = ٥٠ س − س²
م′ = ٥٠ − ٢س = ٠
٢س = ٥٠ ← س = ٢٥

إشارة م′: + + | − − −  (عند س = ٢٥)

عند (س = ٢٥) تكون مطلقة عندما أكبر مساحة ممكنة

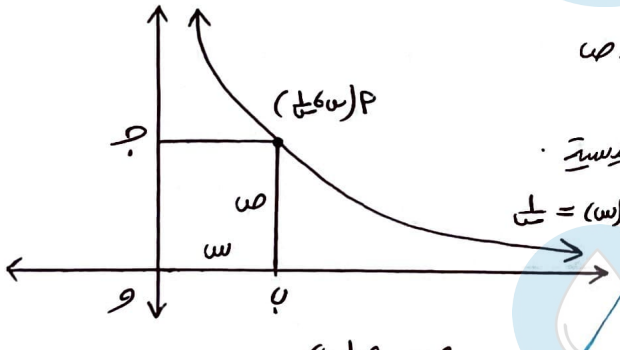
م = ٢٥ (٥٠ − ٢٥) = ٢٥ × ٢٥ = ٦٢٥ سم²

أ.مي حوّاري

---

• 2024 الطيلن/ من النقطة P(س، ص) الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، س > ٠
رسم عمودان على المحورين الاحداثيين هما $\overline{ب P}$ و $\overline{ج P}$ أوجد بعدي المستطيل ب P و ج
(صح) و نقطة الأصل) بحيث يكون محيطه أصغر ما يمكن.

الحل/ نفرض طول المستطيل = س، وعرضه = ص
محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)




ق(س) = $\frac{١}{س}$ علاقة رئيسية.

ص = ق(س)

ص = $\frac{١}{س}$ علاقة مساعدة.

ح = ٢ (س + ص)
ح = ٢ (س + $\frac{١}{س}$)
ح′ = ٢ (١ − $\frac{١}{س^٢}$) = ٠
$\frac{١}{س^٢}$ = ١ ← س² = ١
س = ١

إشارة ح′: − − − | + + +  (عند س = ١)

عند (س = ١) صغرى مطلقة عندها أقل محيط ممكن.
ص = $\frac{١}{١}$ = ١ ← أبعاد المستطيل (س، ص) = (١ سم، ١ سم).

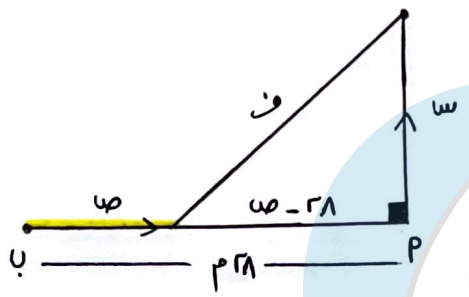
---

• 2024 طولكرم/ ب ق P نقطتان مادية تتحركان في نفس الوقت و P تقع شرق ب والمسافة الأفقية بينهما (٢٨ سم) فإذا انطلقت النقطة P إلى الشمال بسرعة (٣ سم/ث) وبعد (٢ث) انطلقت النقطة ب إلى الشرق بسرعة (٤ سم/ث) و جد الزمن الذي تكون فيه المسافة بين النقطتين أقل ما يمكن.

الحل/ نفرض زمن أ هو ن

⇐ زمن ب = ن − ٢

باستخدام فيثاغورس




$ف^٢ = س^٢ + (٢٨ - ص)^٢$

$ف = \sqrt{س^٢ + (٢٨ - ص)^٢}$ علاقة رئيسية.

$ف = \sqrt{(٢ن)^٢ + (٢٨ - ٤ن + ٨)^٢}$

$ف = \sqrt{٤ن^٢ + (٣٦ - ٤ن)^٢}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٨ن + ٢(٣٦ - ٤ن) \times -٤}{٢\sqrt{٤ن^٢ + (٣٦ - ٤ن)^٢}} = ٠$

$٨ن - ٨(٣٦ - ٤ن) = ٠$

$٨ن = ٨(٣٦ - ٤ن)$

$ن = ٣٦ - ٤ن$

$٥ن = ٣٦ \Leftarrow ن = \frac{٣٦}{٥} = ٧,٢$ ث

• عندما (ن = ٧,٢ ث) صفري مطلقة عندها أقل مسافة ممكنة

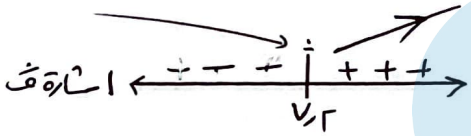
المسافة = السرعة × الزمن

ف أ = س = ٢ × ن = ٢ن

⇐ س = ٢ن علاقة مساعدة

ف ب = ص = ٤(ن − ٢)

ص = ٤ن − ٨ علاقة مساعدة




• 2024 نابلس/ جد مساحة أكبر مثلث يمكن رسمه بحيث يقع رأسان من رؤوسه على المستقيمين $ص_١ = ٢س$ ، $ص_٢ = ٦ - س$ والرأس الثالث يقع على محور السينات علماً بأن قاعدة المثلث توازي محور السينات.

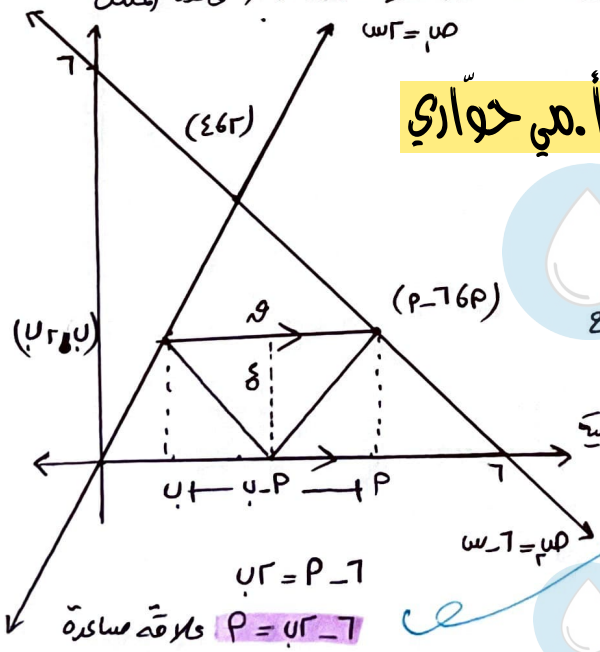
الحل/

| | | |
|---|---|---|
| $ص_٢$ | ٦ | ٠ |
| س | ٠ | ٦ |

$ص_١ = ص_٢ \Leftarrow ٢س = ٦ - س$

$٣س = ٦ \Leftarrow س = ٢$

$ص = ٢ \times ٢ = ٤ \Leftarrow (٢،٤)$ نقطة التقاطع




أ.مي حوّاري

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ ق ع

$م = \frac{١}{٢}(أ - ب)(٢ب)$ علاقة رئيسية

$م = \frac{١}{٢}(٦ - ٢ب - ب) \times ٢ب$

$م = (٦ - ٣ب)ب$

$م = ٦ب - ٣ب^٢$

$م' = ٦ - ٦ب = ٠ \Leftarrow ٦ = ٦ب \Leftarrow ب = ١$ / $م'' = -١ < ٠$ عند (ب = ١) عظمت مطلقة عندها أكبر مساحة ممكنة.

$م = (٦ - ٣)(١) = ٣$ وحدات مربعة.

$٦ - أ = ٢ب$

$٦ - ٢ب = أ$ علاقة مساعدة

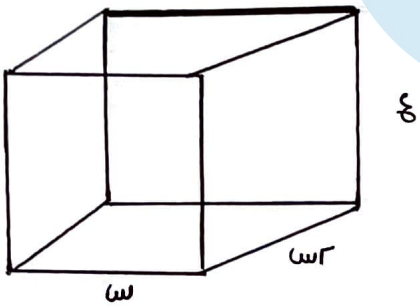
• 2024 القدس/ جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤سم، وارتفاعه ١٢سم، حيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الداخلي

الحل/ $ح = \frac{٢٥٦}{٢٧}\pi$ سم$^٣$ "مكرر 2020 الوسطى"

---

• 2025 سلفيت/ صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مستطيل طوله مثلي عرضه إذا كان مجموع ارتفاع الصندوق ومحيط قاعدته هو ٥٤سم جد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن

الحل/




حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × ع

$ح = ٢س \times س \times ع$

$ح = ٢س^٢ ع$ ← علاقة رئيسية.

