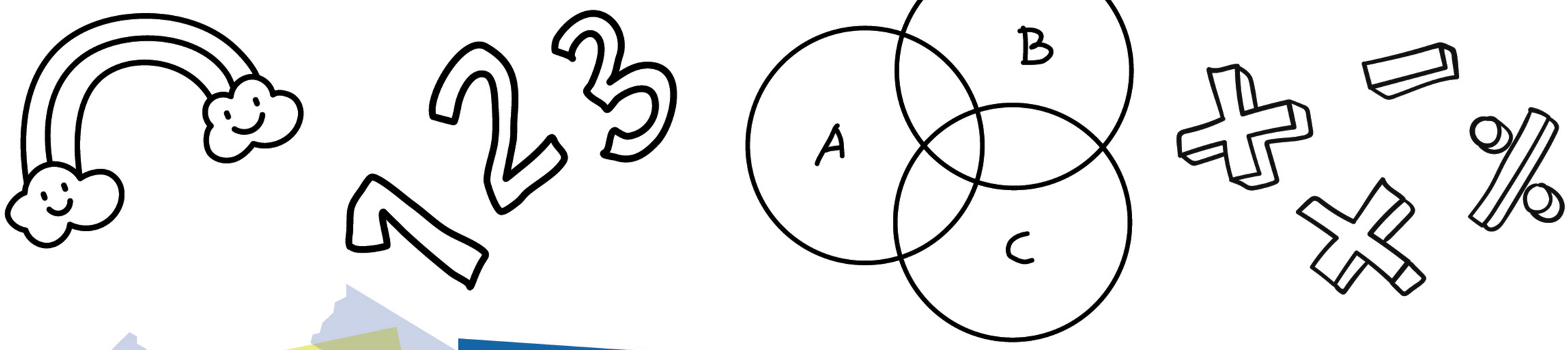



# حلـــــول الكـــامـــل

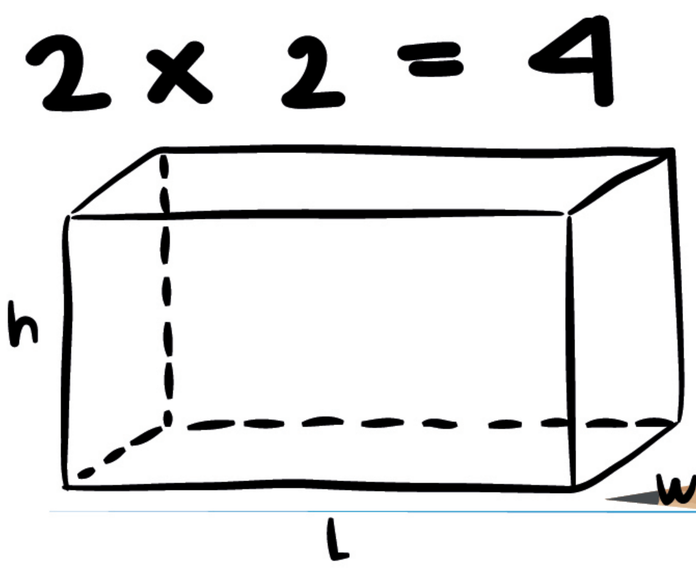
2025
2026
الفصل الأول

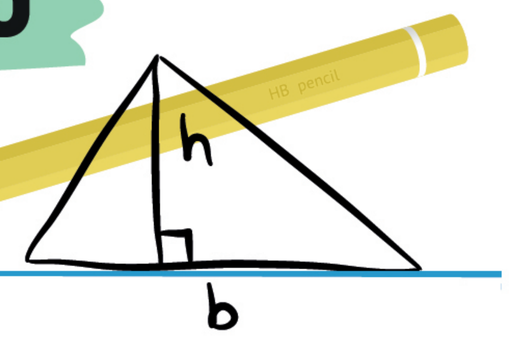
الوحدة
الأولى والثانية

# توجـــيهي
# صنـــاعي

إعداد: ميّ عمار حوّاري

موقع قطرة التعليمي
Qatraedu.com
+972 59-276-7085



# مـقــدمـــــــة

إيماناً منا بضــرورة توفير أفضــل المصــادر التعليمية لطلبتنا في مرحلة الثانوية العامة، يسّــر فريق موقع قطرة التعليمي تقديم الإجابات النموذجية لـ "كراسة الكامل" (تصنيف أسئلة السنوات السابقة).

تأتي هذه الحلول ضمن إطار جهودنا المستمرة في موقع قطرة التعليمي، الذي تأسس برؤية طموحة تهدف إلى تزويد طلاب التوجيهي بتعليم عالي الجودة، لا سيما في مادة الرياضيات، مستخدمين أحدث الأساليب والوسائل التعليمية العالمية.

وقد تم إعداد هذه الكراسة خصيصاً لطلاب الفرع **الصنـــــــاعي**، لتتضمن حلولاً مفصلة وشرحاً وافياً لكل الأسـئلة، انطلاقاً من إيماننا بأن التعلم الرقمي يمنح الطالب مرونة الوصـول إلى المعرفة في أي وقت ومن أي مكان.

وإننـا في موقع قطرة التعليمي، نؤمن بأن وراء كل إنجاز عظيم جنوداً مجهولين؛ لذا نتقدم بأســمى آيات الشــكر والتقدير للمعلّمة الفاضــلة **ميّ عمار حوّاري**، عضــو فريقنا المتميز، التي ســخرت وقتها وجهدها وخبرتها العميقة في إعداد هذه الحلول بدقة وإتقان. إن خبرتها الواســعة تجلت في أســلوب الشــرح المبســط والواضــح الذي يضــع مصــلحة الطالب وتفوقه الأكاديمي في المقام الأول؛ فجزيل الشــكر لها، ونســأل الله أن يجعل هذا العمل في ميزان حسناتها.

أتمنى أن تكون هذه الكراســة عونًا لكم في رحلتكم نحو النجاح، وأن تســاهم في تحقيق التفوق والتميز الذي تسعون إليه.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح الدائم.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

# إهـــــداء

إلى صاحبةُ القلبِ الأحنّ،

والأثر الأعمق،

إلى من كان حضورها فرقًا،

وكلماتها أثرًا لا يزول،

من غرست بداخلي حلمًا لا يزال يكبر،

ملهمتي وقدوتي... نجمتي اللامعة،

معلمتي الغالية **رولا بطة**، حفظكِ الله ورعاكِ دائمًا

أ. ميّ عمار حوّاري

## روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/sinaae-kamel1

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath

# نصائح مهمة لكيفية دراسة الرياضيات؟

عزيزي الطالب/ عزيزتي الطالبة، إليك بعض النصائح التي ستساعدك على التفوق في دراستك لهذه المادة وتحقيق أفضل النتائج:

1. **إخلاص النية لله.**
2. **التوكل على الله** بالأخذ بجميع أسباب التفوق، والدعاء والالحاح فيه فهو من أعظم أسلحة المسلم.
3. **فهم الأساسيات أولًا:** تأكد من أنك تفهم الأساسيات بشكل جيد. ولضمان التمكن من الأساسيات فقد وفرنا دورة مجانية عبر موقع قطرة التعليمي.
4. **التدريب المستمر باستخدام الورقة والقلم:** الحل المتكرر هو الطريق إلى الإتقان، حل المسائل بانتظام وبشكل يومي سيعزز من فهمك ويساعدك على استيعاب المفاهيم بشكل أعمق.
5. **افهم المسألة قبل الحل:** لا تتسرع في حل المسألة دون فهم كامل لمتطلباتها، خذ وقتك في قراءة السؤال جيدًا، وفهم المطلوب قبل الشروع في الحل، التسرع قد يؤدي إلى أخطاء غير ضرورية.
6. **حل المسائل بطريقة منظمة:** نظم خطوات الحل بطريقة واضحة ومنهجية، تدوين الخطوات بتسلسل منطقي يساعدك على متابعة الحل والتعرف على أي خطأ قد يحدث بسهولة، هذا الأسلوب يعزز أيضًا من فرصك في الحصول على درجات كاملة.
7. **راجع بانتظام:** خصص وقتًا لمراجعة ما تعلمته بانتظام، ولا تترك الأمور تتراكم حتى اقتراب موعد الامتحانات، المراجعة المستمرة تسهل تذكر المعلومات وتجعلك أكثر استعدادًا للامتحان.
8. **لا تخجل من طلب المساعدة:** إذا واجهت صعوبة في فهم مفهوم معين أو في حل مسألة ما، لا تتردد في طلب المساعدة من معلمك أو زملائك، الحوار والتفاعل مع الآخرين قد يفتح لك آفاقًا جديدة لفهم المادة.
9. **حافظ على هدوئك وثقتك بنفسك:** التوتر قد يؤثر سلبًا على أدائك، حافظ على هدوءك وثقتك بنفسك أثناء الدراسة وفي الامتحانات، تذكر أن النجاح في الرياضيات يعتمد على الاستمرارية والعمل الجاد، وليس على الحفظ فقط.

10. **استعد للامتحانات بالتحضير المبكر:** لا تنتظر حتى اللحظة الأخيرة، ابدأ في التحضير للامتحانات قبل وقت كافٍ، وضع خطة دراسية تغطي جميع الوحدات بشكل متوازن، قم بحل أسئلة الامتحانات السابقة المرفقة في هذه الكراسة، وتأكد من مراجعة الحلول بعد الانتهاء.

11. **قم بتحليل الأخطاء:** عند ارتكاب خطأ في حل مسألة، لا تتجاهله. بدلاً من ذلك، عد إليه وحاول فهم سبب الخطأ وكيف يمكنك تجنبه في المستقبل، التعلم من الأخطاء يُعد أحد أفضل الطرق لتطوير مهاراتك الرياضية.

12. **اجعل لك دفتراً خاصاً لتدوين كل ما يتم دراسته واحرص على تدوين الملاحظات المهمة:** أثناء حل المسائل أو مشاهدة الفيديوهات، احرص على تدوين كل شيء لأنه سيكون من الصعب مشاهدة الفيديوهات في يوم واحد مثل يوم الامتحان، وكتابة الملاحظات المهمة تساعدك على تنظيم أفكارك وتذكر النقاط المهمة عند المراجعة لاحقًا.

نتمنى لك التوفيق والنجاح في رحلتك الدراسية، ونتطلع لأن تكون هذه الكراسة عونًا لك في تحقيق أهدافك في مادة الرياضيات. تذكر أن كل مجهود تبذله اليوم سيثمر في المستقبل.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

# الدرس الأول | متوسط التغير

## • القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2019 دور أول / إذا كان متوسط تغير $f(x)$ في $[-2,1]$ يساوي $(-5)$ وكان $f(2)-3=$ ما قيمة $f(-1)$

د/ -12 ج/ -3 ب/ 8 أ/ 18

الحل / $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = -5 \Leftarrow f(2)-3 = -15$

$f(-1) = 15+3 \Leftarrow f(-1) = 18$

أ.مي حوّاري

---

• 2019 دور ثاني / اذا كان $f(x) = \sqrt{4x+1}$ ، ما متوسط تغير $f(x)$ في $[0,2]$

د/ 2 ج/ 1 ب/ -1 أ/ -2

الحل / $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{\sqrt{4\times2+1}-\sqrt{4\times0+1}}{2} = \frac{3-1}{2} - \frac{\sqrt{9}-\sqrt{1}}{2} = 1$

---

• 2019 دور ثالث / إذا كان $f(x) = \frac{3}{x} + x^2$ ، ما مقدار التغير في $f(x)$ في $[1,3]$

د/ 10 ج/ 6 ب/ 3 أ/ 2

الحل / $\Delta f(x)$ في $[1,3] = f(3)-f(1) = (\frac{3}{3}+3^2)-(\frac{3}{1}+1^2)$

$\Leftarrow \Delta f(x) = 1+9-4 = 10-4 = 6$

---

• 2020 دور أول / اذا كان $f(x) = x^4+3x$ ، ما متوسط تغير $f(x)$ في $[0,1]$

د/ 9 ج/ 10 ب/ 11 أ/ 36

الحل / $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{(1^4+3\times1)-(0^4+3\times0)}{4} = \frac{(1+3)-(0+0)}{4}$

$= \frac{4-0}{4} = \frac{36}{4} = 9$

---

• 2020 دور ثاني / اذا كان $f(x) = x^4+2x-1$ وتغيرت $x$ من $-1$ إلى $b$ وكان متوسط تغير $f(x)$ يساوي 6 ، ما قيمة / قيم الثابت $b$ .

د/ 7 ج/ -160 ب/ 160-1 أ/ 5

الحل / طريقة (1) :

$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(-1)}{b-(-1)} = 6$

$\Leftarrow \frac{(b^4+2b-1)-(1-2-1)}{(b+1)} = 6$

$\Leftarrow \frac{b^4+2b-1+4}{b+1} = 6 \Leftarrow b^4+2b+1 = 6b+6$

$\Leftarrow \frac{(b+1)(b^3-b^2+b-1)}{(b+1)} = 6 \quad b \neq -1$

$\Leftarrow b^3-b^2+b-1 = 6 \Leftarrow b^3-b^2+b-7 = 0$

$b=2$ نعوض

$8-4+2-7 = 0$ ✓

طريقة (2) :

" تستخدم في ضوء دائرة فقط "

إذا كان $f(x) = ax^3+bx+c$ حيث $a \neq 0$

فإن $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ في $[-b,b] = a(x_1^2+x_2^2)+b$

$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = a(x_1^2+x_2^2)+b \Leftarrow 6 = a(-1+b)^2+2$

$\Leftarrow 4 = a(-1+b)^2 \Leftarrow 0 = b$

$a=1$ ، $b=2$ ، $x_1=-1$ ، $x_2=b$

• 2021 دور أول / ما متوسط تغير $ق(س) = هـ^{س-1}$ في $[0,1]$

أ/ 1 ب/ صفر ج/ $1 - \frac{1}{هـ}$ د/ $\frac{1}{هـ}$

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(1) - ق(0)}{1 - 0} = \frac{هـ^{1-1} - هـ^{0-1}}{1} = هـ^{0} - هـ^{-1} = 1 - \frac{1}{هـ}$

• تذكر: $أ^{-ن} = \frac{1}{أ^{ن}}$ ، $أ^{0} = 1$

---

• 2021 دور ثاني / ما متوسط تغير $ق(س) = \sqrt{س - 1}$ في $[5,10]$

أ/ $\frac{5}{2}$ ب/ $\frac{2}{5}$ ج/ $\frac{1}{5}$ د/ $\frac{1}{10}$

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(10) - ق(5)}{10 - 5} = \frac{\sqrt{10-1} - \sqrt{5-1}}{5} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}$

---

• 2022 دور أول / يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^2 - 8ن + 18$ ، ما السرعة المتوسطة للجسم في $[4,5]$

أ/ 2م/ث ب/ 1م/ث ج/ -1م/ث د/ -2م/ث

الحل/ السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1} = \frac{ف(5) - ف(4)}{5 - 4}$

$= \frac{(5^2 - 8\times5 + 18) - (4^2 - 8\times4 + 18)}{1} = (25 - 40 + 18) - (16 - 32 + 18)$

$= (-15 + 18) - (-16 + 18) = 3 - 2 = 1$ م/ث

أ.ميّ حوّاري

---

• 2022 دور ثالث / اذا كان $ق(س) = س^2 + |س - 5|$ ما متوسط تغير $ق(س)$ في $[0,4]$

أ/ -2 ب/ -1 ج/ 1 د/ 3

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(4) - ق(0)}{4 - 0} = \frac{(4^2 + |4 - 5|) - (0^2 + |0 - 5|)}{4} = \frac{(16 + 1) - (5)}{4}$

$= \frac{17 - 5}{4} = \frac{12}{4} = 3$

---

• 2023 دور ثالث / اذا كان $ق(س) = \frac{3}{س} + س^2$ ، $س \neq 0$ ما مقدار تغير $ق(س)$ في $[1,3]$

أ/ 2 ب/ 3 ج/ 6 د/ -10

• مكرر (2019 دور ثالث).