$ح = ٢س^٢ (٥٤ - ٦س)$

$ح = ١٠٨س^٢ - ١٢س^٣$

$ح' = ٢١٦س - ٣٦س^٢ = ٠$

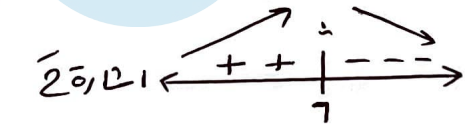
$٣٦س(٦ - س) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٦$

$٥٤ = ع + (٢س + س) \times ٢$

$٥٤ = ع + ٦س$

$٥٤ - ٦س = ع$ ← علاقة مساعدة




أ.مي حوّاري

عند (س = ٦) عظمى مطلقة عندها أكبر حجم ممكن.

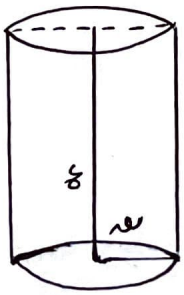
$ع = ٥٤ - ٦ \times ٦ \Leftarrow ع = ١٨$

أبعاد المستطيل (س، ٢س، ع) = (٦، ١٢، ١٨)

---

• 2025 أردن/ أسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين مساحتها الكلية (٦٠٠π) سم$^٢$ ما أكبر حجم ممكن للأسطوانة.

الحل/ نفرض أبعاد الأسطوانة (نق، ع)




حجم الأسطوانة = $نق^٢ \pi ع$

$ح = نق^٢ \pi ع$ ← علاقة رئيسية.

$ح = نق^٢ \pi \left(\frac{٣٠٠}{نق} - نق\right)$

$ح = \pi \left(\frac{٣٠٠}{نق} \times نق^٢ - نق \times نق^٢\right)$

$ح = \pi (٣٠٠نق - نق^٣)$

$ح' = \pi (٣٠٠ - ٣نق^٢) = ٠$

مساحة الأسطوانة = $٢نق^٢ \pi + ٢نق \pi ع$

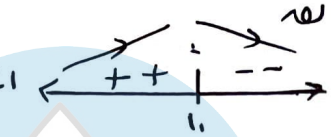
$٦٠٠\cancel{\pi} = ٢نق \cancel{\pi}(نق + ع)$

$٣٠٠ = نق^٢ + نق ع$

$\Leftarrow$ $م = ط نق^2$ $\Leftarrow$ $م = ٣ نق^2$ $\Leftarrow$ $ع = ٣ - نق$

$ع = ٣ - نق$ $\Leftarrow$ علاقة مساعدة

$نق = ١٠$ $\Leftarrow$




اشارة $\dot{ق}$

عند $(نق = ١٠)$ تأخذ مطلقة عندها أكبر حجم ممكن.

$= ط \times ١٠ (١٠ - \frac{٣}{١٠}) = ط \times ١٠ (٧) = ٧٠٠ ط$ سم$^٣$

---

• 2025 رام الله/ إذا كان $ق(س) = \frac{١}{٣} س^٣ - ٣س^٢ - ٤$ ما قيمة الاحداثي السيني الذي يجعل ميل المماس لمنحنى $ق(س)$ أقل ما يمكن

P/ ٦ ص ٦٥ ب/ -٣ ص/ ٦ ٣/s

الحل/ $ق(س) = س^٣ - ٦س$

ميل المماس $= ق'(س) = س^٢ - ٦س$

$ق'(س) = ٢س - ٦ = ٠$ $\Leftarrow$ $٢س = ٦$ $\Leftarrow$ $س = ٣$

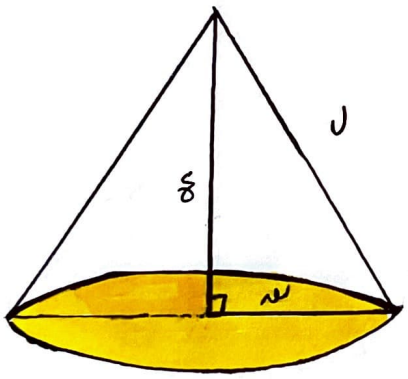
$ق''(س) = ٢ > ٠$ $\Leftarrow$ عند $(س = ٣)$ يعزى مطلقة عندها أقل ميل ممكن.

أ.مي حوّاري

---

• خارجي/ يراد عمل خيمة مخروطية الشكل تحوي على $\frac{٣٢}{٣} ط$ متر مكعب من الفراغ بدلالة أبعاد الخيمة التي يؤخذ لها أقل قدر ممكن من القماش.

الحل/




المساحة الجانبية $= نق ط ل$ علاقة رئيسية

$م = ط \times \frac{٣٢}{ع} \times (نق^٢ + ع^٢)$

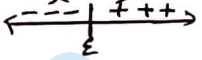
$م = ط \sqrt{\frac{٣٢}{ع} (\frac{٣٢}{ع} + ع^٢)}$

$م = ط \sqrt{\frac{١٠٢٤}{ع^٢} + ٣٢ ع}$

$م' = ط \times \frac{-٢ \times ١٠٢٤ + ٣ع^٣}{٢ \sqrt{\frac{١٠٢٤}{ع^٢} + ٣٢ ع}} = ٠$

$-٢ \times ١٠٢٤ + ٣ع^٣ = ٠$

$٣ع^٣ = ٢ \times ١٠٢٤$ $\Leftarrow$ $ع^٣ = ٦٤$ $\Leftarrow$ $ع = ٤$




• عند $(ع = ٤)$ يعزى مطلقة عندها أقل مساحة ممكنة.

حجم المخروط $= \frac{١}{٣} ط نق^٢ ع$

$ط \frac{٣٢}{٣} = ط \frac{١}{٣} نق^٢ ع$

$٣٢ = نق^٢ ع$

$نق = \frac{٣٢}{ع}$ علاقة مساعدة.

---

من فيثاغورس:

$ل^٢ = نق^٢ + ع^٢$

$ل = \sqrt{نق^٢ + ع^٢}$ علاقة مساعدة

$\text{ن} = \sqrt{\frac{٣٢}{\text{ع}}} = \sqrt{\frac{٣٢}{٤}} = \sqrt{٨} \Leftarrow \text{ن} = ٢\sqrt{٢}$ متر

$\text{ل} = \sqrt{\text{ع}^٢ + \text{ن}^٢} = \sqrt{١٦ + ٨} = \sqrt{٢٤} = ٢\sqrt{٦}$ متر

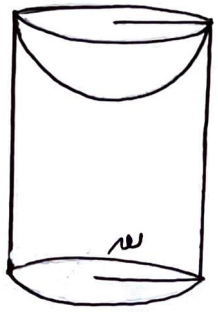
$\text{ع} = ٤$ متر

أ.مي حوّاري

---

• خارجي/ قطعة من الخشب على شكل أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $٤\pi$ ، حُفر فيها نصف كرة طول قطرها مساوٍ لطول قطر قاعدة الأسطوانة ، جد طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الأسطوانة أكبر ما يمكن.

الحل/




الحجم = حجم الأسطوانة − حجم نصف كرة

$\text{ح} = \text{ن}^٢\pi\text{ع} - \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣}\text{ن}^٣\pi$

$\text{ح} = \pi\text{ن}^٢\text{ع} - \frac{٢}{٣}\pi\text{ن}^٣$ ← علاقة رئيسية.

$\text{ح} = \pi\text{ن}^{\cancel{٢}} \times \frac{٢\text{ن}}{\cancel{\text{ن}}} - \frac{٢}{٣}\pi\text{ن}^٣$

$\text{ح} = ٢\text{ن}\pi\text{ن} - \frac{٢}{٣}\text{ن}^٣\pi$

$\text{ح}' = ٢\text{ن}\pi - ٢\pi\text{ن}^٢ = ٠$

$٢\text{ن}\cancel{\pi} = ٢\cancel{\pi}\text{ن}^٢$

$١٠ = \text{ن}^٢$

$\text{ن} = ١٠$

المساحة الجانبية = $٢\text{ن}\pi\text{ع}$

$٤\cancel{\pi} = ٢\text{ن}\cancel{\pi}\text{ع}$

$\text{ع} = \frac{٢\text{ن}}{\text{ن}}$ علاقة مساعدة.

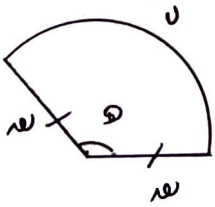
اشارة ح': + + | − − −
١٠

عندما ن = ١٠ عظمى محلية ومطلقة "وحيدة" عندها أكبر حجم ممكن.

---

• خارجي/ قطاع دائري محيطه ٢٨ م ، جذر اوتيه التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن

الحل/




مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ ن ل

$\text{م} = \frac{١}{٢}\text{ن}\,\text{ل}$ ← علاقة رئيسية.

$\text{م} = \frac{١}{٢}\text{ن}(٢٨ - ٢\text{ن})$

$\text{م} = ١٤\text{ن} - \text{ن}^٢$

$\text{م}' = ١٤ - ٢\text{ن} = ٠$

$١٤ = ٢\text{ن} \Leftarrow \text{ن} = ٧$

اشارة م': + + | − − −
٧

محيط القطاع = $٢\text{ن} + \text{ل}$

$٢٨ = ٢\text{ن} + \text{ل}$

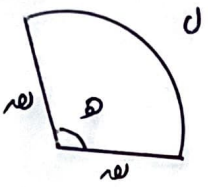
$٢٨ - ٢\text{ن} = \text{ل}$ علاقة مساعدة

• عندما (ن = ٧) عظمى مطلقة عندها أكبر مساحة ممكنة.

$\text{ل} = ٢٨ - ١٤ = ١٤$

$\text{ل} = \text{هـ}\,\text{ن} \Leftarrow ١٤ = ٧\text{هـ} \Leftarrow \text{هـ} = ٢^{\text{ء}}$ (هـ بالراديان).

• خارجي/ قطاع دائري مساحته ١٦ سم٢ ، جد نصف قطر القطاع الذي يجعل محيطه أقل ما يمكن




الحل/ محيط القطاع = ٢هـ + ل

ح = ٢هـ + ل علاقة رئيسية

ح = ٢هـ + $\frac{٣٢}{هـ}$

ح' = ٢ − $\frac{٣٢}{هـ^{٢}}$ ∴

٢ = $\frac{٣٢}{هـ^{٢}}$ ← هـ^٢ = ٣٢

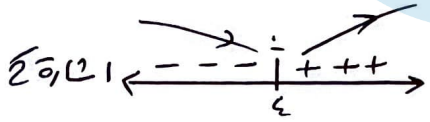
هـ^٢ = ١٦

هـ = ٤

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ هـ ل

١٦ = $\frac{١}{٢}$ هـ ل

ل = $\frac{٣٢}{هـ}$ علاقة مساعدة .




عندما هـ = ٤ سم يوجد صغرى مطلقة

عندما أقل محيط ممكن .

أ.مي حوّاري

إن أردتم فعل أي شيء أيها السّادة فافعلوا من الآن، وإياكم أن تدعوه للأيام، فإنها تُبلي الجديد، وتقصي الغريب، وتذهب من كلّ شيء بشاشته، وإنّكم بالإهمال والتّقاعد عن العمل؛ إنما تخطّون بأيديكم قبورًا لمواهبكم العالية، وقُواكم الغالية

أنسب وقت هو الآن.

# أسئلة للمهتمين الوحدة الثانية

١/ إذا كان ف(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق وكان لكل منهما نقطة حرجة عند س=ع
أثبت أن للاقتران ل(س) = ف(س) / هـ(س) نقطة حرجة ، هـ(س) ≠ ٠

الحل/ ف ، هـ قابلين للاشتقاق ولهما نقطة حرجة عند س=ع
← ف'(ع) = هـ'(ع) = ٠
ل(س) = ف(س) / هـ(س) متصل حاصل قسمة متصلين ، هـ(س) ≠ ٠
ل'(س) = (هـ(س) ف'(س) − ف(س) هـ'(س)) / هـ²(س)
ل'(ع) = (هـ(ع) ف'(ع) − ف(ع) هـ'(ع)) / هـ²(ع) = ٠
بما أن ل'(ع) = ٠ ← للاقتران ل(س) نقطة حرجة عند س = ع #

أ.مي حوّاري

---

٢/ إذا كان ف(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق على ح وكان ك(س) = ف²(س) + هـ²(س)
وكان ف'(س) = هـ(س) ، هـ'(س) = −ف(س) أثبت أن ل(س) اقتران ثابت .

الحل/ ل(س) = ف²(س) + هـ²(س) متصل على ح ، حاصل جمع متصلين
ل'(س) = ٢ ف ف' + ٢ هـ هـ'
= ٢ ف هـ + ٢ هـ × −ف ← ل'(س) = ٠
← ل(س) اقتران ثابت على ح #

---

٣/ إذا كان ف(س) = س³ + ٩/س ، ٩ ≠ ٠ ، أثبت أنه لا توجد نقطة حرجة للاقتران ف(س) مهما تكن قيمة الثابت ٩

الحل/ ف(س) = س³ + ٩/س متصل على ح / {٠}
ف'(س) = ٣س² − ٩/س² = ٠ ← ٣س⁴ = ٩ ← س⁴ = ٩/٣
← س = ∜(٩/٣)
ف''(س) = ٦ + ١٨/س⁴ ← ف''(∜(٩/٣)) = ٦ + ١٨/(٩/٣) = ٦ + ٦ = ١٢ ≠ ٠ ∴
ف''(∜(٩/٣)) = ٤ > ٠ ∴ صغرى محلية
وبما أن للاقتران ف(س) قيمة قصوى وحيدة عند س = ∜(٩/٣) وهي صغرى محلية ، لا توجد قيم عظمى لـ ف(س) #

---

٤/ أثبت أن لا توجد للاقتران ف(س) = (أس + ب) / (جـ س + ء) قيمة قصوى محلية علماً بأن
ف(س) ≠ ٠ ، أء − ب جـ ≠ ٠

الحل/ $ق(س) = \frac{أس + ب}{جـ س + د}$ متصل على $\mathbb{R} / \{\frac{-د}{جـ}\}$

$قَ(س) = \frac{(جـ س + د)(أ) - (أ س + ب)(جـ)}{(جـ س + د)^2} = \frac{\cancel{أ جـ س} + أ د - \cancel{أ جـ س} - ب جـ}{(جـ س + د)^2}$

$قَ(س) = \frac{أ د - ب جـ}{(جـ س + د)^2} = ٠ \Leftarrow أ د - ب جـ = ٠$ X لا يمكن.

$قَ(س)$ عدم عند صفر مقام $قَ \Leftarrow س = \frac{-د}{جـ} \notin$ لمجال $قَ$

$\Leftarrow$ لا يوجد نقط حرجة لـ $ق(س) \Leftarrow$ لا يوجد قيم قصوى لـ ق.

---

٥/ ق، ك كثيرا حدود موجبان دائماً ولكل منهما قيمة صغرى محلية عند $(س = أ)$ حيث $قً(أ) \neq ٠$ ، $كً(أ) \neq ٠$ أثبت أن الاقتران $(ق \times ك)(س)$ له قيمة صغرى محلية عند $(س = أ)$

الحل/ ق، ك كثيرا حدود متصلين ومشتقتين على $\mathbb{R}$ ، موجبان $\Leftarrow ق > ٠$ ، $ك > ٠$ على $\mathbb{R}$

لـ ق قيمة صغرى عند $(س = أ) \Leftarrow قَ(أ) = ٠$ ، $قً(أ) > ٠$

لـ ك قيمة صغرى عند $(س = أ) \Leftarrow كَ(أ) = ٠$ ، $كً(أ) > ٠$

نفرض $هـ(س) = (ق \times ك)(س)$ متصل؛ حاصل ضرب متصلين على $\mathbb{R}$.