---

• 2025 دور أول / إذا كان متوسط تغير $ق(س)$ في $[-1,2]$ يساوي (0) وكان متوسط تغير نفس الاقتران في $[2,4]$ يساوي (-3) ، ما قيمة التغير في $ق(س)$ في $[-1,4]$

أ/ $\frac{9}{5}$ ب/ $-\frac{9}{5}$ ج/ -9 د/ 9

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في $[-1,2] = 0 \Leftarrow \frac{ق(2) - ق(-1)}{2 - -1} = 0 \Leftarrow ق(2) - ق(-1) = 15$ — ①

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في $[2,4] = -3 \Leftarrow \frac{ق(4) - ق(2)}{4 - 2} = -3 \Leftarrow ق(4) - ق(2) = -6$ — ②

① + ② / ق(٤) − ق(−١) = ٩ ⇐ Δق(س) في [−١، ٤] = ٩

• 2024 نابلس/ إذا كان ل(س) = س ق(س) وكان متوسط تغير ل(س) في [−٢، ٤] يساوي (١٢)
ل(٤) = ٦ فإن ق(−٢) يساوي :

أ/ ٩ ب/ −٦٦ ج/ ٣٩ د/ ٣٣

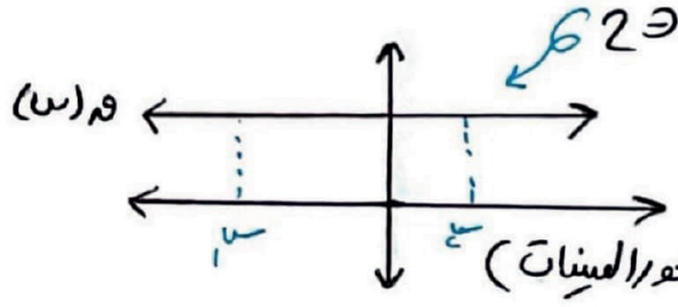
الحل/ $\frac{\Delta ل(س)}{\Delta س}$ في [−٢، ٤] = $\frac{ل(٤) - ل(−٢)}{٤ - −٢}$ = ١٢ ⇐ ٦ − ل(−٢) = ٧٢ ⇐ −ل(−٢) = ٦٦

−(−٢ق(−٢)) = ٦٦ ⇐ ٢ق(−٢) = ٦٦ ⇐ ق(−٢) = $\frac{٦٦}{٢}$ = ٣٣

• خارجي/ اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة ن وكان متوسط تغيره عند أي فترة دائماً يساوي $\sqrt{٣}$ فإن ن تساوي :

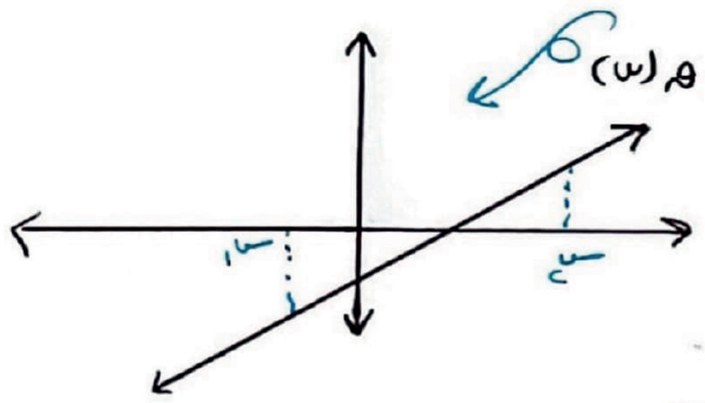
أ/ ١ ب/ ٢ ج/ ٣ د/ ٤

الحل/ • لو فرضنا ق(س) من الدرجة (صفر) ⇐ ق(س) = جـ ، جـ ∈ ح



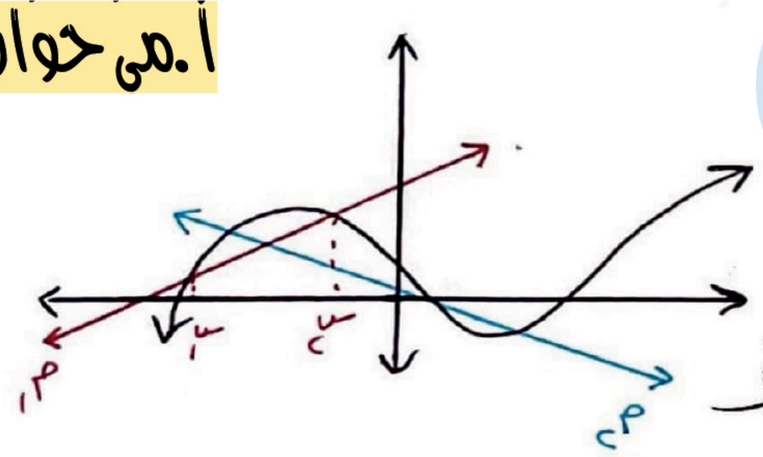

✗ نعلم أن $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [س١، س٢] = ميل القاطع في [س١، س٢]
لو رسمنا قاطع لـ ق(س) في أي فترة ⇐ سيكون القاطع
هو نفسه ق(س) ⇐ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ = ميل القاطع = ٠ ،، لأنه يوازي محور السينات)

✓ • لو فرضنا ق(س) = أس + ب ، أ ≠ ٠ : ،، من الدرجة ١،،
القاطع في أي فترة هو نفسه ق(س)
$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ = ميل القاطع = معامل س = أ ،، لأنه خطي ،،
اذن متوسط التغير في [س١، س٢] = أ ، أ ≠ ٠ :
ق(س) = $\sqrt{٣}$ س + ب
،، متوسط تغير الاقتران (أس + ب) دائماً أ في [س١، س٢]




أ.مي حواري

✗ • لو فرضنا ق(س) درجته ≥ ١
يكون شكل الاقتران منحنٍ وفي كل فترة
[س١، س٢] يمكن رسم قاطع مختلف عن الآخر
$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [س١، س٢] = ميل القاطع = متغير حسب الفترة




• خارجي/ إذا كان ص = هـ^(ن س) + ٤ وكان $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{هـ^{٨} - ١}{٤}$ ، س ∈ [٠، ٤] ، ما قيمة ن

أ/ ٢ ب/ ٤ ج/ −٢ د/ ٨

الحل/ $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ص|_{س=٤} - ص|_{س=٠}}{٤ - ٠}$ = $\frac{(هـ^{٤ن} + ٤) - (هـ^{٠} + ٤)}{٤}$ = $\frac{هـ^{٨} - ١}{٤}$

⇐ هـ^(٤ن) + ~~٤~~ − هـ^٠ − ~~٤~~ = هـ^٨ − ١ ⇐ هـ^(٤ن) − ١ = هـ^٨ − ١ ⇐ هـ^(٤ن) = هـ^٨

اذا تساوت الأساسات فإن الأسس متساوية ⇐ ٤ن = ٨ ⇐ ن = ٢

• خارجي / إذا كان متوسط تغير ق(س) = ٢س² + ٥س − ٣أ في [٣أ ، أ] يساوي (−٣) ما قيمة الثابت أ

أ/ −٢ ب/ ١ ج/ −١ د/ −٣

طريقة (١) :

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(أ) - ق(٣أ)}{أ - ٣أ} = -٣ \Leftarrow \frac{(٢أ^٢ + ٥أ - ٣أ) - (٢(٣أ)^٢ + ٥(٣أ) - ٣أ)}{-٢أ} = -٣$

$\Leftarrow \frac{(٢أ^٢ + ٢أ) - (٢\times٩أ^٢ + ١٥أ - ٣أ)}{-٢أ} = -٣ \Leftarrow \frac{٢أ^٢ + ٢أ - ١٨أ^٢ - ١٢أ}{-٢أ} = -٣$

$\Leftarrow \frac{-١٦أ^٢ - ١٠أ}{-٢أ} = -٣$ بإخراج (−٢أ عامل مشترك) من البسط

$\Leftarrow \frac{-٢أ(٨أ + ٥)}{-٢أ} = -٣$ ، أ ≠ ٠ ⇐ ٨أ + ٥ = −٣ ⇐ ٨أ = −٨ ⇐ أ = −١

طريقة (٢) : تذكر $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ لـ (ق(س) = أس² + ب س + ج ، أ ≠ ٠) = أ(س١ + س٢) + ب

أ = ٢ ، ب = ٥ ، س١ = ٣أ ، س٢ = أ

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = أ(س_١ + س_٢) + ب \Leftarrow -٣ = ٢(٣أ + أ) + ٥ \Leftarrow -٨ = ٢\times٤أ \Leftarrow -١ = أ$

• خارجي تفوق / إذا كان مقدار تغير هـ(س) = لو_هـ(س² − ١) − لو_هـ(س + ١) للفترة [٦ ، ٨] يساوي لو_هـ(٣٤٣/١٢٥)^ب ما قيمة الثابت ب

أ/ −١/٣ ب/ ١/٣ ج/ ٣ د/ −٣

الحل / هـ(س) = لو_هـ(س² − ١) − لو_هـ(س + ١) = لو_هـ((س + ١)(س − ١)) − لو_هـ(س + ١)

فرق مربعين

⇐ هـ(س) = لو_هـ(س + ١) + لو_هـ(س − ١) − لو_هـ(س + ١) ⇐ هـ(س) = لو_هـ(س − ١)

Δهـ(س) = هـ(٨) − هـ(٦) ⇐ ب لو_هـ(٣٤٣/١٢٥) = لو_هـ(٨ − ١) − لو_هـ(٦ − ١)

⇐ ب لو_هـ(٧³/٣٥) = لو_هـ(٧) − لو_هـ(٥) ⇐ ب لو_هـ(٧/٥)³ = لو_هـ(٧/٥)

⇐ ٣ب لو_هـ(٧/٥) = لو_هـ(٧/٥) ⇐ ٣ب = ١ ⇐ ب = ١/٣

• تذكر :

لو_هـ(أ × ب) = لو_هـ أ + لو_هـ ب

لو_هـ أ − لو_هـ ب = لو_هـ(أ/ب)

لو_هـ أ^ن = ن لو_هـ أ

أ^ن/ب^ن = (أ/ب)^ن

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة الآتية :

• 2019 دور أول / إذا كان هـ(س) = { س² + ق(س − ١) ، س ≥ ١ ؛ ق(س) ، س < ١ } وكان متوسط تغير ق(س) في [٠ ، ٢] يساوي (٣) فما متوسط تغير هـ(س) في [٠ ، ٣]

أ.مي حواري

الحل / $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(٢) - ق(٠)}{٢ - ٠} = ٣ \Leftarrow ق(٢) - ق(٠) = ٦$

$$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٣) - هـ(٠)}{٣ - ٠} = \frac{(٣^٢ + ق(٣-١)) - ق(٠)}{٣} = \frac{٩ + ق(٢) - ق(٠)}{٣} = \frac{٩+٦}{٣} = \frac{١٥}{٣}$$

$$\Leftarrow \frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = ٥$$

---

• 2019 دور ثالث / إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران هـ(س) في النقطتين (١، أ)، (٣، ب) وصنع زاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها $\left(\frac{٣\pi}{٤}\right)$ ، ما متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) + س² − ١ في [١، ٣]

الحل / $(\overset{س_١}{١}، \overset{ص_١}{أ}) \Leftarrow ق(١) = أ$ ، $(\overset{س_٢}{٣}، \overset{ص_٢}{ب}) \Leftarrow ق(٣) = ب$

$$ظاهـ = \frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} \Leftarrow ظا ١٣٥ = \frac{ب - أ}{٣ - ١} \Leftarrow -١ = \frac{ب - أ}{٢} \Leftarrow -٢ = ب - أ$$

$$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = \frac{(٣ق(٣) + ٣^٢ - ١) - (٣ق(١) + ١ - ١)}{٢} = \frac{(٣ب + ٩ - ١) - (٣أ)}{٢}$$

$$= \frac{٣ب + ٨ - ٣أ}{٢} = \frac{(٣ب - ٣أ) + ٨}{٢} = \frac{٣(ب - أ) + ٨}{٢} = \frac{٣ \times -٢ + ٨}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$$

---

• 2020 دور أول / إذا كان متوسط تغير ق(س) في [١، ٣] يساوي (٤) ، ما متوسط تغير ل(س) = س² + ٣ق(س) في نفس الفترة.

الحل / $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = ٤ \Leftarrow ق(٣) - ق(١) = ٨$

$$\frac{\Delta ل(س)}{\Delta س} = \frac{ل(٣) - ل(١)}{٣ - ١} = \frac{(٣^٢ + ٣ق(٣)) - (١ + ٣ق(١))}{٢} = \frac{٩ + ٣ق(٣) - ١ - ٣ق(١)}{٢}$$

$$= \frac{(٩ - ١) + (٣ق(٣) - ٣ق(١))}{٢} = \frac{٨ + ٣(ق(٣) - ق(١))}{٢} = \frac{٨ + ٣(٨)}{٢}$$

$$= \frac{٨ + ٢٤}{٢} = \frac{٣٢}{٢} = ١٦$$

أ.م. حواري

---

• 2020 دور ثاني / إذا كان ق(س) = س² − ٣ أوجد متوسط تغير ق(س) عندما س = ١ إلى س = ١ + هـ
تتغير س من

الحل / $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{١ + هـ - ١}$

فرق مربعين

$$= \frac{((١ + هـ)^٢ - ٣) - (١ - ٣)}{هـ} = \frac{(١ + هـ)^٢ - ٣ - -٢}{هـ} = \frac{(١ + هـ)^٢ - ١}{هـ}$$

$$= \frac{(١ + هـ + ١)(١ + هـ - ١)}{هـ} = \frac{هـ(٢ + هـ)}{هـ} = ٢ + هـ$$

$\therefore هـ \neq ٠$

---

• 2020 دور ثالث / ليكن ق(س) = { ٦ − س ، س < ٢ ؛ س² + أس ، س ≥ ٢ } ، وكان متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى أ ، أ > ٢ يساوي (٩) ، ما قيمة الثابت أ.

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(أ) - ق(١)}{أ - ١} = ٩ \Leftarrow \frac{(أ^٢ + أ \times أ) - (٦ - ١)}{أ - ١} = ٩$

$\Leftarrow أ^٢ + أ^٢ - ٥ = ٩أ - ٩ \Leftarrow ٢أ^٢ - ٥ - ٩أ + ٩ = ٠ \Leftarrow ٢أ^٢ - ٩أ + ٤ = ٠$

$\Leftarrow (٢أ - ١)(أ - ٤) = ٠$

$٢أ - ١ = ٠ \Leftarrow ٢أ = ١ \Leftarrow أ = \frac{١}{٢}$ ✗ أو $أ - ٤ = ٠ \Leftarrow أ = ٤$ ✓

$أ > ٢$

$\Leftarrow أ = \{٤\}$

أ.م. حواري

---

• 2021 دور أول/ إذا كان $ق(س) = س^٢ + ب س - ٢$ وكان متوسط تغير ق(س) في [٢، ٤] يساوي (-٣) ما قيمة الثابت ب

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(٤) - ق(٢)}{٤ - ٢} = \frac{(٤^٢ + ٤ب - ٢) - (٢^٢ + ٢ب - ٢)}{٢} = -٣$

$(١٤ + ٤ب) - (٢ + ٢ب) = -٦ \Leftarrow ١٤ + ٤ب - ٢ - ٢ب = -٦ \Leftarrow ١٢ + ٢ب = -٦ \Leftarrow \frac{٢ب}{٢} = \frac{-١٨}{٢}$

$\Leftarrow ب = -٩$

---

• 2021 دور ثاني/ إذا كان $ق(س) = س^٢ + \frac{ج}{س}$ وكان متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من (٣) إلى (١) يساوي (٢)، ما قيمة/ قيم الثابت ج

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(١) - ق(٣)}{١ - ٣} = ٢ \Leftarrow (١^٢ + \frac{ج}{١}) - (٣^٢ + \frac{ج}{٣}) = -٤$

$\Leftarrow ١ + ج - ٩ - \frac{ج}{٣} = -٤ \Leftarrow (١ - ٩) + (ج - \frac{ج}{٣}) = -٤ \Leftarrow -٨ + \frac{٣ج - ج}{٣} = -٤$

$+٨ \qquad +٨$

$\Leftarrow \frac{٢ج}{٣} = ٤ \Leftarrow ج = \frac{٣ \times ٤}{٢} \Leftarrow ج = ٦$

---

• 2022 دور أول/ إذا كان متوسط تغير ق(س) في [٠، ١] يساوي (١٠)، ما متوسط تغير الاقتران $ل(س) = (س - ٣)^٢ ق(س)$ في نفس الفترة.