$هـَ = ق كَ + ك قَ \Leftarrow هـَ(أ) = \cancel{ق(أ) كَ(أ)} + \cancel{ك(أ) قَ(أ)} = ٠$

$هـً = ق كً + كَ قَ + ك قً + قَ كَ$

$هـً(أ) = ق(أ) كً(أ) + \cancel{كَ(أ) قَ(أ)} + ك(أ) قً(أ) + \cancel{قَ(أ) كَ(أ)}$

$هـً(أ) = (+)(+) + (+)(+) = (+)$

بما أن $هـَ(أ) = ٠$ ، $هـً(أ) > ٠$ وباستخدام اختبار المشتقة الثانية

$\Leftarrow (أ ، هـ(أ))$ صغرى محلية #

أ.مي حوّاري

---

٦/ إذا كان $هـ(س) = س ق(س)$ وكان $ق(س)$ مقعر لأسفل على $\mathbb{R}$ وله نقطة حرجة عند $(١ ، ٠)$ أثبت أن للاقتران $هـ(س)$ قيمة عظمى محلية عند $س = ١$ ، $ق ، هـ$ قابلين للاشتقاق

الحل/

$ق(س)$ مقعر لأسفل على $\mathbb{R} \Leftarrow قً(س) < ٠$ على $\mathbb{R}$

له نقطة حرجة عند $(١ ، ٠) \Leftarrow قً(١) < ٠$ ، $قَ(١) = ٠$

$هـ(س) = س ق(س)$ متصل حاصل ضرب متصلين على $\mathbb{R}$

$هـَ(س) = س قَ(س) + ق(س)$

$هـَ(١) = قَ(١) + ق(١) = ٠ + ٠ = ٠ \Leftarrow$ عند $س = ١$ حرجة لـ $هـ(س)$

$هـً(س) = س قً + قَ + قَ$

$هـً(١) = قً(١) + ٢ قَ(١) = قً(١) < ٠ \Leftarrow$ حسب اختبار المشتقة الثانية

$هـ(١)$ عظمى محلية #

٧/ إذا كان ق(س) متزايد على [٢،٥] ، ق(٢) > ٠ ، هـ(س) × ق(س) = $\frac{1}{س}$ أثبت أن هـ(س) له عظمى مطلقة عند (س = ٢)

الحل/ ق(س) متزايد على [٢،٥]

ق(٢) صغرى مطلقة

و ق(٢) > ٠ ⇐ ق(٢) ≤ ق(س) ⇐ ق(س) موجب على [٢،٥]

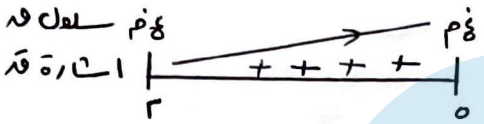
قَ(س) > ٠ على ]٢،٥[

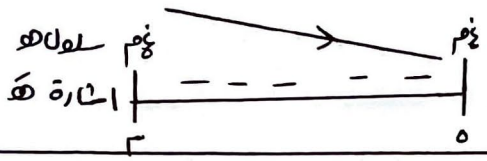
* هـ(س) = $\frac{1}{س ق(س)}$ متصل على [٢،٥] ، س ق(س) ≠ ٠

هـَ(س) = $\frac{-(س قَ + ق)}{(س ق(س))^2}$ = $\frac{-((موجب)(موجب) + موجب)}{موجب}$ = سالب

⇐ هـَ(س) < ٠ على ]٢،٥[

هـ(س) له قيمة عظمى مطلقة عند س = ٢ #




٨/ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة له (٣ أصفار) عند $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ بين أن نقطة الانعطاف تحدث عند الوسط الحسابي لهذه الأصفار

الحل/ نفرض ق(س) = (س − $س_1$)(س − $س_2$)(س − $س_3$) لـ ح متصل ومشتق على ح

قَ(س) = (س − $س_1$)(س − $س_2$) + (س − $س_1$)(س − $س_3$) + (س − $س_2$)(س − $س_3$)

قً(س) = (س − $س_1$) + (س − $س_2$) + (س − $س_1$) + (س − $س_3$) + (س − $س_2$) + (س − $س_3$)

قً(س) = ٦س − ٢$س_1$ − ٢$س_2$ − ٢$س_3$ = ٠

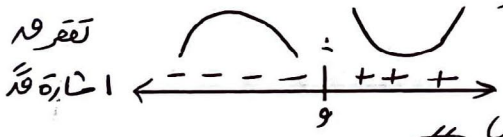
٦س = ٢($س_1$ + $س_2$ + $س_3$)

س = $\frac{س_1 + س_2 + س_3}{3}$ = و

عند س = و = $\frac{س_1 + س_2 + س_3}{3}$ نقطة انعطاف

ق متصل عندها ، وغير من تقعره حولها #

أ.مي حوّاري




١٩/ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة له قيمة حرجة واحدة فقط عند س = و أثبت أن له نقطة انعطاف عند س = و

الحل/ ق(س) = أ $س^3$ + ب $س^2$ + جـ س + د ، أ ≠ ٠ لـ ح متصل ومشتق على ح

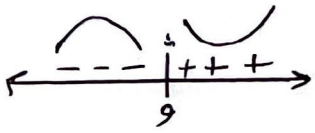
قَ(س) = ٣أ $س^2$ + ٢س + جـ

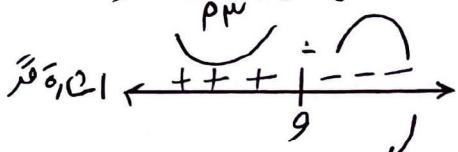
ق له نقطة حرجة فقط ⇐ قَ لها حل واحد فقط ⇐ المميز = ٠

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{المميز}}{٢أ}$ = $\frac{-٢}{٢ \times ٣أ}$ = $\frac{-1}{٣أ}$ = و

قً(س) = ٦أس + ٢ = ٠ ⇐ ٦أس = −٢ ⇐ س = $\frac{-1}{٣أ}$ = و

عندما أ > ٠ :




عندما أ < ٠

عند (س = و) نقطة انعطاف ، ق متصل عندها وغير من تقعره حولها. #

---

١٠/ اذا كان ق(س) = $\frac{1}{3}$ س$^3$ − ٢أ س$^2$ + ٣أ$^2$ س + ٢ ، أ > ٠ له قيمة عظمى محلية عند س = م ، وله قيمة صغرى محلية عند (س = ن) وكان ٣ق(م) − ق(ن) = ٣٦ ما قيمة الثابت أ

الحل/ ق(س) = $\frac{1}{3}$ س$^3$ − ٢أ س$^2$ + ٣أ$^2$ س + ٢ لـ ح متصل ومشتق على ح

قَ(س) = س$^2$ − ٤أ س + ٣أ$^2$ = ٠

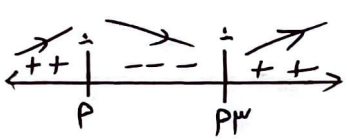
∴ = (س − أ)(س − ٣أ)

إما س − أ = ٠ ← س = أ أو س − ٣أ = ٠ ← س = ٣أ

من اشارة قَ:

سلوك ق

اشارة قَ




ق(أ) عظمى محلية ← أ = م

ق(٣أ) صغرى محلية ← ٣أ = ن

٣ق(م) − ق(ن) = ٣٦

٣ق(أ) − ق(٣أ) = ٣٦

⇐ ٣($\frac{1}{3}$أ$^3$ − ٢أ(أ)$^2$ + ٣أ$^2$(أ) + ٢) − ($\frac{1}{3}$(٣أ)$^3$ − ٢أ(٣أ)$^2$ + ٣أ$^2$(٣أ) + ٢) = ٣٦

⇐ ٣($\frac{1}{3}$أ$^3$ − ٢أ$^3$ + ٣أ$^3$ + ٢) − (أ$^3$ × $\frac{27}{3}$ − ٢أ × ٩أ$^2$ + ٩أ$^3$ + ٢) = ٣٦

٣($\frac{1}{3}$أ$^3$ + أ$^3$ + ٢) − (٩أ$^3$ − ١٨أ$^3$ + ٩أ$^3$ + ٢) = ٣٦

أ$^3$ + ٣أ$^3$ + ٦ − ٢ = ٣٦ ⇐ ٤أ$^3$ + ٤ = ٣٦ ⇐ ٤أ$^3$ = ٣٢

⇐ أ$^3$ = ٨ ⇐ أ = ٢

---

١١/ إذا كان ص = ٢س يمس منحنى الاقتران ق(س) = (س$^2$ − ٢س)(أس + ب) عند نقطة الأصل وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند (٢، ٠) ما قيمة أ، ب

الحل/ ق = (س$^2$ − ٢س)(أس + ب) لـ ح متصل ومشتق على ح

ق له قيمة صغرى عند (٢، ٠) ← ق(٢) = ٠

قَ(٢) = ٠

ص = ٢س ← صَ = ٢ = ميل المماس ← ٢ = قَ(٠)

قَ(س) = (س$^2$ − ٢س)(أ) + (أس + ب)(٢س − ٢)

قَ(٠) = ٠ × أ + (ب)(−٢) = ٢ ⇐ −٢ب = ٢ ← ب = −١

قَ(٢) = (٤ − ٤)(أ) + (٢أ + ب)(٤ − ٢)

٠ = (٢أ − ١) × ٢ ⇐ ٢أ − ١ = ٠ ← ٢أ = ١

← أ = $\frac{1}{2}$

أ.مي حوّاري

١٢/ إذا كان للاقتران ق(س) = $\frac{أ}{٣}$ س$^{٣}$ + ٣س$^{٢}$ + ب ، أ ≥ ٠ نقطة انعطاف عند (س = ١) وصغرى محلية قيمتها (٥) جد الثابتين أ ، ب

الحل/ ق(س) = $\frac{أ}{٣}$ س$^{٣}$ + ٣س$^{٢}$ + ب ، ل ح متصل ومشتق على ح

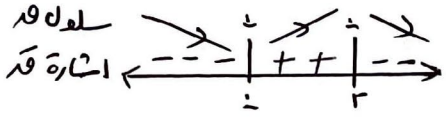
قَ(س) = أس$^{٢}$ + ٦س

قً(س) = ٢أس + ٦

قً(١) = ٠ ← ٢أ + ٦ = ٠ ← $\frac{٢أ}{٢}$ = $\frac{-٦}{٢}$ ← أ = -٣

أ.مي حوّاري

← قَ(س) = -٣س$^{٢}$ + ٦س = ٠



-٣س(س - ٢) = ٠

إما -٣س = ٠ ← س = ٠ أو س - ٢ = ٠ ← س = ٢

سلوك ق

اشارة قَ

ق(٠) صغرى محلية

← ق(٠) = ب = ٥

---

١٣/ إذا كان الاقتران ق(س) = س$^{٣}$ + أس جد الثابت أ في الحالات التالية:

١/ إذا كان ق(س) متزايداً على ح ٢/ ق(س) له نقطة حرجة واحدة.