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(٥) - ق(١)}{٥ - ١} = ١٠ \Leftarrow ق(٥) - ق(١) = ٤٠$

$\frac{\Delta ل(س)}{\Delta س} = \frac{ل(٥) - ل(١)}{٥ - ١} = \frac{(٥ - ٣)^٢ ق(٥) - (١ - ٣)^٢ ق(١)}{٤} = \frac{٤ق(٥) - ٤ق(١)}{٤}$

$= \frac{\cancel{٤}(ق(٥) - ق(١))}{\cancel{٤}} = ٤٠$

---

• 2023 دور أول/ إذا كان مقدار تغير $ق(س) = س^٣ + ٢هـ(س - ١)$ في [٠، ٢] يساوي (١٢)، جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) في [-١، ١]

الحل/ $\Delta ق(س) = ق(٢) - ق(٠) = ١٢ \Leftarrow (٢^٣ + ٢هـ(٢ - ١)) - (٠^٣ + ٢هـ(٠ - ١)) = ١٢$

$\Leftarrow ٨ + ٢هـ(١) - ٢هـ(-١) = ١٢ \Leftarrow \frac{٢}{٢}(هـ(١) - هـ(-١)) = \frac{٤}{٢} \Leftarrow هـ(١) - هـ(-١) = ٢$

$-٨ \qquad -٨$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(١) - هـ(-١)}{١ - -١} = \frac{٢}{٢} = ١$

• 2023 دور ثاني/ اذا كان متوسط تغير ق(س) في [١، ٤] يساوي (٦) ، جد متوسط تغير هـ(س) = ٣ق(س) + س في [١، ٤]

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(٤) - ق(١)}{٤ - ١} = ٦ \Leftarrow ق(٤) - ق(١) = ١٨$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٣} = \frac{(٣ق(٤) + ٤) - (٣ق(١) + ١)}{٣} = \frac{٣ق(٤) - ٣ق(١) + ٤ - ١}{٣}$

$= \frac{٣(ق(٤) - ق(١)) + ٣}{٣} = \frac{٣ \times ١٨ + ٣}{٣} = \frac{٥٤ + ٣}{٣} = \frac{٥٧}{٣} = ١٩$

• 2023 دور ثالث/ اذا كان متوسط تغير ق(س) في [٢، ٥] يساوي (٤) وكان متوسط تغير ق(س) في [-١، ٥] يساوي (٣) بين أن متوسط تغير ق(س) في [-١، ٢] يساوي (٢)

الحل/

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [٢، ٥] = ٤ $\Leftarrow \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢} = ٤ \Leftarrow ق(٥) - ق(٢) = ١٢$ ـــ (١)

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [-١، ٥] = ٣ $\Leftarrow \frac{ق(٥) - ق(-١)}{٥ - -١} = ٣ \Leftarrow ق(٥) - ق(-١) = ١٨$ ـــ (٢)

بطرح/ (١) - (٢) $\Leftarrow$ (ق(-١) - ق(٢) = -٦) $\Leftarrow$ ق(٢) - ق(-١) = ٦

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [-١، ٢] = $\frac{ق(٢) - ق(-١)}{٢ - -١} = \frac{٦}{٣} = ٢$ #

أ.م. حواري

• 2024 دور أول/ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في [١، ٣] يساوي (٤) ، جد متوسط تغير هـ(س) = س² ق(س) - ٢س في نفس الفترة علماً بأن هـ(س) يمر بـ (٣، ١٢)

الحل/ هـ(س) يمر بـ (٣، ١٢) $\Leftarrow$ هـ(٣) = ١٢

$\Leftarrow$ هـ(٣) = ٣² ق(٣) - ٢ × ٣ = ١٢ $\Leftarrow$ ٩ق(٣) - ٦ = ١٢ $\Leftarrow \frac{٩}{٩}$ق(٣) = $\frac{١٨}{٩}$ $\Leftarrow$ ق(٣) = ٢

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = ٤ \Leftarrow ق(٣) - ق(١) = ٨ \Leftarrow ٢ - ق(١) = ٨ \Leftarrow ٢ - ٨ = -٦ = ق(١)$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = \frac{١٢ - (ق(١) - ٢)}{٢} = \frac{١٢ - (-٦ - ٢)}{٢} = \frac{١٢ - -٨}{٢} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠$

• 2025 دور أول/ اذا كان ق(س) = س² + $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ جد التغير في ق(س) علماً بأن س١ = ٢ ، Δس = ٢

الحل/ Δس = س٢ - س١ $\Leftarrow$ ٢ = س٢ - ٢ $\Leftarrow$ ٤ = س٢

Δق(س) = ق(٤) - ق(٢) = $(٤^٢ + \frac{١}{٤}) - (٢^٢ + \frac{١}{٢}) = ١٦ + \frac{١}{٤} - ٤ - \frac{١}{٢}$

$= (١٦ - ٤) + (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢})$

$= ١٢ + (\frac{١}{٤} - \frac{٢}{٤}) = ١٢ - \frac{١}{٤} = \frac{١٢ \times ٤ - ١}{٤} = \frac{٤٨ - ١}{٤} = \frac{٤٧}{٤}$

• 2025 دورتان / اذا كان ص(س) = ضتاس - P حاس وكان متوسط تغير ص(س) في [$\frac{\pi}{2}$ ، $\pi$] يساوي $\frac{4}{\pi}$ صد قيمة الثابت P

الحل / $\frac{\Delta ص(س)}{\Delta س} = \frac{ص(\pi) - ص(\frac{\pi}{2})}{\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{(ضتا(\pi) - P حا\pi) - (ضتا\frac{\pi}{2} - P حا\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$

$\Leftarrow (-1 - P \times 0) - (0 - P) = \frac{4}{\pi} \times \frac{\pi}{2} \Leftarrow -1 - P = 2 \Leftarrow P = -3$

---

• 2024 نابلس / إذا كان ص(س) = $س^3$ + ب س - 1 وكان متوسط تغير ص(س) في [1 ، 4] يساوي (8) ما قيمة الثابت ب

الحل / $\frac{\Delta ص(س)}{\Delta س} = \frac{ص(4) - ص(1)}{4 - 1} = 8 \Leftarrow (4^3 + 4ب - 1) - (1 + ب - 1) = 24$

$(15 + 4ب) - ب = 24 \Leftarrow (15 + 3ب = 24) \div 3 \Leftarrow 5 + ب = 8 \Leftarrow ب = 3$

---

• 2025 نابلس / إذا كان متوسط تغير ص(س) في [1 ، 3] = 2 وكان ص(1) = 1 ضد متوسط تغير هـ(س) = $ص^3$(س) في نفس الفترة.

الحل / $\frac{\Delta ص(س)}{\Delta س} = \frac{ص(3) - ص(1)}{3 - 1} = 2 \Leftarrow \frac{ص(3) - 1}{2} = 4 \Leftarrow ص(3) = 5$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(3) - هـ(1)}{3 - 1} = \frac{ص^3(3) - ص^3(1)}{2} = \frac{5^3 - 1}{2} = \frac{125 - 1}{2} = \frac{124}{2} = 62$

أ.مي حواري

---

• خارجي / إذا كان ص(س) = $\frac{P}{س - 3}$ + هـ(س) وكان متوسط تغير ص(س) في [-1 ، 2] يساوي (9) وكان مقدار تغير في هـ(س) في [-1 ، 2] يساوي 3 ، ما قيمة الثابت P

الحل / $\Delta هـ(س) = هـ(2) - هـ(-1) = 3$

$\frac{\Delta ص(س)}{\Delta س} = \frac{ص(2) - ص(-1)}{2 - (-1)} = \frac{(\frac{P}{2 - 3} + هـ(2)) - (\frac{P}{-1 - 3} + هـ(-1))}{3} = 9$

$\Leftarrow 27 = (-P + هـ(2)) - (-\frac{P}{4} + هـ(-1)) \Leftarrow 27 = -P + \frac{P}{4} + هـ(2) - هـ(-1)$

$27 = \frac{-3P}{4} + 5(هـ(2) - هـ(-1)) \Leftarrow 27 = \frac{-3P}{4} + 5 \times 3 \Leftarrow \frac{-3P}{4} = 12 \Leftarrow P = -16$

---

• خارجي / إذا كان ص = (4 - آب) س + ب وكان $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = آب ، س ∈ [-3 ، 1] ، ما قيمة الثابت ب

الحل / ص(س) = (4 - آب) س + ب

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص(3) - ص(-1)}{3 - (-1)} = آب \Leftarrow ((4 - آب) \times 3 + ب) - (-(4 - آب) + ب) = 8ب$

$3(4 - آب) + ب + (4 - آب) - ب = 8ب \Leftarrow 4(4 - آب) = 8ب \Leftarrow 4 - آب = 2ب$

$\frac{4}{8} = \frac{8ب}{8} \Leftarrow ب = \frac{4}{8} \Leftarrow ب = \frac{1}{2}$

• ما قاعدة كثير الحدود من الدرجة الأولى الذي متوسط تغيره في $[س_1 ، س_2]$ هو ٤ ويمر بـ $(-1 ، -1)$

الحل/ نفرض $ق(س) = أس + ب$ ، $أ \neq ٠$ ، $أ ، ب \in ح$

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{(أ(س_2) + ب) - (أس_1 + ب)}{س_2 - س_1} = \frac{أس_2 + \cancel{ب} - أس_1 - \cancel{ب}}{س_2 - س_1} = ٤$$

$$\Leftarrow \frac{أ(س_2 - س_1)}{(س_2 - س_1)} = ٤ \quad س_2 \neq س_1 \Leftarrow أ = ٤$$

$ق(س) = ٤س + ب$ يمر بـ $(-1 ، -1)$ $\Leftarrow ق(-1) = -٤ + ب \Leftarrow -1 = -٤ + ب \Leftarrow ٣ = ب$

$ق(-1) = -1$ ، $+٤$ ، $+٤$

$\Leftarrow ق(س) = ٤س + ٣$

---

• خارجي/ إذا كان متوسط تغير $ق(س) = ٢س(لو_هـ س)^{ن-٣}$ في الفترة $[1 ، هـ^2]$ هو $\frac{هـ^2}{٣٢(هـ^2 - 1)}$ ما قيمة الثابت ن.

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(هـ^2) - ق(1)}{هـ^2 - 1} = \frac{هـ^2}{٣٢(هـ^2 - 1)} \Leftarrow ٢هـ^2(لو_هـ هـ^2)^{ن-٣} - ٢(لو_هـ 1)^{ن-٣} = \frac{هـ^2}{٣٢}$

$\Leftarrow ٢هـ^2(٢لو_هـ هـ)^{ن-٣} - ٢(٠)^{ن-٣} = \frac{هـ^2}{٣٢} \Leftarrow ٢هـ^2(٢)^{ن-٣} - ٠ = \frac{هـ^2}{٣٢} = ٢ \times ٢^{ن-٣} = \frac{1}{٢^5}$

$\Leftarrow ٢^{ن-٣+1} = ٢^{-5} \Leftarrow ن - ٢ = -5 \Leftarrow ن = -٣$

تذكر: $لو_أ 1 = ٠$ / $لو_هـ هـ = 1$ / $أ^ب \times أ^جـ = أ^{ب+جـ}$

أ.م. حواري

مهم: السؤال رياضياً خاطئ: $(لو_هـ 1)^{ن-٣} = (٠)^{ن-٣} \Leftarrow$ يجب أن تكون $ن > ٣$

لو كانت ن أقل من ٣ مثلاً $ن = ٢ \Leftarrow (٠)^{٢-٣} = ٠^{-1} = \frac{1}{٠} = \infty$

اقتراح ليصبح السؤال صحيح/ أن يذكر بالشروط أن $ن > ٣$ وأن يصبح متوسط التغير $\frac{٣٢هـ^2}{هـ - 1}$ عندها تكون $ن = ٧$.

---

• خارجي/ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{1}{س} ، & س \geq 1 \\ ٢ - س ، & س < 1 \end{cases}$ احسب متوسط تغير $هـ(س) = ق(س^2) - س ق(س)$ على الفترة $[٠ ، ٢]$

الحل/ $\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٢) - هـ(٠)}{٢ - ٠} = \frac{(ق(٢^2) - ٢ق(٢)) - (ق(٠^2) - ٠ ق(٠))}{٢}$

$= \frac{(ق(٤) - ٢ \times \frac{1}{٢}) - (٢ - ٠)}{٢} = \frac{\frac{1}{٤} - 1 - ٢}{٢} = \frac{\frac{1}{٤} - ٣}{٢} = \frac{\frac{1}{٤} - \frac{١٢}{٤}}{٢} = \frac{-\frac{١١}{٤}}{٢}$

$= -\frac{١١}{٤} \times \frac{1}{٢} = -\frac{١٢}{٨}$

---

• خارجي/ إذا كان متوسط تغير $ق(س) = هـ^{(س^2+س)} + ب هـ^{(س+1)} - ٢ب$ للفترة $[-1 ، ٠]$ يساوي $٣(هـ - 1)$ ، ما قيمة الثابت ب

الحل/ $\frac{\Delta \text{ل}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ل}(\text{ن}) - \text{ل}(-1)}{\text{ن} - -1} = \left(\text{هـ}^{(\text{ن}+\text{ن})} + \text{ب}\,\text{هـ}^{(\text{ن}+1)} - 2\text{ب}\right) - \left(\text{هـ}^{(1-1)} + \text{ب}\,\text{هـ}^{(-1+1)} - 2\text{ب}\right) = 3(\text{هـ}-1)$

$\Leftarrow \text{هـ}^{\text{ن}} + \text{ب}\,\text{هـ}^{1} - \cancel{2\text{ب}} - \text{هـ}^{\text{ن}} - \text{ب}\,\text{هـ}^{\text{ن}} + \cancel{2\text{ب}} = 3(\text{هـ}-1)$

$\cancel{1} + \text{ب}\,\text{هـ} - \cancel{1} - \text{ب} = 3(\text{هـ}-1) \Leftarrow \text{ب}\,\text{هـ} - \text{ب} = 3(\text{هـ}-1) \Leftarrow \text{ب}\,\cancel{(\text{هـ}-1)} = 3\cancel{(\text{هـ}-1)}$

$\Leftarrow \text{ب} = 3$

---

• خارجي/ ما متوسط تغير $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}-1] & ، \text{س} \le 2 \\ |2\text{س}+1| & ، \text{س} > 2 \end{cases}$ في $[\text{ن}، 0]$.

الحل/ $\frac{\Delta \text{ق}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(0) - \text{ق}(\text{ن})}{0 - \text{ن}} = \frac{|2\times 0+1| - [\text{ن}-1]}{0} = \frac{|1| - [-1]}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{12}{0}$

---

• خارجي تفوق/ جد متوسط تغير $\text{هـ}(\text{س}) = \text{ق}^2(\text{س}) - 5$ للفترة $[3، 7]$ حيث $(\text{ق}(\text{س})-2)(\text{ق}(\text{س})+2) = \frac{1+6\text{س}}{3}$

الحل/ $\underbrace{(\text{ق}(\text{س})-2)(\text{ق}(\text{س})+2)}_{\text{فرق مربعين}} = \frac{1}{3} + \frac{6}{3}\text{س} \Leftarrow \text{ق}^2(\text{س}) - 4 = \frac{1}{3} + 2\text{س}$

$\Leftarrow \text{ق}^2(\text{س}) - 5 = 2\text{س} + \left(\frac{1}{3} - 1\right)$

$\Leftarrow \text{هـ}(\text{س}) = 2\text{س} - \frac{2}{3}$

$\frac{\Delta \text{هـ}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ}(7) - \text{هـ}(3)}{7-3} = \frac{\left(2\times 7 - \frac{2}{3}\right) - \left(2\times 3 - \frac{2}{3}\right)}{4} = \frac{14 - \cancel{\frac{2}{3}} - 6 + \cancel{\frac{2}{3}}}{4}$

$= \frac{8}{4} = 2$

---

أ.ميّ حوّاري

قل لي، كيف أواسيك؟

كيف آخذ بيدك حتّى تُكمل الطّريق؟ كيف أخبرك أنّك الأمَل دائمًا، أنّك مُهمٌّ لأُمّتك، أنّا نحتاجك رغم بُعدك وذَنبك وخطئك، كيف أخبرك أنّي أشعر بك، كأنّي أسمع صوت صَمتِك! أُطَبِّب جراح قلبك، أدعو

• تمرين 2 صفحة 70 / أسئلة إضافية

$\frac{1}{3}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{12}$ د) $\frac{1}{16}$ هـ) $\frac{1}{64}$

الحل

$\frac{1}{64} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16}$ ∴ الإجابة هـ

• تمرين 3 صفحة 70 / أسئلة إضافية

$\frac{1}{3}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{12}$ د) $\frac{1}{16}$ هـ) $\frac{1}{64}$

الحل

$\frac{1}{64} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16}$ ∴ الإجابة هـ

• تمرين 4 صفحة 70 / أسئلة إضافية

أ) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{12}$ د) $\frac{1}{16}$ هـ) $\frac{1}{64}$

الحل

$\frac{1}{64} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16}$ ∴ الإجابة هـ

## الدرس الثاني | قواعد الاشتقاق

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

إذا كان $ص = س^3 - 3س + 6$ ، $س \neq 0$ فإن $\frac{ص}{س}$ تساوي / أسئلة إضافية

أ) $س^2 - 3$ ب) $س^2 + 3$ ج) $3س^2 - 3$ د) $3س^2 + 3$ هـ) $3س^2 - 3س$

الحل

$\frac{ص}{س} = س^2 - 3$ ∴ الإجابة أ

• تمرين 2 صفحة 70 / أسئلة إضافية

إذا كان $ص = 3س^2 + 1$ ، $س \neq 0$ فإن $\frac{ص}{س}$ تساوي

أ) $6س$ ب) $6س + \frac{1}{س}$ ج) $6س + \frac{1}{س^2}$ د) $6س - \frac{1}{س}$ هـ) $6س - \frac{1}{س^2}$

الحل

$\frac{ص}{س} = 6س + \frac{1}{س^2}$ ∴ الإجابة ج

• تمرين 3 صفحة 70 / أسئلة إضافية

إذا كان $ص = 4س^2 - 3$ ، $س \neq 0$ فإن $\frac{ص}{س}$ تساوي

أ) $8س$ ب) $8س - \frac{3}{س}$ ج) $8س + \frac{3}{س}$ د) $4س - \frac{3}{س}$ هـ) $4س + \frac{3}{س}$