الحل/ ق(س) = س$^{٣}$ + أس ل ح متصل ومشتق على ح

قَ(س) = ٣س$^{٢}$ + أ

١/ ق(س) متزايد على ح ← قَ(س) > ٠

قَ ليس له حلول ← المميز < ٠ ← (٠)$^{٢}$ - ٤(٣)(أ) < ٠

$\frac{-١٢أ}{-١٢}$ < $\frac{٠}{-١٢}$ ← أ > ٠

٢/ ق له نقطة حرجة واحدة ← قَ لها حل وحيد ← المميز = ٠

ب$^{٢}$ - ٤أجـ = ٠ ← -١٢أ = ٠ ← أ = ٠

---

١٤/ جد قاعدة ق(س) من الدرجة الثالثة الذي يمر منحناه بنقطة الأصل وله نقطة حرجة عند (س = ٤) وكانت معادلة المماس للمنحنى عند (١ ، ق(١)) الواقعة عليه ٩س - ص = -٧

الحل/ ق(س) = أس$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + جـ س + د ، أ ، ب ، جـ ، د ∈ ح ، أ ≠ ٠ ل ح متصل ومشتق على ح

ق(س) يمر بنقطة الأصل ← ق(٠) = ٠ ← ٠ = د

له عند (س = ٤) نقطة حرجة ← قَ(٤) = ٠

(١ ، ق(١)) ∈ للمماس ← ٩ - ق(١) = -٧ ← ٩ + ٧ = ق(١)

← ١٦ = ق(١)

٩س - ص = -٧ ← ٩ - صَ = ٠ ← صَ = ٩ = ميل المماس ← ٩ = قَ(١)

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{أ}\,\text{س}^{٢} + ٢\text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}'(١) = ٣\text{أ} + ٢\text{ب} + \text{جـ} \Leftarrow ٩ = ٣\text{أ} + ٢\text{ب} + \text{جـ} \quad -(١)$

$\text{ق}'(٤) = ٣\text{أ}(٤)^{٢} + ٢\text{ب}(٤) + \text{جـ} \Leftarrow ٠ = ٤٨\text{أ} + ٨\text{ب} + \text{جـ} \quad -(٢)$

$\text{ق}(١) = \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} \Leftarrow ١٦ = \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} \quad -(٣)$

$(١) - (٣) \Leftarrow (-٧ = ٢\text{أ} + \text{ب}) \times ٢ \Leftarrow -١٤ = ٤\text{أ} + ٢\text{ب} \quad -(٤)$

$(٢) - (١) \Leftarrow (-٩ = ٤٥\text{أ} + ٦\text{ب}) / ٣ \Leftarrow -٣ = ١٥\text{أ} + ٢\text{ب} \quad -(٥)$

$(٥) - (٤) \quad / \quad ١١ = ١١\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = ١$ نعوض في (٥)

$-٣ = ١٥ + ٢\text{ب} \Leftarrow -١٨ = ٢\text{ب} \Leftarrow -٩ = \text{ب}$

$\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} = ١٦ \Leftarrow ١ - ٩ + \text{جـ} = ١٦ \Leftarrow -٨ + \text{جـ} = ١٦ \Leftarrow \text{جـ} = ٢٤$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٩\text{س}^{٢} + ٢٤\text{س}$

---

١٥/ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} - \text{س}^{٢})$ جد مجالات التزايد والتناقص لـ $\text{ق}(\text{س})$

الحل/ أولاً: نحدد مجال $\text{ق}(\text{س})$

$\text{س} - \text{س}^{٢} = ٠ \Leftarrow \text{س}(١ - \text{س}) = ٠$

إما $\text{س} = ٠$ أو $١ - \text{س} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ١$

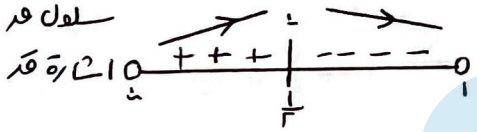


المجال ما داخل اللوغاريتم > ٠

$\text{س} \in ]٠ ، ١[$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} - \text{س}^{٢})$ متصل على $]٠ ، ١[$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{١ - ٢\text{س}}{\text{س} - \text{س}^{٢}} = ٠ \Leftarrow ١ - ٢\text{س} = ٠ \Leftarrow \dfrac{١}{٢} = \dfrac{٢\text{س}}{٢} \Leftarrow \text{س} = \dfrac{١}{٢} \in ]٠ ، ١[$




• $\text{ق}(\text{س})$ متزايد على $]٠ ، \frac{١}{٢}]$
ومتناقص على $[\frac{١}{٢} ، ١[$

---

١٦/ إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ كثير حدود ومتزايد على $[-٣ ، -١]$ ويقع في الربع الثاني وكان $\text{ق}(\text{س})\,\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}$
جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى $\text{هـ}(\text{س})$

الحل/ $\text{ق}(\text{س})$ كح متصل ومشتق على $]-٣ ، -١[$

$\text{ق}(\text{س})$ متزايد $\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) > ٠$ على $]-٣ ، -١[$

$\text{ق}(\text{س})$ يقع في الربع الثاني $\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) > ٠$ على $[-٣ ، -١]$

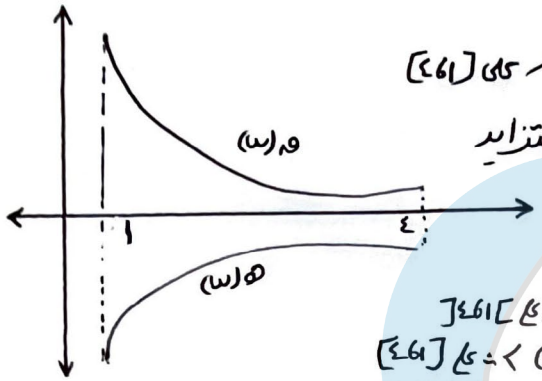
$\text{ق}(\text{س})\,\text{هـ}(\text{س}) = \text{س} \Leftarrow \text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{ق}(\text{س})}$ متصل على $[-٣ ، -١]$ ، نسبي و $\text{ق}(\text{س}) \neq ٠$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}^{٢}(\text{س})} = \dfrac{(+) - (-)(+)}{(+)} = (+) + (+) = (+)$

$\text{هـ}'(\text{س}) > ٠$ على $]-٣ ، -١[ \Leftarrow \text{هـ}(\text{س})$ متزايد على $[-٣ ، -١]$

أ.مي حوّاري

١٧/ إذا كان ق(س)، هـ(س) كثيرا حدود معرفين على ]٤، ١[
و مشابه كما في الشكل المجاور، ح حد فقران التزايد
والتناقص للاقتران ل(س) = ق(س) + $\frac{س^{ح}}{هـ(س)}$
على ]٤، ١[




الحل/ * ق كثير حدود متصل على ]٤، ١[ ومشتقه على ]٤، ١[
ق يقطع محور السينات ← ق(س) > ٠ على ]٤، ١[
ق متناقص على ]٤، ١[ ← ق'(س) < ٠ على ]٤، ١[

* هـ(س) كثير حدود متصل على ]٤، ١[ ومشتقه على ]٤، ١[
هـ(س) يقطع محور السينات ← هـ(س) = ٠ على ]٤، ١[
هـ(س) متزايد على ]٤، ١[ ← هـ'(س) > ٠ على ]٤، ١[