الحل

$\frac{ص}{س} = 8س - \frac{3}{س}$ ∴ الإجابة ب

• تمرين 4 صفحة 70 / أسئلة إضافية

إذا كان $ص = 3س^2 - 6س$ ، $س \neq 0$ فإن $\frac{ص}{س}$ تساوي

أ) $3س - 6$ ب) $3س^2 - 6$ ج) $3س^2 - 6س$ د) $6س - 6$ هـ) $6س^2 - 6$

الحل

$\frac{ص}{س} = 3س - 6$ ∴ الإجابة أ

• تمرين 5 صفحة 70 / أسئلة إضافية

إذا كان $ص = س^3 - 3س^2$ ، $س \neq 0$ فإن $\frac{ص}{س}$ تساوي

أ) $3س^2 - 6س$ ب) $3س^2 - 6$ ج) $3س^2 - 3$ د) $3س^2 - 3س$ هـ) $3س^2$

الحل

$\frac{ص}{س} = 3س^2 - 6س$ ∴ الإجابة أ

• تمرين 6 صفحة 70 / أسئلة إضافية

إذا كان $ص = \frac{1}{س^2}$ ، $س \neq 0$ فإن $\frac{ص}{س}$ تساوي

أ) $\frac{-2}{س^3}$ ب) $\frac{-2}{س^2}$ ج) $\frac{-1}{س^3}$ د) $\frac{-1}{س^2}$ هـ) $\frac{-3}{س^3}$

الحل

$\frac{ص}{س} = \frac{-2}{س^3}$ ∴ الإجابة أ

• تمرين 7 صفحة 70 / أسئلة إضافية

إذا كان $ص = \frac{1}{س^3}$ ، $س \neq 0$ فإن $\frac{ص}{س}$ تساوي

أ) $\frac{-3}{س^4}$ ب) $\frac{-3}{س^3}$ ج) $\frac{-2}{س^4}$ د) $\frac{-2}{س^3}$ هـ) $\frac{-4}{س^4}$

الحل

$\frac{ص}{س} = \frac{-3}{س^4}$ ∴ الإجابة أ

• تمرين 8 صفحة 70 / أسئلة إضافية

إذا كان $ص = 3س^2 - 4$ ، $س \neq 0$ فإن $\frac{ص}{س}$ تساوي

أ) $6س$ ب) $6س - \frac{4}{س}$ ج) $6س + \frac{4}{س}$ د) $3س - \frac{4}{س}$ هـ) $3س + \frac{4}{س}$

الحل

$\frac{ص}{س} = 6س + \frac{4}{س}$ ∴ الإجابة ج

• تمرين 9 صفحة 70 / أسئلة إضافية

إذا كان $ص = 3س^2 - 6س$ ، $س \neq 0$ فإن $\frac{ص}{س}$ تساوي

أ) $3س - 6$ ب) $3س^2 - 6$ ج) $3س^2 - 6س$ د) $6س - 6$ هـ) $6س^2 - 6$

الحل

$\frac{ص}{س} = 3س - 6$ ∴ الإجابة أ

• تمرين 10 صفحة 70 / أسئلة إضافية

إذا كان $ص = س^3 - \frac{3}{س}$ ، $س \neq 0$ فإن $\frac{ص}{س}$ تساوي

أ) $3س^2 + \frac{3}{س^2}$ ب) $3س^2 - \frac{3}{س^2}$ ج) $3س^2 + \frac{3}{س}$ د) $3س^2 - \frac{3}{س}$ هـ) $3س^2$

الحل

$\frac{ص}{س} = 3س^2 + \frac{3}{س^2}$ ∴ الإجابة أ

• 2019 دور ثالث / إذا كان $ق(1) = 6$ ، $ل'(1) = -4$ وكان $ل(س) = ه(س) - 5ق(س)$
ما قيمة $ق'(1)$

ب/ ٣ ج/ -٣ د/ -١٠ أ/ ١٠

الحل / $ل(س) = ه(س) - 5ق(س)$

$ل'(س) = ه'(س) - 5ق'(س)$

$ل'(1) = ه'(1) - 5ق'(1)$

$-4 = -6 - 5ق'(1) \Leftarrow -1 = -5ق'(1)$

$\Leftarrow 2 = ق'(1)$

---

• 2020 دور أول / إذا كان $ه(س) = \begin{cases} 2س^3 + 4 & ، س \neq 2 \\ 6 & ، س = 2 \end{cases}$ ما قيمة $ق'(2)$

ب/ ٦ ج/ ١٢ د/ غير موجودة أ/ ٨

الحل / نبحث في اتصال $ه(س)$ عند $(س = 2)$

$نها_{س \to 2} ه(س) = نها_{س \to 2} (2س^3 + 4) = 2(2)^3 + 4 = 8 + 4 = 12$

$ه(2) = 6 \times 2 = 12$

بما أن $نها_{س \to 2} ه(س) = ه(2) = 12$ إذن $ه(س)$ متصل عند $س = 2$ ، $ق(س) = 2س^2$

$\Leftarrow ق'(2) = 4 \times 2 = 8$

أ.مي حوّاري

---

• 2020 دور ثاني / إذا كان $ه(س) = \begin{cases} س^3 + 3 & ، س \neq 4 \\ 5 & ، س = 4 \end{cases}$ ما قيمة $ق'(4)$

أ/ ٨ ب/ ١٧ ج/ صفر د/ غير موجودة

الحل / نبحث في اتصال $ه(س)$ عند $(س = 4)$

$نها_{س \to 4} ه(س) = نها_{س \to 4} (س^3 + 3) = 4^3 + 3 = 17 + 3 = 19$

$ه(4) = 5$

$نها_{س \to 4} ه(س) \neq ه(4) \Leftarrow ه(س)$ غير متصل عند $(س = 4) \Leftarrow ق'(4)$ غ م

---

• 2020 دور ثالث / اذا كان $ه(س) = [2س + 8]$ ما قيمة $ق'(4)$

أ/ ٢ ب/ ٨ ج/ غير موجودة د/ صفر

الحل / • مهم لوضع دائرة /

مشتقة $[\ ]$ عند $س = P$

صفر
" عند النقط الداخلية "
نعوض $(س = P)$ داخل $[\ ]$ اذا كان
ناتج التعويض $\neq$ ص فهي داخلية وتكون متصل عندها

غير موجودة
" عند نقط التحول "
نعوض $(س = P)$ داخل $[\ ]$ إذا كان ناتج
التعويض $=$ ص فهي تحول وغير متصل عندها .

نعوض س = ٤ ⇐ ٢×٤ + ٨و = ٨ + ٨و = ٨و٨ ∉ ص ⇐ عند (س = ٤) نقطة داخلية
⇐ قَ(٤) = ٠

---

• 2020 دور ثالث / إذا كان ق(س) = { س² + ٢س + ١ ، س ≤ ١ ؛ [س] + ٣س ، س > ١ } ما قيمة قَ(١)⁺

أ/ ٤ ب/ ٣ ج/ ٠ د/ غير معرف

الحل/ [س] = { ٠ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ١ ، ١ ≤ س < ٢ } ⇐ س > ١

ق(س) = { س² + ٢س + ١ ، س ≤ ١ ؛ ١ + ٣س ، ١ < س < ٢ }

قَ(١)⁺ = (١ + ٣س)' = ٣

أ.ميّ حوّاري

---

• 2021 دور ثاني / اذا كان ق(س) = { س² + ٢ ، س ≤ ٥ ؛ ١٠س ، س > ٥ } ما قيمة قَ(٤)

أ/ ٤ ب/ ٨ ج/ صفر د/ غير معرف

الحل/ س = ٤ ∈ ]-∞ ، ٥] ⇐ قَ(٤) = (٢ + س²)' = ٢س |س=٤ = ٢×٤ = ٨

---

• 2022 دور أول / إذا كان الاقتران ق(س) = س^(٣/٢) ما قيمة قً(٤)

أ/ ٣ ب/ ٣/٢ ج/ ٣/٤ د/ ٣/٨

الحل/

الحل/ ق(س) = س^(٣/٢) ⇐ قَ(س) = ٣/٢ س^(٣/٢ - ١) = ٣/٢ س^(١/٢) = ٣/٢ √س

قً(س) = ٣/٢ × ١/(٢√س) ⇐ قً(٤) = ٣/٤ × ١/√٤ = ٣/٤ × ١/٢ = ٣/٨

---

• 2022 دور ثالث / إذا كان ق(س) × هـ(س) = ٤ وكان ق(١) = ٢ ، قَ(١) = ٥ ما قيمة هـَ(١)

أ/ -٥ ب/ ١ ج/ ١٥ د/ -١٥

الحل/ ق(س) × هـ(س) = ٤ ⇐ هـ(س) = ٤/ق(س) ⇐ هـَ(س) = -٤قَ(س)/ق²(س)

هـَ(١) = -٤قَ(١)/ق²(١) = -٤×٥/٢² = -٤×٥/٤ = -٥

---

• 2023 دور ثالث / إذا كان ق(١) = ٦ ، لَ(١) = -٤ وكان ل(س) = ق(س) - ٥هـ(س) ما قيمة هـَ(١)

أ/ -٥ ب/ ٢ ج/ ٣ د/ ٥

مكرر " سؤال 2019 دور ثالث "

• 2024 دور ثاني / $ق(س) = س^{ن}$ ، $ن \in ص$ وكان $ق^{٣}(س) = ٤أ س^{٢}$ فإن قيمة الثابت أ

أ/ ١٥ ب/ ٣٠ ج/ ٢٠ د/ ١٢

الحل/ $ق'(س) = ن س^{ن-١} \Leftarrow ق''(س) = ن(ن-١) س^{ن-٢} \Leftarrow ق^{(٣)}(س) = ن(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣}$

$\Leftarrow ن(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣} = ٤أ س^{٢}$ بالمقارنة

$س^{ن-٣} = س^{٢} \Leftarrow ن-٣ = ٢ \Leftarrow ن = ٥$

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٤أ \Leftarrow ٥ \times \cancel{٤} \times ٣ = \cancel{٤}أ \Leftarrow أ = ١٥$

---

• 2024 دور ثالث / إذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان $هـ(٢) = -١$

$ق'(٢) = هـ'(٢) = -٣$ ما قيمة $(ق - \frac{١}{هـ})'(٢)$

أ/ ٠ ب/ -٦ ج/ -٩ د/ -٣

الحل/ $(ق - \frac{١}{هـ})'(٢) = ق'(س) - \frac{-هـ'(س)}{هـ^{٢}(س)} \Big|_{س=٢} = ق'(٢) + \frac{هـ'(٢)}{هـ^{٢}(٢)}$

$= -٣ + \frac{-٣}{(-١)^{٢}} = -٣ + -٣ = -٦$

---

• 2025 دور ثاني / اذا كان $ص = \frac{أ}{س+١}$ ، $س > -١$ ، $\frac{دص}{دس} \Big|_{س=٢} = \frac{١}{٣}$ ما قيمة الثابت أ

أ/ ٣ ب/ -٣ ج/ $-\frac{١}{٣}$ د/ $\frac{١}{٣}$

الحل/ $\frac{دص}{دس} = \frac{-أ}{(س+١)^{٢}} \Leftarrow \frac{دص}{دس} \Big|_{س=٢} = \frac{-أ}{(٢+١)^{٢}} = +\frac{١}{٣} \Leftarrow \frac{-أ}{\cancel{٩}\,٣} = \frac{١}{\cancel{٣}}$

$\Leftarrow -أ = ٣ \Leftarrow أ = -٣$

---

• 2025 جنوب نابلس / إذا كان $ق(س) = \frac{[\frac{١}{٢}س + ١]}{|س - ٢|}$ ، ما قيمة $ق'(٣)$

أ/ ٣ ب/ ٢ ج/ -٢ د/ -٣

الحل/ $[\frac{١}{٢}س + ١] = \begin{cases} ١ ، ٠ \le س < ٢ \\ ٢ ، ٢ \le س < ٤ \end{cases}$ $\quad ل = \frac{١}{|\frac{١}{٢}|} = ٢$ $\quad \Leftarrow س = ٣ \in [٢ ، ٤[$

$|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ ، س \ge ٢ \\ ٢ - س ، س < ٢ \end{cases}$ $\quad \Leftarrow س = ٣ \in [٢ ، \infty[$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{٢}{س - ٢} \Leftarrow ق'(س) = \frac{-٢}{(س-٢)^{٢}} \Leftarrow ق'(٣) = \frac{-٢}{(٣-٢)^{٢}} = -٢$

أ.ميّ حوّاري

---

• خارجي / اذا كان $ق(س)$ كثير حدود ، ما قيمة $ق(-١)$ اذا علمت أن $ق(س) - (ق + ق')'(س) = ٤س^{٢} + ١٧س + ٢١$

أ/ ٨ ب/ -٨ ج/ ٣٣ د/ ٢١

الحل/ $ق(س) - (ق' + ق'')(س) = ٤س^{٢} + ١٧س + ٢١$

$ق(س) - ق'(س) - ق''(س) = ٤س^{٢} + ١٧س + ٢١$

ق(س) − قَ(س) − قً(س) من الدرجة الثانية وبما أن درجة ق > درجة قَ > درجة قً

اذن ق(س) من الدرجة الثانية

نفرض ق(س) = ٤س² + أس + ب

قَ(س) = ٨س + أ

قً(س) = ٨

ق − قَ − قً = ٤س² + س − ٨س + ب − أ − ٨

٤س² + ١٧س + ٢١ = ٤س² + س(أ − ٨) + (ب − أ − ٨) بالمقارنة

١٧ = أ − ٨ / ب − أ − ٨ = ٢١ ⇐ ب − ٢٥ − ٨ = ٢١ ⇐ ب = ٢١ + ٢٥ + ٨

٢٥ = أ ⇐ ب = ٥٤

⇐ ق(س) = ٤س² + ٢٥س + ٥٤

ق(−١) = ٤ − ٢٥ + ٥٤ = ٣٣

---

• خارجي/ اذا كان ق(س) = $\frac{١}{ج}$ س^ن وكانت ق^(٣)(س) = (ج + ٢)(س) ما قيمة الثابت ج الموجبة

أ/ ٤ ب/ ٦ ج/ ٨ د/ ٢

الحل/ قَ(س) = $\frac{ن}{ج}$ س^(ن−١) ⇐ قً(س) = $\frac{١}{ج}$ن(ن−١) س^(ن−٢) ⇐ ق^(٣)(س) = $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{ج}$ س^(ن−٣)

⇐ (ج + ٢)(س) = $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{ج}$ س^(ن−٣) بالمقارنة

أ.ميّ حوّاري

س^١ = س^(ن−٣) ⇐ ١ = ن − ٣ ⇐ ن = ٤

(ج + ٢) = $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{ج}$ ⇐ ج² + ٢ج = ٤ × ٣ × ٢ ⇐ ج² + ٢ج − ٢٤ = ٠

⇐ (ج − ٤)(ج + ٦) = ٠

إما ج + ٦ = ٠ ⇐ ج = −٦ × سالب/ أو ج − ٤ = ٠ ⇐ ج = ٤ ✓

---

• خارجي تفوق/ ما قيمة $\frac{د}{دس}$ (س² $\frac{د^٢}{دس^٢}$ ($\frac{١}{١+س}$)) عندما س = ١

المشتقة الثانية لـ

أ/ $\frac{١}{٨}$ ب/ ٨ ج/ −٨ د/ ٨

الحل/ $\left(\frac{١}{١+س}\right)^{١}$ = $\frac{-١}{(١+س)^٢}$ = −(١+س)^(−٢)

$\left(\frac{١}{١+س}\right)''$ = −١ × −٢(١+س)^(−٣) = ٢(١+س)^(−٣) = $\frac{٢}{(١+س)^٣}$

اشتق

⇐ $\frac{د}{دس}$ (س² × $\frac{٢}{(١+س)^٣}$) = $\frac{د}{دس}$ ($\frac{٢س^٢}{(١+س)^٣}$) = $\frac{(١+س)^٣ × ٤س − ٢س^٢(١+س)^٢ × ٣}{((١+س)^٣)^٢}$ |س=١

= $\frac{٢^٣ × ٤ − ٢ × ٣ × ٢^٢}{٢^٦}$ = $\frac{٨ × ٤ − ٦ × ٤}{٦٤}$ = $\frac{٣٢ − ٢٤}{٦٤}$ = $\frac{٨}{٦٤}$ = $\frac{١}{٨}$

• خارجي تفوق/ أي من الاقترانات التالية قابلة للاشتقاق عند (س = ٠)

أ/ ق(س) = $\sqrt{س}$ ب/ ل(س) = $\sqrt{س^2}$ جـ/ هـ(س) = |س$^3$| د/ ك(س) = $\frac{س}{س^2+س}$

الحل/ ✗ أ/ ق(س) = $\sqrt{س}$ مجاله س ≥ ٠

ق'(س) = $\frac{1}{2\sqrt{س}}$ ⇐ ق'(٠) = $\frac{1}{2\sqrt{٠}}$ = $\frac{1}{٠}$ غير موجودة

✗ ب/ ل(س) = $\sqrt{س^2}$ = |س| متصل عند نقطة التحول (س = ٠) وغير مشتق عندها

✗ د/ ك(س) = $\frac{س}{س^2+س}$ مجاله ح/{أصفار المقام} = ح/{٠، -١}

غير معرف عند (س = ٠)

✓ جـ/ هـ(س) = |س$^3$| = |س|$^3$ = $\begin{cases} س^3 ، س \geq ٠ \\ -س^3 ، س < ٠ \end{cases}$ متصل لأنه قيمة مطلقة للاقتران متصل

هـ'(س) = $\begin{cases} 3س^2 ، س \geq ٠ \\ -3س^2 ، س < ٠ \end{cases}$

هـ'(٠)$^+$ = ٣(٠) = ٠ هـ'(٠)$^-$ = -٣ × ٠ = ٠ ⇐ هـ'(٠) = ٠

---

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة الآتية:

• 2017 دور أول/ اذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق وواقعين في الربع الأول حيث ق(س) - هـ(س) = ب ، ب عدد ثابت ، هـ(٢) = ٢ ، هـ'(٢) = -٣ ، $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(٢) = ٩$ جد قيمة الثابت ب

الحل/ ق(س) - هـ(س) = ب ⇐ ق(س) = ب + هـ(س)

ق'(س) = هـ'(س) ⇐ ق'(٢) = هـ'(٢) = -٣

ق(٢) = ب + هـ(٢) ⇐ ق(٢) = ب + ٢

$\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(٢) = \frac{هـ(٢)ق'(٢) - ق(٢)هـ'(٢)}{هـ^2(٢)} = \frac{٢ \times -٣ - (ب+٢) \times -٣}{٢^2} = ٩$

⇐ $\cancel{-6} + ٣ب + \cancel{6} = ٣٦$ ⇐ ٣ب = ٣٦ ⇐ ب = ١٢

---

• 2018 دور أول/ إذا كان ق(س) = س$^3$ - ٢س ، هـ(س) = $\frac{٤}{س}$ + أ ، س ≠ ٠ جد قيمة الثابت أ حيث (ق × هـ)'(١) = ٢٦

الحل/ ق(س) = س$^3$ - ٢س ⇐ ق(١) = ١ - ٢ = -١

ق'(س) = ٣س$^2$ - ٢ ⇐ ق'(١) = ٣ - ٢ = ١

هـ(س) = $\frac{٤}{س}$ + أ ⇐ هـ(١) = ٤ + أ

هـ'(س) = $\frac{-٤}{س^2}$ ⇐ هـ'(١) = -٤

(ق × هـ)'(١) = ق(١)هـ'(١) + هـ(١)ق'(١)

٢٦ = -١ × -٤ + (٤ + أ) ⇐ ٢٦ = -٤ + ٤ + أ ⇐ ٢٦ - ٨ = ١٨ = أ

أ.ميّ حوّاري

• 2020 دور ثاني/ اذا كان الاقتران هـ(س) قابل للاشتقاق وكان هـ(٢) = ٣ ، هـَ(٢) = -١
وكان ق(س) = هـ(س) - $\frac{١}{هـ(س)}$ أوجد قيمة قَ(٢)

الحل/

قَ(س) = هـَ(س) - $\frac{-١ \times هـَ(س)}{هـ^٢(س)}$ ⇐ قَ(٢) = هـَ(٢) + $\frac{هـَ(٢)}{هـ^٢(٢)}$ = -١ + $\frac{-١}{٣^٢}$

قَ(٢) = $\frac{-١ \times ٩}{٩}$ + $\frac{-١}{٩}$ = $\frac{-٩+-١}{٩}$ = $\frac{-١٠}{٩}$

---

• 2021 دور ثاني/ اذا كان ق(س) = { أ س^٣ + ١٢ ، س ≤ ٢ ؛ س^٢ + ب س ، س > ٢ } وكان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند (س = ٢) أجد قيمة الثابتين أ ، ب

الحل/ قَ(٢) موجودة ⟵ ق(س) متصلاً عند (س = ٢)

قَ(٢)^+ = قَ(٢)^-

٣أ س^٢ = ٢س + ب | س = ٢

٣أ(٢^٢) = ٢×٢ + ب

١٢أ = ٤ + ب

١٢أ - ب = ٤ — (١)

نها (س ← ٢^+) أ س^٣ + ١٢ = نها (س ← ٢^-) (س^٢ + ب س)

٨أ + ١٢ = ٤ + ٢ب

٨أ - ٢ب = ٤ - ١٢

[٨أ - ٢ب = -٨] /٢

٤أ - ب = -٤ — (٢)

بطرح (١) - (٢) ⇐ ١٢أ - ٤أ = ٤ - -٤ ⇐ ٨أ = ٨ ⇐ أ = ١ نعوضها في (٢)

٤أ - ب = -٤ ⇐ ٤×١ - ب = -٤ ⇐ ٤ + ٤ = ب ⇐ ٨ = ب

---

• 2023 دور أول/ اذا كان قَ(س) = √س ق(س) + ق(٤) ، قَ(٤) = ٦ ما قيمة قً(٤)

الحل/ * قَ(س) = √س ق(س) + ق(٤)

قَ(٤) = √٤ ق(٤) + ق(٤) ⇐ ٦ = ٢ق(٤) + ق(٤) ⇐ ٦ = ٣ق(٤) ⇐ ٢ = ق(٤)

* قَ(س) = √س ق(س) + ق(٤)

قً(س) = √س قَ(س) + ق(س) × $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

قً(٤) = √٤ قَ(٤) + $\frac{ق(٤)}{٢\sqrt{٤}}$ = ٢(٦) + $\frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢} \times ٢}$ = ١٢ + $\frac{١}{٢}$ = ١٢,٥

---

• 2023 دور أول/ اذا كان ق(س) = { أ س ، س ≤ ١ ؛ ب س^٢ + س + ١ ، س > ١ } وكان ق(س) قابلاً للاشتقاق على ح

أ.ميّ حوّاري

أجد قيمة الثابتين أ ، ب

الحل/ ق(س) مشتق على ح ⟵ ق(س) مشتق عند (س = ١)

قَ(١) موجودة ⟵ ق(س) متصل عند (س = ١)

قَ(١)^+ = قَ(١)^-

٢ب س + ١ = أ | س = ١

٢ب + ١ = أ — (١)

نها (س ← ١^+) (ب س^٢ + س + ١) = نها (س ← ١^-) (أ س)

ب + ١ + ١ = أ

ب + ٢ = أ — (٢)

① = ② ⇐ ٢ب + ١ = ب + ٢ ⇐ ٢ب − ب = ٢ − ١ ⇐ ب = ١ نعوضها في ②

أ = ب + ٢ ⇐ أ = ١ + ٢ ⇐ أ = ٣

• 2023 دور ثالث / اذا كان ق(س) = { [٢ − س] + س² ، ∴ ≤ س < ٢ ، ٢/(س + ١) ، س ≥ ٢ } ابحث في قابلية الاشتقاق على مجاله

الحل / [٢ − س] = { ٢ ، −١ < س ≤ ∴ ؛ ١ ، ∴ < س ≤ ١ ؛ ∴ ، ١ < س ≤ ٢ ؛ −١ ، ٢ < س ≤ ٣ }

ل = ١/|−١| = ١

ق(س) = { ٢ + س² ، س = ∴ ؛ ١ + س² ، ∴ < س ≤ ١ ؛ س² ، ١ < س < ٢ ؛ ٢/(س + ١) ، س ≥ ٢ }

مجاله س ∈ [∴ ، ∞[ .

أ.مي حواري

• الفترات المفتوحة :

• عندما ∴ < س < ١ ، ق(س) = ١ + س² ك ح متصل ومشتق ومشتقته ٢س .

• عندما ١ < س < ٢ ، ق(س) = س² ك ح متصل ومشتق ومشتقته ٢س

• عندما س ≥ ٢ ، ق(س) = ٢/(س + ١) متصل لأنه نسبي والمقام ≠ ∴ ⇐ ق'(س) = −٢/(س + ١)²

• النقط الطرفية :

عند (س = ∴) ق'(∴) غ م طرفية .

• نقاط التحول :

* س = ١ نبحث في الاتصال

نها س ← ١⁺ س² = ١ ، نها س ← ١⁻ ١ + س² = ١ + ١ = ٢ = ق(١) ⇐ غير متصل عند س = ١ ⇐ ق'(١) غ م

* عند (س = ٢)

نها س ← ٢⁺ ٢/(س + ١) = ٢/(٢ + ١) = ٢/٣ = ق(٢) ، نها س ← ٢⁻ س² = ٢² = ٤ ⇐ غير متصل عند س = ٢ ⇐ ق'(٢) غ م

⇐ ق'(س) = { ٢س ، ∴ < س < ١ ؛ ٢س ، ١ < س < ٢ ؛ −٢/(س² + ١) ، س > ٢ ؛ غ م ، س = {∴ ، ١ ، ٢} .

• 2024 دور أول/ إذا كان ق(س) = { أس² + ٢س ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ؛ س³ − ب س + ١٢ ، ٢ < س ≤ ٣ } وكان ق(س) قابل للاشتقاق على الفترة [٠، ٣] ، أجد قيمة الثابتين أ ، ب

الحل/ ق(س) قابلاً للاشتقاق على ]٠، ٣[ ⇐ ق(س) مشتق عند (س = ٢)

قَ(٢) موجودة ⟵ ق(س) متصل عند (س = ٢)

قَ(٢)⁺ = قَ(٢)⁻

٣س² − ب = ٢أس + ٢ | س = ٢

٣(٤) − ب = ٤أ + ٢

١٢ − ب = ٤أ + ٢

١٠ = ٤أ + ب — (١)

نها (س³ − ب س + ١٢) = نها (أس² + ٢س) ، س ← ٢⁺ ، س ← ٢

٢³ − ٢ب + ١٢ = ٢²أ + ٢×٢

٨ + ١٢ − ٢ب = ٤أ + ٤

١٦ = ٤أ + ٢ب — (٢)

بطرح (٢) − (١) ⇐ ٦ = ب نعوضها في (١) ⇐ ١٠ = ٤أ + ٦ ⇐ ٤/٤ = ٤أ/٤ ⇐ أ = ١

---

• 2024 نابلس/ إذا كان ق(س) = { أس² + ٢ ، س ≥ ٢ ؛ س² + ب س ، س < ٢ } وكان ق(س) قابل للاشتقاق عند (س = ٢) ما قيمة كل من الثابتين أ ، ب

الحل/ قَ(٢) موجودة ⟵ ق(س) متصل عند (س = ٢)

قَ(٢)⁺ = قَ(٢)⁻

٢س + ب = ٢أس | س = ٢

٤ + ب = ٤أ

٤ = ٤أ − ب — (١)

نها (أس² + ٢) = نها (س² + ب س) ، س ← ٢⁺ ، س ← ٢

٤أ + ٢ = ٤ + ٢ب

٤أ − ٢ب = ٢ — (٢)

(١) − (٢) / ٢ = −ب − −٢ب ⇐ ٢ = ب نعوضها في (١)

٤ = ٤أ − ٢ ⇐ ٦/٤ = ٤أ/٤ ⇐ أ = ٦/٤ ⇐ أ = ٣/٢

أ.ميّ حوّاري

---

• خارجي/ إذا كان ق(س) = { س³ ، س < ١ ؛ أس² + ب س + جـ ، س ≥ ١ } وكانت قَ(١) ، قً(١) موجودة ما قيمة كل من الثوابت أ ، ب ، جـ

الحل/ قً(١) موجودة ⟵ قَ(١) موجودة ⟵ ق(س) متصل عند (س = ١)

قً(١)⁺ = قً(١)⁻

٢أ = ٦س | س = ١

٢أ = ٦

أ = ٣

قَ(١)⁺ = قَ(١)⁻

٢أس + ب = ٣س² | س = ١

٢×٣ + ب = ٣

ب = ٣ − ٦ ⇐ ب = −٣

نها (٣س² − ٣س + جـ) = نها س³ ، س ← ١⁺ ، س ← ١

~~٣ − ٣~~ + جـ = ١

جـ = ١

# الدرس الثالث | مشتقات الاقترانات المثلثية

## القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2017 دور أول / إذا كان ص = جاس ظتاس جد $\frac{دص}{دس}$

أ/ جتاس  ب/ -جتاس قأس  ج/ جاس  د/ -جاس

الحل/ ص = جاس × ظتاس ⇐ ص = جاس × $\frac{جتاس}{جاس}$ ⇐ ص = جتاس ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = -جاس

---

• 2019 دور ثاني / إذا كان ص = ظاس ما قيمة $\frac{دص}{دس}$

أ/ ١ - ص²  ب/ -١ - ص  ج/ ١ + ص²  د/ ١ + ص

الحل/ ص = ظاس ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = قأس = ظأس + ١ = ص² + ١

متطابقة

---

• 2019 دور ثالث / إذا كان ق(س) = ظأس ما قيمة قَ($\frac{\pi}{4}$)

أ/ ١  ب/ ٢  ج/ ٣  د/ ٤

الحل/ قَ(س) = ٢ ظاس × قأس "سلسلة"

قَ($\frac{\pi}{4}$) = ٢ ظا($\frac{\pi}{4}$) × قأ($\frac{\pi}{4}$) = ٢ × ١ × $\frac{1}{قبا^2(\frac{\pi}{4})}$ = ٢ × ١ × $\frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$ = ٢ × ١ × $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ = ٢ × ٢ = ٤

---

• 2022 دور أول / اذا كان ص = $\frac{س}{جا(٢س)}$ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عند س = $\frac{\pi}{4}$

أ/ ٢  ب/ ١  ج/ ٠و  د/ صفر

الحل/ ص = $\frac{س}{جا(٢س)}$ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{جا(٢س) \times ١ - س \times جتا(٢س) \times ٢}{جا^2(٢س)}$ | س = $\frac{\pi}{4}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{جا(\frac{\pi}{2}) - ٢ \times \frac{\pi}{4} \times جتا(\frac{\pi}{2})}{جا^2(\frac{\pi}{2})}$ = $\frac{1}{١^2}$ = ١

---

• 2022 دور ثاني / اذا كان ق(س) = قأس + ٣ ما قيمة قَ(س)

أ/ قأس ظاس  ب/ ظأس  ج/ ٢ قأس ظاس  د/ ٢ قاس ظاس

الحل/ قَ(س) = ٢ قاس × قاس ظاس "سلسلة"

= ٢ قأس ظاس .

أ.مي حواري

---

• 2022 دور ثالث / إذا كان ص = ظتاس + قتاس ما قيمة $\frac{صَ}{ص}$

أ/ قتاس  ب/ -قتاس  ج/ $\frac{-1}{جتاس}$  د/ -جتاس

الحل/ صَ = -قتأس - قتاس ظتاس "نخرج -قتاس عامل مشترك"

صَ = -قتاس (قتاس + ظتاس)

$\frac{صَ}{ص}$ = -قتاس × $\frac{ص}{ص}$ ⇐ $\frac{صَ}{ص}$ = -قتاس

---

• 2023 دور ثاني / إذا كان ق(س) = جتا(٢س) ما قيمة قَ(س) + ٦ق(س)

أ/ جتا٢س  ب/ جا(٢س)  ج/ ٢جتا(٢س)  د/ ٢جا(٢س)

الحل/ ق(س) = جتا(٢س) ← قَ(س) = -٢جا(٢س) ⇐ قً(س) = -٤ جتا(٢س)

قً(س) + ٦ق(س) = -٤ جتا(٢س) + ٦ جتا(٢س) = ٢ جتا(٢س)

---

• 2023 دور ثاني/ إذا كان ص = قتاس + ظتاس ما قيمة $\frac{دص}{دس}$

أ/ -ص قتاس ب/ ص قتاس ج/ -ص جاس د/ ص جاس

الحل/ صَ = -قتاس ظتاس - قتاس باخراج (-قتاس) عامل مشترك

صَ = -قتاس (قتاس + ظتاس)

صَ = -قتاس ص

أ.مي حواري

---

• 2024 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = جا(٢س) ما قيمة قً(س) + ٢ق(س) =

أ/ ٢جا(٢س) ب/ -٢جا(٢س) ج/ ٢ جتا(٢س) د/ -٢ جتا(٢س)

الحل/ قَ(س) = ٢ جتا(٢س) ⇐ قً(س) = -٤ جا(٢س)

قً(س) + ٢ق(س) = -٤ جا(٢س) + ٢ جا(٢س) = -٢ جا(٢س)

---

• خارجي/ إذا كان ص = قاس + ظاس ما قيمة $\frac{دص}{دس}$

أ/ قاس × ص ب/ قاس ج/ جتا(س) × ص د/ قتا(س) ص

الحل/ صَ = قاس ظاس + قاس "باخراج قاس عامل مشترك"

صَ = قاس (ظاس + قاس)

صَ = قا(س) ص

---

• خارجي/ إذا كان ق(س) = جا(٢س) ما قيمة قً(س) + ٦ق(س)

أ/ -١٠ جا(٢س) ب/ ١٠ جا(٢س) ج/ ٤ جا(٢س) د/ ٢ جا(٢س)

الحل/ قَ(س) = ٢ جتا(٢س) ⇐ قً(س) = -٤ جا(٢س)

قً(س) + ٦ق(س) = -٤ جا(٢س) + ٦ جا(٢س) = ٢ جا(٢س)

---

• 2020 دور ثالث/ إذا كان ص = $\frac{جتاس}{١ - جاس}$ أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{١ - جاس}$

الحل/

صَ = $\frac{(١ - جاس)(-جاس) - جتاس(-جتاس)}{(١ - جاس)^٢} = \frac{-جاس + جا^٢س + جتا^٢س}{(١ - جاس)^٢} = \frac{-جاس + ١}{(١ - جاس)^٢}$