ل(س) = ق(س) + $\frac{س^{ح}}{هـ(س)}$ متصل على ]٤، ١[ حاصل جمع ثم قسمة متصلين (هـ(س) ≠ ٠)

ل'(س) = ق'(س) + $\frac{هـ(س)(ح س^{ح-١}) - س^{ح} هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

ل'(س) = (موجب)(سالب) + $\frac{(سالب)(موجب) - (موجب)(موجب)}{(موجب)}$

= (سالب) + $\frac{(سالب) + (سالب)}{موجب}$ = سالب + سالب = سالب

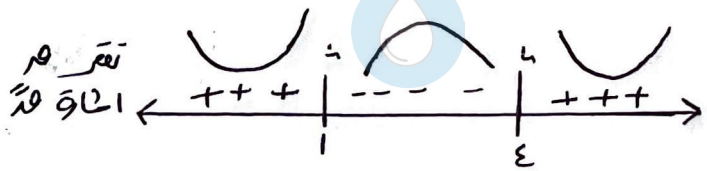
ل'(س) < ٠ على ]٤، ١[ ← ل(س) متناقص على ]٤، ١[

---

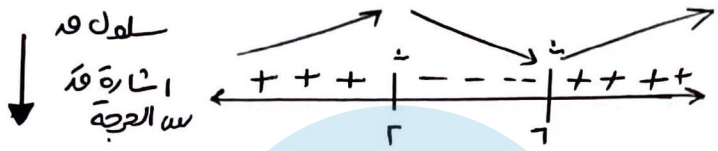
١٨/ إذا كان الاقتران ق(س) كثير حدود معرف على ح حيث ق(٢) = ق(٦) = ٠ وكان
ق'(س) متزايدا على ]-∞، ١٦٠[ و ]٣٤، ∞[ ومتناقصا على ]١٦٠، ٣٤[ جد:
١/ مجالات التزايد والتناقص لـ ق(س)
٢/ نقاط القيم العظمى والصغرى المحلية لـ ق(س) إن وجدت.

الحل/ ق(س) متزايد ← ق'(س) > ٠ على نفس الفترة ← ق مقعر لأعلى
ق(س) متناقص ← ق'(س) < ٠ على نفس الفترة ← ق مقعر لأسفل

أ.مي حوّاري




• س الحرجة = {٢، ٦} ← ق'(٢) < ٠ ← ق(٢) = ٩٦ عظمى محلية
ق'(٦) > ٠ ← ق(٦) = ٩٦ صغرى محلية




أ.مي حوّاري

قـ(س) متزايد على ]-∞، ٢] ∪ [٦، ∞[
قـ(س) متناقص على [٢، ٦]

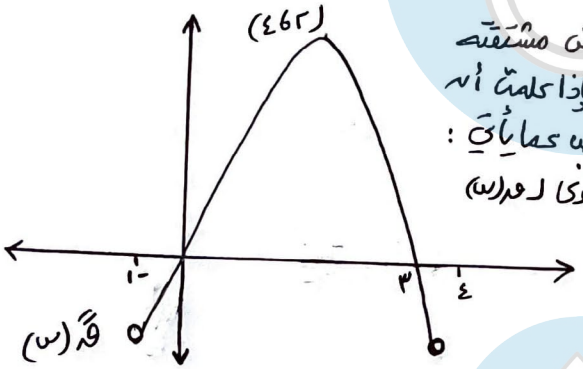
---

١٩/ الاقتران قـ(س) معرّف على [-٤، ٤] ومنحنى مشتقته الثاني قـ(س) يمثل الشكل المرسوم، فإذا علمت أن قـ(٢) = قـ(-١/٢) = ٠ اعتمد عليه، ثم أجب عما يأتي:

١/ مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى لـ قـ(س)

٢/ بين مجالات التقعر لـ قـ(س)

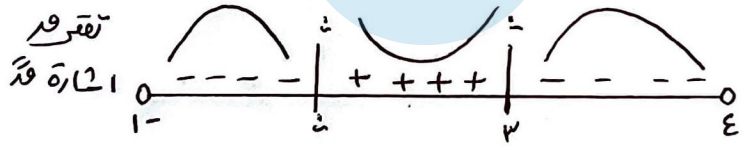
٣/ نقطة/ نقاط الانطباف




الحل

قـ(س) يقع فوق محور السينات عندما س ∈ ]-١، ٣[ ← قـ(س) > ٠ على ]-١، ٣[

قـ(س) يقع تحت محور السينات على ]-٤، -١[ ∪ ]٣، ٤[ ← قـ(س) < ٠ على نفس الفترة

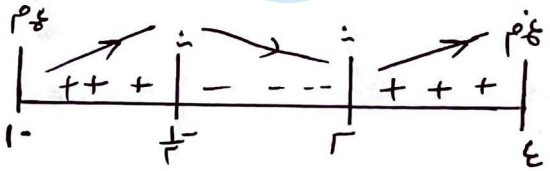



٣/ قـ(س) مقعر لأعلى على ]-١، ٣[ ولأسفل على ]-٤، -١[ ∪ ]٣، ٤[

٢/ (-١، قـ(-١)) ، (٣، قـ(٣)) نقاط انطباف، قـ متصل عندها وغيّر من تقعره حولها.

١/ قـ(٢) = ٠ ← قـ(٢) > ٠ ← (٢، قـ(٢)) صغرى محلية

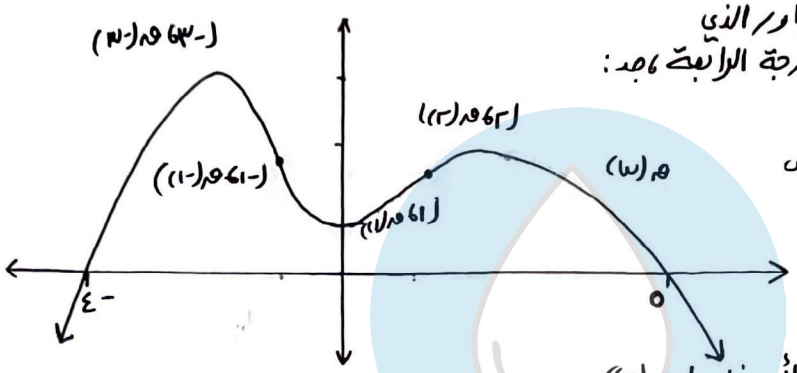
قـ(-١/٢) = ٠ ← قـ(-١/٢) < ٠ ← (-١/٢، قـ(-١/٢)) عظمى محلية.




(٤، قـ(٤)) عظمى محلية، (-١، قـ(-١)) صغرى محلية.

* قـ(س) متزايد على ]-١، -١/٢] ∪ [٢، ٤] ومتناقص على [-١/٢، ٢]

٢٠/ بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) من الدرجة الرابعة، جد:



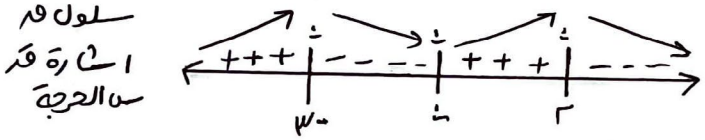

١/ مجالات التزايد والتناقص لـ ق(س)

٢/ القيم القصوى المحلية لـ ق(س)

٣/ مجالات التقعر لأعلى ولأسفل لـ ق(س)

٤/ نقطة / نقاط الانعطاف لـ ق(س)

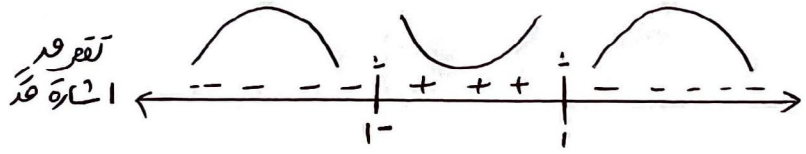
الحل/ ق(س) = ٠ عند س = {٠، ٢، -٣} يمكن رسم مماسات أفقية عندها




١/ ق(س) متزايد على ]-∞، -٣] ∪ [٠، ٢]
ومتناقص على [-٣، ٠] ∪ [٢، ∞[

٢/ (-٣، ق(-٣)) ، (٢، ق(٢)) عظمى محلية ، (٠، ق(٠)) صغرى محلية.