صَ = $\frac{(١ - جاس)}{(١ - جاس)(١ - جاس)} = \frac{١}{١ - جاس}$ #

---

• 2021 دور أول/ اذا كان ق(س) = أ جاس ، هـ(س) = قاس ظاس ما قيمة الثابت أ حيث

(ق × هـ)'(π/٤) = ٨

الحل/ ق(س) = أ جاس ⇐ ق(π/٤) = أ جا π/٤ = أ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{أ}{\sqrt{٢}}$

قَ(س) = أ جتاس ⇐ قَ(π/٤) = أ جتا(π/٤) = أ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{أ}{\sqrt{٢}}$

$\frac{1}{(\frac{1}{2})} = 1 \times \frac{1}{\text{ضتا}(\frac{\pi}{4})} = \text{قا}(\frac{\pi}{4}) \times \text{ظا}(\frac{\pi}{4}) = \text{ق}(\frac{\pi}{4}) \Leftarrow \text{ق}(س) = \text{قا}س \cdot \text{ظا}س = 2$

$\text{ق}(س) = \text{جتا}س \times \text{قا}س + \text{ظا}س \times \text{قا}س \text{ظا}س$

$\text{ق}(\frac{\pi}{4}) = \text{جتا}(\frac{\pi}{4}) + \text{قا}^3(\frac{\pi}{4}) \text{ظا}(\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2})^3 + 2\sqrt{2} \times 1 = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$\text{ق}(1)_{ص} = 2\sqrt{2} + 8 = 8\sqrt{3}$

$\text{ق}(\frac{\pi}{3}) = \text{جا}(\frac{\pi}{3}) \text{ق}(\frac{\pi}{3}) + \text{جتا}(\frac{\pi}{3}) \text{ق}'(\frac{\pi}{3})$

$(\text{ف} \times \text{ه})'(\frac{\pi}{3}) = \text{ف}'(\frac{\pi}{3}) \text{ه}(\frac{\pi}{3}) + \text{ف}(\frac{\pi}{3}) \text{ه}'(\frac{\pi}{3})$

$1 = (\frac{12}{\sqrt{3}} \times 8\sqrt{3}) + (8 \times \frac{12}{\sqrt{3}}) \Leftarrow 8\sqrt{3}\text{ق}(\frac{\pi}{3}) + 8\text{ق}'(\frac{\pi}{3}) = 1$

$\Leftarrow 24\text{ق}(\frac{\pi}{3}) + 8\text{ق}'(\frac{\pi}{3}) = 8 \Leftarrow 3\text{ق}(\frac{\pi}{3}) + \text{ق}'(\frac{\pi}{3}) = 1 \Leftarrow \text{ق}'(\frac{\pi}{3}) = -2$

---

- 2022 دور أول/ إذا كان $\text{ق}(س) = \text{جاس}(1 + \text{ضتاس})$ و $س \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ فاثبت أن $\text{ق}'(س) = 0$

الحل/ $\text{ق}(س) = \text{جاس} \times \text{جاس} - \text{جاس} + (1 + \text{ضتاس})\text{جتاس}$

$= -\text{جا}^2س + \text{جتاس} + \text{جتا}^2س$

$= -(1 - \text{جتا}^2س) + \text{جتاس} + \text{جتا}^2س$

$= -1 + \text{جتا}^2س + \text{جتاس} + \text{جتا}^2س \Leftarrow 0 = 2\text{جتا}^2س + \text{جتاس} - 1$

$\Leftarrow 0 = (2\text{جتاس} - 1)(\text{جتاس} + 1)$

إما $2\text{جتاس} - 1 = 0 \Leftarrow \text{جتاس} = \frac{1}{2} \Leftarrow س = \frac{\pi}{3} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

أو $\text{جتاس} + 1 = 0 \Leftarrow \text{جتاس} = -1 \Leftarrow س = \pi \notin ]0, \frac{\pi}{2}[$

$\Leftarrow س = \{\frac{\pi}{3}\}$

---

- خارجي/ إذا كان $\text{ق}(س) = (\text{جا}(2س) + \text{جتا}(2س))(\text{ظاس} \cdot \text{ظتاس})(3س + 2)$ فما قيمة $\text{ق}'(\frac{\pi}{4})$

الحل/ $\text{ق}(س) = (\text{جا}(2س) + \text{جتا}(2س)) \times (\text{ظاس} \times \frac{1}{\text{ظاس}})(3س + 2)$

$\text{ق}(س) = 1 \times 1 \times (3س + 2) = 3س + 2$

$\text{ق}(س) = 3 \Leftarrow \text{ق}'(\frac{\pi}{4}) = 3$

---

- خارجي/ إذا كان $\text{ق}(س) = \frac{9}{3 - \text{ظاس}} + \text{ظا}(6\pi)$ و $س \in ]0, \frac{\pi}{4}[$ فما قيمة $\text{ق}'(\frac{\pi}{4})$.

الحل/ $\text{ق}(س) = \frac{-9 \times -6\text{قاس}}{(3 - \text{ظاس})^2} \Leftarrow \text{ق}'(\frac{\pi}{4}) = \frac{6\text{قا}^2(\frac{\pi}{4})}{(3 - \text{ظا}\frac{\pi}{4})^2} = \frac{6 \times (\sqrt{2})^2}{(3 - 1)^2}$

$= \frac{6 \times 2}{4} = 3$

أ.ميّ حوّاري

نحن مشاريع آخرة، وإنمّا الدّنيا عُبور..

# الدرس الرابع | قاعدة لوبيتال و مشتقة الاقتران الأسي واللوغاريتمي

## • القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2017 دور أول / جـ $\lim_{س \to ن} \frac{1 - جتاس}{س^2}$

أ/ $\frac{1}{2}$ ب/ $-\frac{1}{2}$ جـ/ 1 د/ 2

الحل / $\lim_{س \to ن} \frac{1 - جتاس}{س^2} = \frac{1 - جتا(ن)}{ن} = \frac{1-1}{ن} = \frac{ن}{ن}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ن} \frac{جاس}{2س} = \frac{جا(ن)}{2 \times ن} = \frac{ن}{ن}$

لوبيتال مرة ثانية / $\lim_{س \to ن} \frac{جتاس}{2} = \frac{جتا(ن)}{2} = \frac{1}{2}$

أ.ميّ حوّاري

---

• 2017 دور أول / جد $\lim_{س \to ن} \frac{1 - جتا(2س)}{س^2}$

أ/ -4 ب/ 2 جـ/ 4 د/ 1

الحل / $\lim_{س \to ن} \frac{1 - جتا(2س)}{س^2} = \frac{1 - جتا(ن)}{ن} = \frac{1-1}{ن} = \frac{ن}{ن}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ن} \frac{\cancel{2}جا(2س)}{\cancel{2}س} = \frac{جا(ن)}{ن} = \frac{ن}{ن}$

لوبيتال مرة ثانية / $\lim_{س \to ن} \frac{2جتا(2س)}{1} = 2جتا(ن) = 2 \times 1 = 2$

---

• 2018 دور أول / إذا كان ق'(0) = 4 ، ق(0) = -8 جد قيمة $\lim_{س \to ن} \frac{ق(0+2هـ) - ق(0)}{هـ}$

أ/ -16 ب/ -8 جـ/ 4 د/ 8

الحل / $\lim_{س \to ن} \frac{ق(0+2هـ) - ق(0)}{هـ} = \frac{ق(0) - ق(0)}{ن} = \frac{ن}{ن}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ن} ق'(0+2هـ) \times 2 = 2ق'(0) = 2 \times 4 = 8$

---

• 2019 دور أول / ما قيمة $\lim_{س \to ن} \frac{س + ظاس}{جاس}$

أ/ 2 ب/ 1 جـ/ 0 د/ ن

الحل / $\lim_{س \to ن} \frac{س + ظاس}{جاس} = \frac{ن + ظا(ن)}{جا(ن)} = \frac{ن}{ن}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ن} \frac{1 + قا^2س}{جتاس} = \frac{1 + قا^2(ن)}{جتا(ن)} = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1} = 2$

---

• 2019 دور أول / اذا كان ص = $لو_{هـ} س^6$ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما س = 2

أ/ 12 ب/ 1 جـ/ 0 د/ 3

الحل/ $ص = ٦ لو_{هـ} س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٦ \times \frac{١}{س} \Big|_{س=٢} = ٦ \times \frac{١}{٢} = ٣$

• 2019 دور ثاني/ إذا كان $ق(س) = س لو_{هـ} س + ٣$ ما قيمة $ق'(١)$

أ/ ٢ ب/ ١ ج/ ٠و د/ ٣

الحل/ $ق'(س) = \cancel{س} \times \frac{١}{\cancel{س}} + لو_{هـ} س \Leftarrow ق'(١) = ١ + لو_{هـ}(١) = ١ + صفر = ١$

• 2020 دور أول/ ما قيمة $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س} - س - ١}{س^{٢}}$

أ/ ٢ ب/ -١ ج/ ٠و د/ -٠و

الحل/ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س} - س - ١}{س^{٢}} = \frac{هـ^{٠} - ٠ - ١}{٠} = \frac{١ - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س} - ١}{٢س} = \frac{هـ^{٠} - ١}{٢ \times ٠} = \frac{١ - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

لوبيتال مرة ثانية/ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س}}{٢} = \frac{هـ^{٠}}{٢} = \frac{١}{٢} = ٠و٥$

أ.ميّ حوّاري

• 2020 دور أول/ لتكن $ص = س^{٢} لو_{هـ} س$ ، $س > ٠$ ما قيمة $\frac{دص}{دس} \Big|_{س=هـ} =$

أ/ -٣هـ ب/ $\frac{هـ}{٣}$ ج/ ٣هـ د/ $\frac{هـ}{٣}$

الحل/

$\frac{دص}{دس} = \left(\cancel{س^{٢}} \times \frac{١}{\cancel{س}}\right) + (لو_{هـ} س)(٢س)$

$\frac{دص}{دس} \Big|_{س=هـ} = هـ + ٢هـ لو_{هـ} هـ = هـ + ٢هـ = ٣هـ$

• 2020 دور ثاني/ ما قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٢^{٥}}{س^{٢} - ٢^{٢}}$

أ/ ٨٠ ب/ ٤٠ ج/ ٢٠ د/ ٤

الحل/

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٢^{٥}}{س^{٢} - ٢^{٢}} = \frac{٢^{٥} - ٢^{٥}}{٢^{٢} - ٢^{٢}} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٢} \frac{٥س^{٤}}{٢س} = \frac{٥}{\cancel{٢}} \times \frac{\cancel{٢}^{٤}}{\cancel{٢}} = ٥ \times ٢^{٢} = ٥ \times ٤ = ٢٠$

• 2020 دور ثاني/ اذا كان $ق(س) = س^{٢} - ١٥هـ^{س}$ ما قيمة $ق'(٠)$

أ/ ٢ ب/ -١٣ ج/ هـ د/ ١٧هـ

الحل/ $ق'(س) = ٢س - ١٥هـ^{س} \Leftarrow ق'(س) = ٢ - ١٥هـ^{س}$

$ق'(٠) = ٢ - ١٥هـ^{٠} = ٢ - ١٥ = -١٣$

• 2020 دور ثالث / إذا كان ص = لو$_{هـ}$ (قاس + ظاس) ما قيمة $\frac{دص}{دس}$

أ/ ظاس  ب/ قاس  جـ/ ظتاس  د/ قتاس

الحل/

$$ص' = \frac{قاس ظاس + قاس^2}{(قاس + ظاس)} = \frac{قاس(ظاس + قاس)}{(قاس + ظاس)} = قاس$$

---

• 2022 دور ثاني / ما قيمة $\lim_{س \to 1} \frac{جتا(\frac{\pi}{2}س)}{1 - س}$

أ/ $\frac{2}{\pi}$  ب/ $\frac{\pi}{2}$  جـ/ $\frac{-2}{\pi}$  د/ $\frac{-\pi}{2}$

الحل/

$$\lim_{س \to 1} \frac{جتا(\frac{\pi}{2}س)}{1 - س} = \frac{جتا(\frac{\pi}{2})}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to 1} \frac{-\frac{\pi}{2} جا(\frac{\pi}{2}س)}{-1} = \frac{\pi}{2} جا(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$

---

• 2022 دور ثالث / ما قيمة $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^س - جتاس}{جاس + س}$

أ/ $\frac{1}{2}$  ب/ 1  جـ/ $\frac{-1}{2}$  د/ صفر

الحل/

$$\lim_{س \to 0} \frac{هـ^س - جتاس}{جاس + س} = \frac{هـ^0 - جتا(0)}{جا(0) + 0} = \frac{1 - 1}{0 + 0} = \frac{0}{0}$$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^س + جاس}{جتاس + 1} = \frac{هـ^0 + جا(0)}{جتا(0) + 1} = \frac{1 + 0}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

---

• 2023 دور أول / ما قيمة $\lim_{س \to 0} \frac{جتا(س) - 1}{س^2}$

أ/ $-1$  ب/ $\frac{1}{2}$  جـ/ 1  د/ $\frac{-1}{2}$

الحل/

$$\lim_{س \to 0} \frac{جتا(س) - 1}{س^2} = \frac{جتا(0) - 1}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to 0} \frac{-جاس}{2س} = \frac{-جا(0)}{2 \times 0} = \frac{0}{0}$

لوبيتال مرة ثانية / $\lim_{س \to 0} \frac{-جتا(س)}{2} = \frac{-جتا(0)}{2} = \frac{-1}{2}$

أ.ميّ حوّاري

---

• 2023 دور أول / ليكن ص = لو$_{هـ}$ س حيث هـ العدد النيبري ، ما قيمة $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=2}$

أ/ 12  ب/ 4  جـ/ 16  د/ 3

الحل/ $ص = ٨ لو_{هـ} س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{٨}{س} \Big|_{س=٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$

• 2023 دور ثاني/ ما قيمة $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{٤س} - لو_{هـ}(س+هـ)}{جاس}$

أ/ $٤ - \frac{١}{هـ}$ ب/ $٤ + \frac{١}{هـ}$ ج/ $٤ - هـ$ د/ $٤ + هـ$

الحل/ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{٤س} - لو_{هـ}(س+هـ)}{جاس} = \frac{هـ^{٠} - لو_{هـ}(٠+هـ)}{جا(٠)} = \frac{١ - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٠} \frac{٤هـ^{٤س} - \frac{١}{س+هـ}}{قبا(س)} = \frac{٤هـ^{٠} - \frac{١}{٠+هـ}}{قبا(٠)} = \frac{٤ \times ١ - \frac{١}{هـ}}{١}$

$= ٤ - \frac{١}{هـ}$

• 2024 دور أول/ اذا كان $ق(س) = هـ^{س} + س^{٢} - ٧$ ما قيمة/قيم س التي تجعل $ق''(س) = ق(س)$

أ/ ٠ ب/ $\pm ٣$ ج/ ٩ د/ $\pm\sqrt{٥}$

الحل/ $ق'(س) = هـ^{س} + ٢س \Leftarrow ق''(س) = هـ^{س} + ٢$

$ق''(س) = ق(س) \Leftarrow هـ^{س} + ٢ = هـ^{س} + س^{٢} - ٧ \Leftarrow ٢ = س^{٢} - ٧ \Leftarrow ٩ = س^{٢}$

$+٧ \quad +٧$

$\pm\sqrt{٩} = \sqrt{س^{٢}} \Leftarrow \pm ٣ = س$

أ.ميّ حوّاري

• 2024 دور ثالث/ اذا كان $ق(س)$ اقتران متصلاً وقابلاً للاشتقاق وكان $ق'(١) = ٢$

$\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - أس}{س - ١} = ٣$ ، ما قيمة أ

أ/ $-١$ ب/ ١ ج/ ٢ د/ ٥

الحل/ $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - أس}{س - ١} = \frac{ق(١) - أ}{١ - ١} = \frac{ق(١) - أ}{٠}$

بما أن النهاية موجودة والمقام = ٠ ⇐ البسط = ٠ ⇐ $ق(١) - أ = ٠ \Leftarrow ق(١) = أ$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ١} ق'(س) - أ = ق'(١) - أ = ٣ \Leftarrow ٢ - أ = ٣ \Leftarrow ٢ - ٣ = أ$

$\Leftarrow -١ = أ$

• 2025 دور أول/ ما قيمة $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{جاس} - ١}{لو_{هـ}(س+١)}$

أ/ ١ ب/ هـ ج/ $هـ + ١$ د/ $هـ - ١$

الحل/ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{جاس} - ١}{لو_{هـ}(س+١)} = \frac{هـ^{جا(٠)} - ١}{لو_{هـ} ١} = \frac{هـ^{٠} - ١}{٠} = \frac{١ - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{جاس} \times قباس}{\frac{١}{س+١}} = \frac{هـ^{جا(٠)} \times قبا(٠)}{\frac{١}{٠+١}} = هـ^{٠} \times ١ = ١ \times ١ = ١$

• 2025 دور أول / إذا كان $ص = هـ^{\sqrt{أ}س}$ وكان $ص' = ص$ ما قيمة الثابت أ

أ/ $-1$ ب/ $1$ ج/ $-\frac{1}{2}$ د/ $\frac{1}{2}$

الحل/ $ص' = هـ^{\sqrt{أ}س} \times \sqrt{أ} \Leftarrow \cancel{هـ^{\sqrt{أ}س}} = \sqrt{أ} \times \cancel{هـ^{\sqrt{أ}س}}$ ، $هـ^{\sqrt{أ}س} \neq 0$ ∴

$\Leftarrow (\sqrt{أ} = 1)^2 \Leftarrow أ = 1$

أ.مي حواري

• 2025 دور أول / اذا كان $ص = س\,لو_{هـ}س$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = هـ$

أ/ $\frac{1}{2}$ ب/ $-\frac{1}{2}$ ج/ $1$ د/ $2$

الحل/ $ص' = \cancel{س \times \frac{1}{س}} + لو_{هـ}س$

$ص'|_{س=هـ} = 1 + لو_{هـ}هـ = 1 + 1 = 2$

• 2025 دور أول / إذا كان $ق(س) = هـ^{3س} + لو_{هـ}(2س+2)$ ما قيمة $ق'(0)$

أ/ $4$ ب/ $-4$ ج/ $-\frac{1}{4}$ د/ $0$

الحل/ $ق'(س) = 3هـ^{3س} + \frac{2}{2س+2} \Leftarrow ق'(0) = 3هـ^{0} + \frac{2}{0+2} = 3 + \frac{2}{2} = 3 + 1 = 4$

• 2025 دور ثاني / ما قيمة $\lim_{س \to 1} \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - 1}$

أ/ $-1$ ب/ $1$ ج/ $-\frac{1}{2}$ د/ $\frac{1}{2}$

الحل/ $\lim_{س \to 1} \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - 1} = \frac{1 - \sqrt{1}}{\sqrt{1} - 1} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to 1} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{س}}}{\frac{1}{2\sqrt{س}}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

• 2025 جنوب نابلس / إذا كان $ق(س) = أس^2 + س$ ، ما قيمة الثابت أ حيث

$\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 4س}{ق(2) - ق(س)} = 8$

أ/ $0$ ب/ $-0.5$ ج/ صفر د/ $1$

الحل/ $\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 4س}{ق(2) - ق(س)} = \frac{2^3 - 4 \times 2}{ق(2) - ق(2)} = \frac{8 - 8}{0} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to 2} \frac{3س^2 - 4}{-ق'(س)} = \frac{3 \times 2^2 - 4}{-ق'(2)} = 8 \Leftarrow \frac{12 - 4}{-ق'(2)} = 8$

$\Leftarrow ق'(2) = -1$

$ق(س) = أس^2 + س \Leftarrow ق'(س) = 2أس + 1 \Leftarrow ق'(2) = 4أ + 1 = -1 \Leftarrow 4أ = -2$

$\Leftarrow أ = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

• 2025 شمال الخليل / إذا كان $ق(س) = ظا(٢س)$ ، ما قيمة $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(هـ+\pi) - ق(\pi)}{هـ}$

أ/ -٢ ب/ ٢ ج/ ٠ د/ غير موجودة

الحل/ $ق'(س) = قا^٢(٢س) \times ٢$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(\pi+هـ) - ق(\pi)}{هـ} = \frac{ق(\pi) - ق(\pi)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{هـ \to ٠} ق'(\pi+هـ) = ق'(\pi) = ٢قا^٢(٢\pi) = \frac{٢}{قتا^٢(٢\pi)} = \frac{٢}{١} = ٢$

---

• خارجي / إذا كان $ق(س) = هـ^{جاس} + لو_{هـ}(س^٢+١) - جا(\pi)$ ما قيمة $ق(٠)ق'(٠)$

أ/ صفر ب/ هـ ج/ ١+هـ د/ ١

الحل/

$ق(س) = هـ^{جاس} + ٢لو_{هـ}(س^٢+١) - ٠$

$ق(٠) = هـ^{جا(٠)} + ٢لو_{هـ}(١) = هـ^{٠} + ٢ \times ٠ = ١$

$ق'(س) = هـ^{جاس} \times جتاس + ٢ \times \frac{٢س}{س^٢+١} \Leftarrow ق'(٠) = هـ^{جا(٠)} جتا(٠) + \frac{٤ \times ٠}{١}$

$\Leftarrow ق'(٠) = هـ^{٠} \times ١ + ٠ = ١ \times ١ = ١$

$ق(٠)ق'(٠) = ١ \times ١ = ١$

أ.ميّ حوّاري

---

• خارجي / إذا كان $ق(س) = هـ^{لو_{هـ}(س^٢+ج)} - هـ^{٢س-٦}$ فإن $ق'(٣)$

أ/ ٨ ب/ ٧ ج/ ٥ د/ ٤

الحل/ $ق(س) = س^٢ + ج - هـ^{٢س-٦}$

$ق'(س) = ٢س - هـ^{٢س-٦} \times ٢$

$ق'(٣) = ٢ \times ٣ - ٢هـ^{٢ \times ٣ - ٦} = ٦ - ٢هـ^{٦-٦} = ٦ - ٢هـ^{٠} = ٦ - ٢ = ٤$

---

• خارجي / إذا كان $ق(س)$ اقتران كثير حدود وكانت $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ١}{س - ١} = ٦$ ما قيمة $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - س}{لو_{هـ} س}$

أ/ صفر ب/ ٥ ج/ ٦ د/ ٧

الحل/ $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ١}{س - ١} = \frac{ق(١) - ١}{١ - ١} = \frac{ق(١) - ١}{٠}$

بما أن المقام = ٠ ، والنهاية موجودة $\Leftarrow$ البسط = ٠ $\Leftarrow ق(١) - ١ = ٠ \Leftarrow ق(١) = ١$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ١} ق'(س) = ق'(١) = ٦$

المطلوب / $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - س}{لو_{هـ} س} = \frac{ق(١) - ١}{لو_{هـ} ١} = \frac{١ - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س\to 1} \frac{ق(س)-1}{س-1} = \frac{ق(1)-1}{1} = 6-1=5$

---

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة الآتية :

• 2019 دورثالث / ما قيمة $\lim_{س\to ٠} \frac{س-جاس}{س^٣}$

الحل / $\lim_{س\to ٠} \frac{س-جاس}{س^٣} = \frac{٠-حا(٠)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س\to ٠} \frac{١-جتاس}{٣س^٢} = \frac{١-جتا(٠)}{٠\times ٢} = \frac{١-١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س\to ٠} \frac{-حاس}{٢} = \frac{حا(٠)}{٢} = \frac{١}{٢}$

أ.ميّ حوّاري

---

• 2020 دورأول / أوجد $\frac{ك}{كس}(هـ^{س^٣} \times لو_هـ س^٢)$ ، $س > ٠$

الحل /

$\frac{ك}{كس}(هـ^{س^٣} \times ٢لو_هـ س) = هـ^{س^٣} \times \frac{٢}{س} + (٢لو_هـ س) \times هـ^{س^٣} \times ٣س^٢$ اضرب $هـ^{س^٣}$ عامل مشترك

$= هـ^{س^٣}(\frac{٢}{س^٢} + ٣س^٢ لو_هـ س^٢)$

---

• 2020 دورأول / اذا كان $ص = (١+٣س)هـ^{٣س}$ أثبت أن $ص'' - ٦ص' + ٩ص = ٠$

الحل / $ص' = (١+٣س)هـ^{٣س} \times ٣ + هـ^{٣س} \times ٣$ " اضرب $هـ^{٣س}$ عامل مشترك "

$ص' = هـ^{٣س}(٣(١+٣س)+٣) = هـ^{٣س}(٦+٩س+٣)$

$\Leftarrow ص' = هـ^{٣س}(٩+٩س)$

$ص'' = هـ^{٣س} \times ٩ + (٩+٩س)هـ^{٣س} \times ٣$ " اضرب $هـ^{٣س}$ عامل مشترك "

$ص'' = هـ^{٣س}(٩+٣(٩+٩س)) = هـ^{٣س}(٩+٢٧+٢٧س) = هـ^{٣س}(٣٦+٢٧س)$

الطرف الأيسر / $ص'' - ٦ص' + ٩ص = هـ^{٣س}(٣٦+٢٧س) - ٦هـ^{٣س}(٩+٩س) + ٩هـ^{٣س}(١+٣س)$

$= هـ^{٣س}(٣٦+٢٧س - ٦(٩+٩س) + ٩(١+٣س))$

$= هـ^{٣س}(٣٦+٢٧س - ٥٤ - ٥٤س + ٩ + ٢٧س)$

$= هـ^{٣س}((٣٦-٥٤+٩) + (٢٧س-٥٤س+٢٧س))$

$= هـ^{٣س} \times ٠ = ٠$ ✓

---

• 2021 دورأول / ما قيمة $\lim_{س\to ٠} \frac{١-جتاس}{س جاس}$ باستخدام قاعدة لوبيتال

الحل / $\lim_{س\to ٠} \frac{١-جتاس}{س جاس} = \frac{١-جتا(٠)}{٠ \times حا(٠)} = \frac{١-١}{٠\times ٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ٠} \frac{-جاس}{س جتاس + جاس} = \frac{جا(٠)}{٠ جتا(٠) + جا(٠)} = \frac{٠}{٠}$

لوبيتال مرة ثانية / $\lim_{س \to ٠} \frac{جتاس}{س \times -جاس + جتاس \times ١ + جتاس} = \frac{جتا(٠)}{٠ + جتا(٠) + جتا(٠)} = \frac{١}{١+١}$

$= \frac{١}{٢}$

---

• 2021 دور ثاني / ما قيمة $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س^٢} - هـ^{س}}{٤س}$ ، باستخدام قاعدة لوبيتال .

الحل / $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س^٢} - هـ^{س}}{٤س} = \frac{هـ^{٠} - هـ^{٠}}{٤ \times ٠} = \frac{١-١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س^٢} \times ٢س - هـ^{س}}{٤} = \frac{هـ^{٠} \times ٢ \times ٠ - هـ^{٠}}{٤} = \frac{٠-١}{٤} = \frac{-١}{٤}$

---

• 2022 دور أول / جد $\lim_{س \to ٠} \frac{لو_{هـ}(س+١)}{هـ^{-س} - ١}$

أ.ميّ حوّاري

الحل / $\lim_{س \to ٠} \frac{لو_{هـ}(س+١)}{هـ^{-س} - ١} = \frac{لو_{هـ} ١}{هـ^{٠} - ١} = \frac{٠}{١-١} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{س+١}}{هـ^{-س} \times -١} = \frac{\frac{١}{١}}{-هـ^{٠}} = \frac{١}{-١} = -١$

---

• 2022 دور ثاني / إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٨}{س - ٢} = ٥$ ، ما قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{س ق(س) - ١٦}$

الحل / * $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٨}{س - ٢} = \frac{ق(٢) - ٨}{٢ - ٢} = \frac{ق(٢) - ٨}{٠}$

بما أن المقام = ٠ والنهاية موجودة ⇐ البسط = ٠ ⇐ ق(٢) - ٨ = ٠ ⇐ ق(٢) = ٨

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ٢} \frac{قَ(س)}{١} = قَ(٢) = ٥$

* المطلوب / $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{س ق(س) - ١٦} = \frac{٤ - ٤}{٢ق(٢) - ١٦} = \frac{٠}{٢ \times ٨ - ١٦} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ٢} \frac{٢}{س قَ(س) + ق(س)} = \frac{٢}{٢قَ(٢) + ق(٢)} = \frac{٢}{٢(٥) + ٨} = \frac{٢}{١٠ + ٨}$

$= \frac{٢}{١٨} = \frac{١}{٩}$

---

• 2023 دور ثاني/ إذا كان $ق(س) = ٢هـ^{٢س} - \frac{٢}{هـ^{٢س}}$ بين أن

$ق''(س) - ٤ق(س) + ق'(٠) = ٨$

الحل/ $ق(س) = ٢هـ^{٢س} - ٢هـ^{-٢س}$

$ق'(س) = ٢هـ^{٢س} \times ٢ - ٢هـ^{-٢س} \times -٢ \Leftarrow ق'(س) = ٤هـ^{٢س} + ٤هـ^{-٢س}$

$ق''(س) = ٤هـ^{٢س} \times ٢ + ٤هـ^{-٢س} \times -٢ = ٨هـ^{٢س} - ٨هـ^{-٢س}$

الطرف الأيمن/ $ق''(س) - ٤ق(س) + ق'(٠)$

$= ٨هـ^{٢س} - ٨هـ^{-٢س} - ٤(٢هـ^{٢س} - ٢هـ^{-٢س}) + (٤هـ^{٠} + ٤هـ^{٠})$

$= \cancel{٨هـ^{٢س}} - \cancel{٨هـ^{-٢س}} - \cancel{٨هـ^{٢س}} + \cancel{٨هـ^{-٢س}} + (٤+٤) = (٤+٤) = ٨$ #

---

• 2024 دور أول/ اذا كان $ق(٠) = ٠$ ، $ق'(٠) = ٧$ جد: $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{ق(س)} - هـ^{س}}{٢لو_{هـ}(س+١) - س}$

الحل/ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{ق(س)} - هـ^{س}}{٢لو_{هـ}(س+١) - س} = \frac{هـ^{ق(٠)} - هـ^{٠}}{٢لو_{هـ}١ - ٠} = \frac{هـ^{٠} - ١}{٠ - ٠} = \frac{١-١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{ق(س)} \times ق'(س) - هـ^{س}}{\frac{٢}{س+١} - ١} = \frac{هـ^{ق(٠)} ق'(٠) - هـ^{٠}}{\frac{٢}{١} - ١} = \frac{هـ^{٠} \times ٧ - ١}{٢ - ١}$

$= \frac{٧-١}{١} = ٦$

---

• 2024 دور ثاني/ إذا كان $ل(س)$ متصل على ح وكان $ق(س) = س\,ل(س)$ جد $ق'(١)$ علماً بأن $\lim_{س \to ١} \frac{ل(س)}{س^{٣} - ١} = ٤$

الحل/ $\lim_{س \to ١} \frac{ل(س)}{س^{٣} - ١} = \frac{ل(١)}{١ - ١} = \frac{ل(١)}{٠}$

بما أن المقام = ٠ ، والنهاية موجودة اذن البسط = ٠ $\Leftarrow ل(١) = ٠$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ١} \frac{ل'(س)}{٣س^{٢}} = \frac{ل'(١)}{٣} = ٤ \Leftarrow ل'(١) = ١٢$

* $ق(س) = س \times ل(س)$

$ق'(س) = س\,ل'(س) + ل(س) \times ١$

$ق'(١) = ل'(١) + ل(١) = ١٢ + ٠ = ١٢$

أ.ميّ حوّاري

---

• 2025 دور أول/ إذا كان $ص = لو_{هـ}(قاس + ظاس)$ ، أثبت أن $(ص')^{٢} + ص'' = قاس \times هـ^{ص}$

الحل/ $ص' = \frac{قاس\,ظاس + قا^{٢}س}{قاس + ظاس} = \frac{قاس(ظاس + قاس)}{(قاس + ظاس)} = قاس$

$ص'' = قاس\,ظاس$ .

$(\text{ص}')^2 + \text{ص}'' = (\text{قاس})^2 + \text{قاس ظاس} = \text{قا}^2\text{س} + \text{قاس ظاس}$ باخراج قاس عامل مشترك

$= \text{قاس}(\text{قاس} + \text{ظاس})$

$= \text{قاس} \times \text{هـ}^{\text{ص}}$ #

• ملاحظة / $\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{قاس} + \text{ظاس}) = \text{ص} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{قاس} + \text{ظاس}$

---

• 2025 جنوب نابلس / إذا كان $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^2 + \text{ق(س)}}{(\text{س}-1)^2} = 7$ أجد قاعدة ق(س) حيث ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية.