٣/



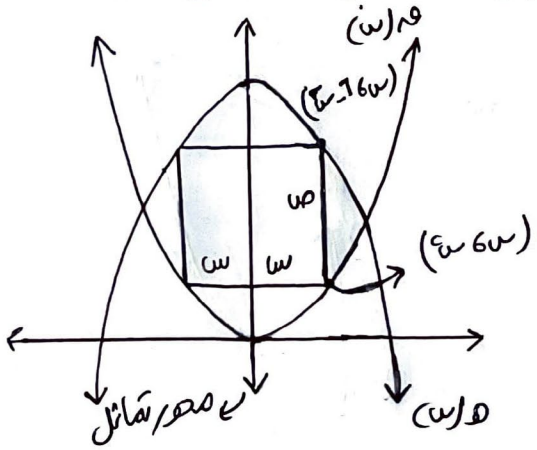

أ.مي حوّاري

ق(س) مقعر لأعلى على ]-١، ١[ ومقعر لأسفل على ]-∞، -١[ ∪ ]١، ∞[

٤/ (١، ق(١)) ، (-١، ق(-١)) نقطتا انعطاف ، ق متصل عندها وغير من تقعره حولها.

---

٢١/ ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث رؤوسه الأربع على منحنيات ق(س) = س²
هـ(س) = ٦ - س².




الحل/ هـ(س) = ٦ - س² انعكاس س²
في العينات ثم انسحاب ٦ وحدات لأعلى
نفرض أبعاد المستطيل (٢س، ص)

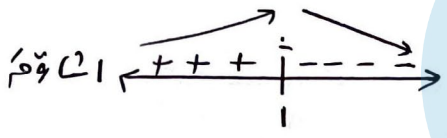
مساحة المستطيل = الطول × العرض
م = ٢س ص ← علاقة رئيسية.

من الرسمة / ص = ٦ - س٢ - س٢ ← ص = ٦ - ٢س٢ علاقة مساعدة

م = ٢س (٦ - ٢س٢)

م = ١٢س - ٤س٣

م' = ١٢ - ١٢س٢ = ٠ ← ١٢س٢ = ١٢ ← س٢ = ١ ← س = ١




عندما (س = ١) تظهر محلية وهي مطلقة عندما أكبر مساحة ممكنة

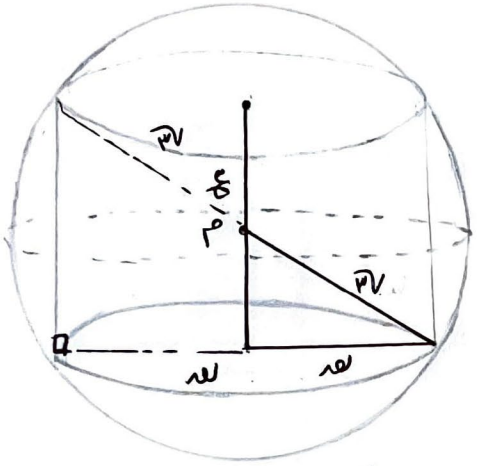
م = ١٢ - ٤ = ٨ وحدة مربعة.

---

٢٢/ أوجد حجم أكبر أسطوانة دائرية يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها ٣√٢ سم.

الحل/ نفرض نصف الأسطوانة = نق، ارتفاعها ع

حجم الأسطوانة = نق٢ ع π




ح = π نق٢ ع ← علاقة رئيسية.

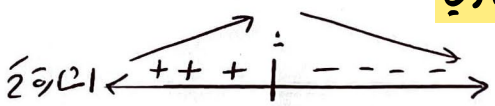
ح = π (٣ - ¼ ع٢) ع

ح = π (٣ع - ¼ ع٣)

ح = π (٣ - ¾ ع٢) = ٠

ع٢ = ٣ ÷ ¾ = ٤

ع = ٢




عندما (ع = ٢) تظهر مطلقة "وحيدة" عندها أكبر حجم ممكن.

ح = π × ٢ × (٣ - ¼ × ٤)

ح = π × ٢ × ٢ = ٤π م٣

باستخدام فيثاغورس:

(نق + نق)٢ + ع٢ = (٣√٢ + ٣√٢)٢

(٢نق)٢ + ع٢ = (٣√٢)٢

٤نق٢ + ع٢ = ١٢

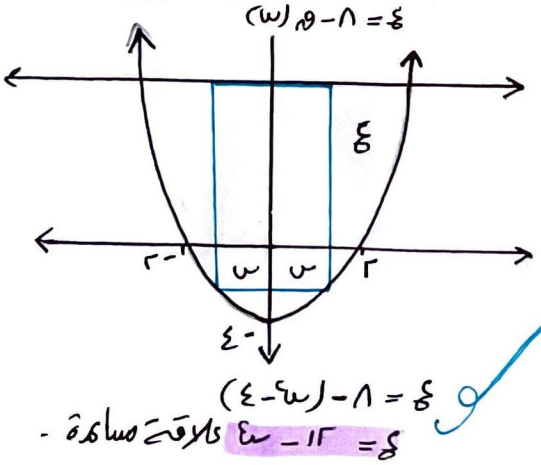
٤نق٢ = ١٢ - ع٢ / ٤

نق٢ = ٣ - ¼ ع٢ علاقة مساعدة.

أ.مي حوّاري

---

٢٣/ جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل في الشكل التالي




كلما تأبد ق(س) = س٢ - ٤

الحل/ مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = ٢س ع ← علاقة رئيسية

م = ٢س (١٢ - س٢)

م = ٢٤س - ٢س٣

م' = ٢ (١٢ - ٣س٢) = ٠

١٢ = ٣س٢

ع = ١٢ - س٢ علاقة مساعدة.

اشارة م′ : + + + | − − − ، ٢

س² = ٤ ⇐ س = ٢

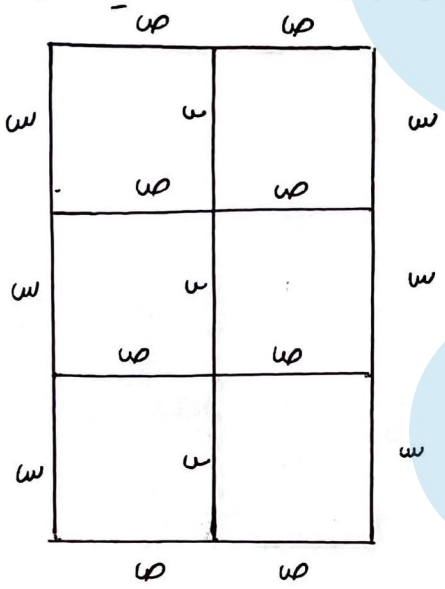
عند (س = ٢) نعظم مطلقة "وحيدة"
عندها أكبر مساحة ممكنة .

م = ٢×٢(١٢−٤) = ٤×٨ = ٣٢ وحدة مربعة .

أ.مي حوّاري

---

٢٤/ صاحب مزرعة أغنام لديه ٣٦٠ متر من السلك المشبك ، يريد عمل ٦ حظائر مستطيلة الشكل ومتساوية في المساحة ومتلاصقة أوجد أكبر مساحة للحظائر يمكن عملها




المساحة = ٦ × مساحة مستطيل

م = ٦ س ص علاقة رئيسية .

م = ٦س(٤٥ − ٩/٨ س)

م = ٦(٤٥س − ٩/٨ س²)

م′ = ٦(٤٥ − ٩/٨ × ٢س) = ٠

٤٥ − ٩/٤ س = ٠ ⇐ ٤٥ = ٩/٤ س

س = ٢٠ متر .

اشارة م′ : + + + | − − − ، ٢٠

عند (س = ٢٠) نعظم مطلقة
عندها أكبر مساحة ممكنة .

م = ٦ × ٢٠(٤٥ − ٩/٨ × ٢٠)

م = ١٢٠(٤٥ − ٢٢,٥)

م = ٢٧٠٠ م²

طول السلك = ٩س + ٨ص

٣٦٠ = ٩س + ٨ص

(٣٦٠ − ٩س = ٨ص)/٨

ص = ٣٦٠/٨ − ٩س/٨

٤٥ − ٩/٨ س = ص علاقة مساعدة .

---

٢٥/ جسم يسير في خط مستقيم وفقاً للعلاقة ف = ن⁴ − ١٢ن³ + ٨ن² − ٦ن + ٥ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، أوجد أقل تسارع ممكن لهذا الجسم

الحل/ ف = ن⁴ − ١٢ن³ + ٨ن² − ٦ن + ٥

ع = ف′ = ٤ن³ − ٣٦ن² + ١٦ن − ٦

ت = ١٢ن² − ٧٢ن + ١٦

ت′ = ٢٤ن − ٧٢ = ٠ ⇐ ٢٤ن = ٧٢ ⇐ ن = ٣ ث .