الحل $\text{ق(س)} = \text{أس}^2 + \text{بس} + \text{جـ}$ ، $\text{أ} \neq 0$ ، أ، ب، جـ $\in$ ح

$\Leftarrow \text{س}^2 + \text{ق(س)} = (\text{س}^2 + \text{أس}^2) + \text{بس} + \text{جـ} = \text{س}^2(1+\text{أ}) + \text{بس} + \text{جـ}$

$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^2(1+\text{أ}) + \text{بس} + \text{جـ}}{(\text{س}-1)^2} = 7$

أ.مي حواري

$\lim_{\text{س}\to 1} \frac{(1+\text{أ})\text{س}^2 + \text{بس} + \text{جـ}}{(\text{س}-1)^2} = \frac{(1+\text{أ}) + \text{ب} + \text{جـ}}{(1-1)^2} = \frac{1+\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{0}$

بما أن المقام = 0 والنهاية موجودة ⇐ البسط = 0 ⇐ $\underset{-1}{1} + \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} = \underset{-1}{0}$ ⇐ $\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} = -1$ معادلة (1)

باستخدام لوبيتال /

$\lim_{\text{س}\to 1} \frac{2(1+\text{أ})\text{س} + \text{ب}}{2(\text{س}-1)} = \frac{2(1+\text{أ}) + \text{ب}}{2(1-1)} = \frac{2(1+\text{أ}) + \text{ب}}{0}$

المقام = 0 ، والنهاية موجودة ⇐ البسط = 0 ⇐ $2(1+\text{أ}) + \text{ب} = 0$

$\underset{-2}{2} + 2\text{أ} + \text{ب} = \underset{-2}{0}$ ⇐ $2\text{أ} + \text{ب} = -2$ معادلة (2)

لوبيتال مرة ثانية / $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\cancel{2}(1+\text{أ})}{\cancel{2}} = 1 + \text{أ} = 7$ ⇐ $\text{أ} = 6$ نعوضها في معادلة (2)

⇐ $2\text{أ} + \text{ب} = -2$ ⇐ $2 \times 6 + \text{ب} = -2$ ⇐ $\text{ب} = -2 - 12$ ⇐ $\text{ب} = -14$

نعوض (أ، ب) في معادلة (1) /

$\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} = -1$ ⇐ $6 - 14 + \text{جـ} = -1$ ⇐ $-8 + \text{جـ} = -1$ ⇐ $\text{جـ} = 7$

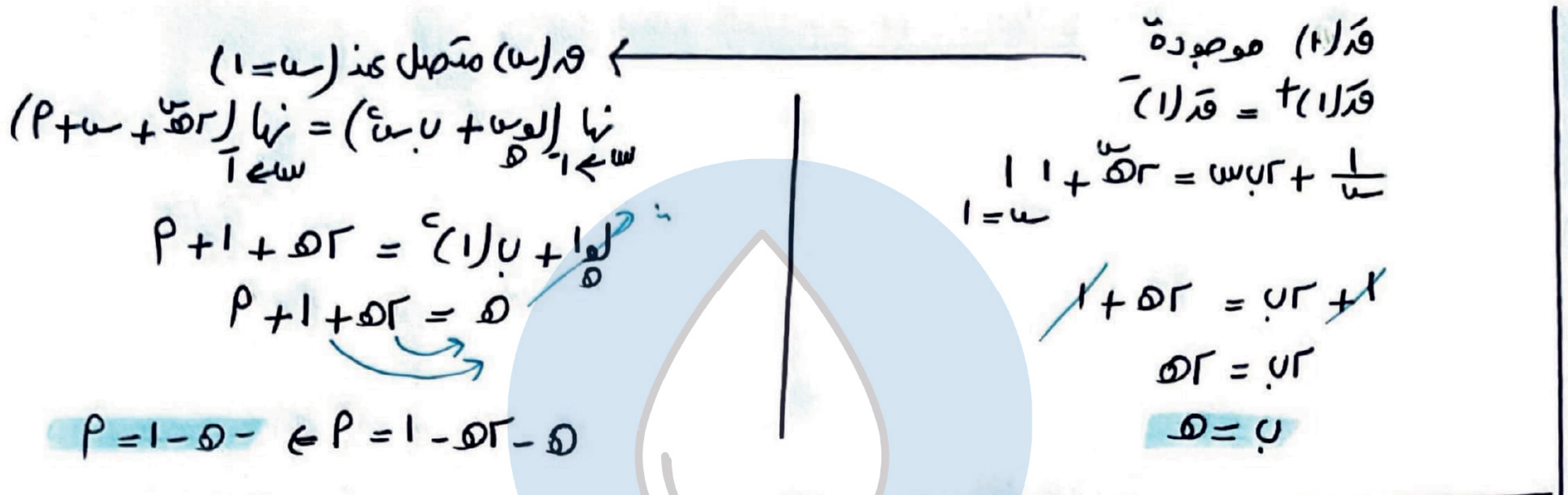
⇐ $\text{ق(س)} = 6\text{س}^2 + -14\text{س} + 7$

---

• 2025 جنوب نابلس / إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} 2\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} + \text{أ} & ، \text{س} \leq 0 \\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{بس}^2 & ، 1 \leq \text{س} \leq 3 \end{cases}$ وكان

ق(س) قابلاً للاشتقاق على ]0، 3[ ما قيمة الثابتين أ، ب

الحل / ق(س) قابلاً للاشتقاق على ]0، 3[ ⇐ ق(س) قابلاً للاشتقاق عند (س = 1).



قَ(١) موجودة

قَ(١)$^+$ = قَ(١)$^-$

$\frac{1}{س} + ٢ب س = ٢هـ^{س} + ١$ ، س = ١

$\cancel{١} + ٢ب = ٢هـ + \cancel{١}$

$٢ب = ٢هـ$

$ب = هـ$

ق(س) متصل عند (س = ١)

$\lim_{س \to ١^-} (لو_{هـ} س + ب س^٢) = \lim_{س \to ١^-} (٢هـ^{س} + س + أ)$

$لو_{هـ} ١ + ب(١)^٢ = ٢هـ + ١ + أ$

$هـ = ٢هـ + ١ + أ$

$هـ - ٢هـ - ١ = أ \Leftarrow -هـ - ١ = أ$

• 2025 سلفيت / اذا كان ص = (١ + ٢س) هـ$^{٣س}$ أثبت أن صً − ٦صَ + ٩ص = ٠

• مكرر (2020 دور أول) #

أ.مي حواري

## هناك لذّة خفيّة..

قد لا يُدركها كثير من النّاس، وهي لذّة التَّرك، أن تَترُك شهوة وأنت قادر عليها، متمكّن منها، لكنّك تتركها راغبًا بغاية أعظم! وهذا التَّرك = تربية، تُربّي نفسك على ألاّ تكون متاحًا لكلّ شيء، ألاّ تُساق خلف شهوة عابرة ولحظة غابرة، قد تشتهي وتحترق دواخلك؛ لكنّك تُخبّئ في ذاتك معنًى أسمى وأبعد من مجرّد لُقمة، مشهد، تصفُّح، لذّة، أو أيّ صغير يَعظُم بالتّراكُم، تحتاج إلى شِدَّةٍ تؤدِّب فيها خُطاك، حتّى لا تَميل

# الدرس الخامس | تطبيقات هندسية وفيزيائية

## القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة

• 2017 دور أول / إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند (٢، ٥) يساوي $\frac{1}{4}$ فإن معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند نفس النقطة هو:

أ/ ص = ٤س + ٣ ب/ ص = -٤س + ١٣ ج/ ٤ص = س + ١٨

د/ ٤ص = س + ٢٢

الحل/ ميل العمودي = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}}$ = -٤

م = -٤ (س١، ص١) = (٢، ٥)

معادلة العمودي/ ص - ص١ = م(س - س١) ⇐ ص - ٥ = -٤(س - ٢) ⇐ ص - ٥ = -٤س + ٨

+٥ +٥

⇐ ص = -٤س + ١٣

---

• 2018 دور أول / أطلق جسم رأسياً لأعلى من نقطة على سطح الأرض حسب العلاقة ف = ٢٤ن - ٤ن²

ف: الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، جد أقصى ارتفاع يصله الجسم عن سطح الأرض:

أ/ ٧٢م ب/ ٣٦م ج/ ٢٣م د/ ١٦م

الحل/ ف = ٢٤ن - ٤ن²

ع = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٢٤ - ٨ن = ٠ ⇐ $\frac{24}{8}$ = $\frac{8}{8}$ن ⇐ ٣ث = ن "زمن الوصول لأقصى ارتفاع"

أقصى ارتفاع = ف(٣) = ٢٤×٣ - ٤×٣² = ٧٢ - ٣٦ = ٣٦م

---

• 2019 دور ثالث / يتحرك جسم في خط مستقيم حيث أن بعده ف عن نقطة الأصل بالأمتار بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة ف = ن³ + ن، ما تسارع الجسم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

أ/ ٦م/ث² ب/ ٧م/ث² ج/ ١٢م/ث² د/ ١٣م/ث²

الحل/ ف = ن³ + ن ⇐ ع = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٣ن² + ١ ⇐ ت = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٦ن

ت(٢) = ٦×٢ = ١٢م/ث²

أ.ميّ حوّاري

---

• 2020 دور أول / إذا كان المستقيم ص = $\frac{9}{2}$ - $\frac{1}{2}$س عمودياً على منحنى ق(س) = أس² - ٤س + ٥ عند س = ١، ما قيمة الثابت أ

أ/ -١ ب/ ٧ ج/ ٢ د/ ٣

الحل/ ص = $\frac{9}{2}$ - $\frac{1}{2}$س ⇐ ص' = $\frac{-1}{2}$ = ميل العمودي عند (س = ١)

⇐ ميل المماس = $\frac{-1}{\text{ميل العمودي}}$ = ٢

ق'(س) = ٢أس - ٤ ⇐ ميل المماس = ق'(١) = ٢أ - ٤ ⇐ ٢ = ٢أ - ٤

$\frac{6}{2}$ = $\frac{2}{2}$أ ⇐ ٣ = أ

• 2020 دور ثالث/ إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند (٣، ٠) هي ٢س − ٣ص = ٦ ما قيمة قَ(٣)

أ/ $\frac{٣}{٢}$ ب/ $-\frac{٣}{٢}$ ج/ $\frac{٢}{٣}$ د/ $-\frac{٢}{٣}$

الحل/ معادلة العمودي ٢س − ٣ص = ٦ ⇐ ٢ − ٣صَ = ٠ ⇐ $\frac{٢}{٣} = \frac{٣}{٣}$ صَ ⇐ $\frac{٢}{٣}$ = صَ = ميل العمودي

ميل المماس = قَ(٣) = $\frac{-١}{\text{ميل العمودي}} = -\frac{٣}{٢}$

---

• 2021 دور أول/ اذا كان ق(س) = $\frac{ل(س)}{س^٢+٢}$ وكان المماس لمنحنى ل(س) عند النقطة (−١، ٢) أفقياً، ما قيمة قَ(٢)

أ/ $-\frac{٤}{٩}$ ب/ $-\frac{١}{٩}$ ج/ $\frac{٤}{٩}$ د/ $\frac{٧}{٩}$

الحل/ المماس لمنحنى ل(س) عند (−١، ٢) أفقياً ← ل(−١) = ٢

← لَ(−١) = ٠ "أفقي"

أ.ميّ حوّاري

ق(س) = $\frac{ل(س)}{س^٢+٢}$ ⇐ قَ(س) = $\frac{(س^٢+٢)\,لَ(س) - ل(س)(٢س)}{(س^٢+٢)^٢}$

قَ(−١) = $\frac{((-١)^٢+٢)\,لَ(-١) - ل(-١)\times٢\times-١}{((-١)^٢+٢)^٢} = \frac{-٢\times-٢}{٣^٢} = \frac{٤}{٩}$

---

• 2022 دور أول/ تحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ن² − ٨ن + ١٨ ما السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [٤، ٥]

أ/ ٢م/ث ب/ ١م/ث ج/ −١م/ث د/ −٢م/ث

الحل/ السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٥) - ف(٤)}{٥ - ٤} = (٥^٢ - ٨\times٥ + ١٨) - (٤^٢ - ٨\times٤ + ١٨)$

= (٢٥ − ٤٠ + ١٨) − (١٦ − ٣٢ + ١٨) = (−١٥ + ١٨) − (−١٦ + ١٨)

= ٣ − ٢ = ١م/ث

---

• 2022 دور أول/ إذا كان المستقيم ص = −٣س + جـ يمس منحنى ق(س) = −٢س² + ٥س ما قيمة الثابت جـ:

أ/ −٤ ب/ ٢ ج/ ٤ د/ ٨

الحل/ نفرض نقطة التماس (س، ق(س))

قَ(س) = −٤س + ٥ = ميل المنحنى عند (س، ق(س))

ص = −٣س + جـ ⇐ صَ = −٣ = ميل المماس

⇐ −٣ = −٤س + ٥ ⇐ −٨ = −٤س ⇐ ٢ = س

ق(٢) = −٢×٤ + ٥×٢ = +١٠ + −٨ = ٢ ⇐ (٢، ٢) نقطة التماس

(٢، ٢) ∈ للمماس ⇐ ٢ = −٣×٢ + جـ ⇐ ٢ + ٦ = جـ ⇐ ٨ = جـ

• 2022 دور ثاني / ما ميل المماس لمنحنى ص = لو$_{هـ}$ س$^{٢}$ عند النقطة (هـ، ٢)

أ/ $\frac{٢}{هـ}$ ب/ $\frac{٢}{٤}$ ج/ $\frac{١}{هـ}$ د/ $\frac{٧}{٩}$

الحل/

ص = لو$_{هـ}$ س$^{٢}$ ⇐ ص = ٢ لو$_{هـ}$ س ⇐ ص' = $\frac{٢}{س}$

ميل المماس = ص' $|_{س=هـ}$ = $\frac{٢}{هـ}$

أ.مي حواري

---

• 2022 دور ثالث / قذف جسم رأسيًا لأعلى من سطح الأرض بحيث يتحدد بعده عن سطح الأرض بالعلاقة ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن$^{٢}$ ، حيث ف(ن) تمثل ارتفاع الجسم بالأمتار بعد ن ثانية ما أقصى ارتفاع يصله الجسم ؟

أ/ ٧٠ ب/ ١٥ ج/ ٢٠ د/ ٤٠

الحل/ ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن$^{٢}$

ع(ن) = $\frac{دف}{دن}$ = ٢٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ٢٠ = ١٠ن ⇐ ٢ث = ن «زمن الوصول لأقصى ارتفاع»

أقصى ارتفاع = ف(٢) = ٢٠ × ٢ − ٥ × ٢$^{٢}$ = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠م

---

• 2022 دور ثالث / اذا كان ق(س) = س$^{٢}$ − ٤س + ٥ ، ما معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند س = ٣

أ/ ص − ٢س = ٦ ب/ ٢ص + س − ٧ = ٠ ج/ ٢ص + س + ٧ = ٠

د/ ٢ص + س + ١ = ٠

الحل/ ق(٣) = ٣$^{٢}$ − ٤ × ٣ + ٥ = ٩ − ١٢ + ٥ = −٣ + ٥ = ٢ ⇐ (٣، ٢) نقطة التماس

ق'(س) = ٢س − ٤ ⇐ ق'(٣) = ٢ × ٣ − ٤ = ٢ = ميل المماس

⇐ ميل العمودي = $\frac{-١}{ميل المماس}$ = $\frac{-١}{٢}$

معادلة العمودي/ ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$) ⇐ ص − ٢ = $\frac{-١}{٢}$(س − ٣)

٢ص − ٤ = −س + ٣ ⇐ ٢ص + س − ٧ = ٠

---

• 2023 دور ثاني / يتحرك جسم على خط مستقيم ، وفق العلاقة ف(ن) = ن$^{٣}$ − ٣ن$^{٢}$ + ٥ن + ٦ حيث ف بعده بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، ما سرعة الجسم عندما ينعدم التسارع :

أ/ ٣م/ث ب/ ٢م/ث ج/ ٩م/ث د/ ٢٥م/ث

الحل/ ينعدم التسارع ⇐ ت(ن) = ٠

ف = ن$^{٣}$ − ٣ن$^{٢}$ + ٥ن + ٦ ⇐ ع = $\frac{دف}{دن}$ = ٣ن$^{٢}$ − ٦ن + ٥ ⇐ ت = $\frac{دع}{دن}$ = ٦ن − ٦ = ٠

⇐ ٦ن = ٦ ⇐ ن = ١ث «زمن انعدام التسارع»

ع(١) = ٣(١)$^{٢}$ − ٦(١) + ٥ = ٣ − ٦ + ٥ = ٢م/ث

• 2024 دور أول/ إذا كان لمنحنيين ق(س) = أس² + ١ ، هـ(س) = ٢س² + ب س مماسًا مشتركًا عند (س = ١) ، ما قيمة الثابتين أ ، ب على الترتيب:

أ/ ٣ ، ٢ ب/ ٣ ، ٤ ج/ ٢ ، ٥ د/ ١ ، ٢

الحل/ لـ ق ، هـ مماسًا مشتركًا عند س = ١ ← ق(١) = هـ(١) ، قَ(١) = هـَ(١)

* ق(١) = هـ(١) ⇐ أ(١)² + ١ = ٢(١)² + ب(١) ⇐ أ + ١ = ٢ + ب ⇐ أ − ب = ١ ـــ (١)

* قَ(س) = ٢أس ⇐ قَ(١) = ٢أ

هـَ(س) = ٤س + ب ⇐ هـَ(١) = ٤ + ب

قَ(١) = هـَ(١) ⇐ ٢أ = ٤ + ب ⇐ ٢أ − ب = ٤ ـــ (٢)

بطرح (٢) − (١) / أ = ٣ نعوضها في (١) ⇐ ٣ − ب = ١ ⇐ ب = ٣ − ١ = ٢

(أ ، ب) = (٣ ، ٢)

---

• 2025 دور أول/ اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{2}$] عند النقطة أ(س ، ص) أفقيًا ، جد احداثيات نقطة التماس

أ/ ($\frac{\pi}{2}$ ، ٠) ب/ ($\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$) ج/ ($\frac{\pi}{4}$ ، $\sqrt{2}$) د/ ($\frac{\pi}{4}$ ، ٠)

الحل/ قَ(س) = جتاس − جاس

المماس أفقي ⇐ ميله = ٠ ⇐ جتاس − جاس = ٠ ⇐ $\frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

⇐ ١ = ظاس ⇐ س = $\frac{\pi}{4}$ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[

ق($\frac{\pi}{4}$) = جا($\frac{\pi}{4}$) + جتا($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

⇐ نقطة التماس = ($\frac{\pi}{4}$ ، $\sqrt{2}$)

أ.ميّ حوّاري

---

• 2025 دور ثاني/ إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) = س² + س − ٢ عند النقطة أ(س ، ص) يساوي (٧) ، جد احداثيات النقطة التماس

أ/ (−٣ ، −١٠) ب/ (٣ ، ١٠) ج/ (١