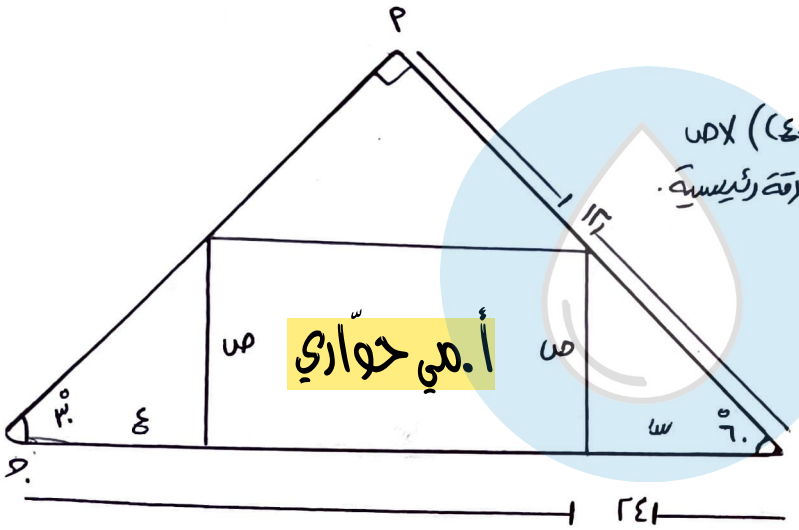
ت″ = ٢٤ > ٠ عند (ن = ٣) صغرى مطلقة عندها أقل تسارع ممكن

ت(٣) = ١٢(٩) − ٧٢(٣) + ١٦

= −٩٢ م/ث²

٢٦/ جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث قائم وتره ٢٤ وإحدى زواياه ٣٠ درجة.

الحل/




مساحة المستطيل = (٢٤ − (س + ع)) × ص

م = (٢٤ − (س + ع)) ص ← علاقة رئيسية.

م = (٢٤ − ٤/√٣ ص) ص

م = ٢٤ص − ٤/√٣ ص²

م' = ٢٤ − ٨/√٣ ص = ٠

٢٤ = ٨/√٣ ص

← ٣√٣ = ص

اشارة م': + + + | − − −

٣√٣

عند ص = ٣√٣ نحصل مطلقة عندها أكبر مساحة ممكنة

م = (٢٤ − ٤/√٣ × ٣√٣) × ٣√٣

م = (٢٤ − ١٢) × ٣√٣ = ٣٦√٣ وحدة مربعة

جا(٣٠) = أب/٢٤ = ١/٢ ← أب = ١٢

ظا٦٠ = ص/س = √٣ ← ص = √٣ س ← ١/√٣ ص = س

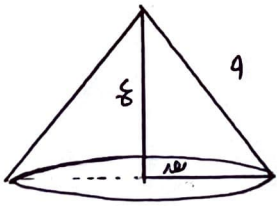
ظا٣٠ = ص/ع ← ١/√٣ = ص/ع ← ع = √٣ ص

← س + ع = (١/√٣ + √٣) ص = (١ + ٣)/√٣ ص

← س + ع = ٤/√٣ ص

٢٧/ مثلث قائم الزاوية طول وتره ثابت ٩ سم دار حول أحد ضلعي القائمة دورة كاملة ما حجم أكبر مخروط ناتج عن الدوران.

الحل/




عند دوران مثلث قائم حول ضلع القائمة ينتج مخروط قائم.

حجم المخروط = ١/٣ نق² π ع

ح = π/٣ نق² ع ← علاقة رئيسية.

ح = π/٣ (٨١ − ع²) ع

ح = π/٣ (٨١ع − ع³)

ح' = π/٣ (٨١ − ٣ع²) = ٠

٨١ = ٣ع² ← ٢٧ = ع² ← ع = √٢٧ = √٩ × √٣

← ع = ٣√٣

فيثاغورس:

نق² + ع² = ٩²

نق² = ٨١ − ع² علاقة مساعدة.

• عند ع = ٣√٣ عظمى مطلقة عندها أكبر حجم ممكن

اشارة ح: + + + | − − −
٣√٣

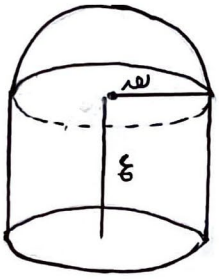
ح = π/٣ (٨١ − ٢٧) × ٣√٣

ح = π × ٥٤√٣ ← ح = ٥٤√٣ π حم³

---

٢٨/ يراد عمل خزان للغازات السائلة على شكل أسطوانة لها غطاء علوي على شكل نصف كرة أوجد أبعاد الخزان لكي يكون الجزء الأسطواني منه أكبر ما يمكن إذا علم أن مساحة سطح الصاج المستخدم في صناعة الخزان ٣٦π م².

الحل/ مساحة القاعدة + مساحة نصف كرة + مساحة جانبية.




نفرض نصف قطر القاعدة نق ، ع = الارتفاع

حجم الأسطوانة = نق² π ع

ح = π نق² ع ← علاقة رئيسية.

ح = π نق² (١٨/نق − ٣/٢ نق)

ح = π (١٨ نق − ٣/٢ نق³)

ح' = π (١٨ − ٩/٢ نق²) = ٠

١٨ = ٩/٢ نق² ← نق² = ٤

نق = ٢

اشارة ح': + + | − − −
٢

عندما نق = ٢ عظمى مطلقة عندها أكبر حجم ممكن.

ع = ١٨/٢ − ٣/٢ × ٢ = ٩ − ٣ = ٦

أبعاد الأسطوانة (نق = ٢م ، ع = ٦م)

مساحة السياج الكلية = ٣٦π

٣٦π = ٢ نق π ع + نق² π + ١/٢ × ٤ نق² π

٣٦π = π (٢ نق ع + نق² + ٢ نق²)

٣٦ = ٢ نق ع + ٣ نق²

٣٦ − ٣ نق² = ٢ نق ع

(٣٦ − ٣ نق²)/٢ نق = ع

(١٨/نق − ٣/٢ نق) = ع علاقة مساعدة.

---

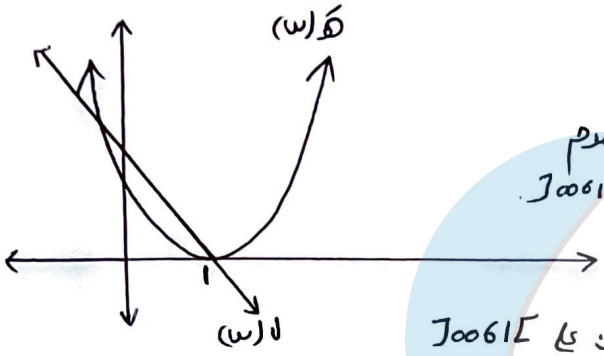
٢٩/ ق(س) من الدرجة الثالثة الذي يمر منحناه بنقطة الأصل وله نقطة حرجة عند (س = ٤) وكانت معادلة المماس للمنحنى عند (١، ق(١)) الواقعة عليه ٩س − ص + ٧ = ٠

جد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل/ ق(س) = س³ − ٩س² + ٢٤س

مكرر (سؤال (١٩))

أ.مي حواري




٣/ إذا كان ق(س) اقتران متصل على ح حيث
قَ(س) = هَ(س) ل(س) معتمدًا على الشكل المرسوم
جانبًا أثبت أن ق(س) مقعر لأسفل في ]∞،1[.

الحل/

* ل(س) في ]∞،1[ :
ل(س) يقع تحت محور السينات ← ل(س) < ٠ على ]∞،1[
ل(س) متناقص ← لَ(س) < ٠ على ]∞،1[ .

* هَ(س) على ]∞،1[ :
هَ(س) يقع فوق محور السينات ← هَ(س) > ٠ على ]∞،1[
هَ(س) متزايد ← هً(س) > ٠ على ]∞،1[ .

* قَ = هَ ل متصل على ]∞،1[ حاصل ضرب متصلين
قً = هَ لَ + ل هً
قً(س) = (موجب)(سالب) + (سالب)(موجب) = (سالب) + (سالب) = سالب
قً < ٠ على ]∞،1[ ← ق مقعر لأسفل على ]∞،1[ #

أ.مي حوّاري

ستُقابلك ظروف، تمنع عنك، تأخذ منك، تُبعدك أحيانًا،
تجعلك فَردًا وسط جموع، تَسلب شيئًا من هدوء دواخلك،
لكن لا بأس، أكمل سَيرًا، عَمِّقَ سِرًّا، وأتمِم ما عليك وإن
طال.

# روابط مهمة

## رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/kamel2

## لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath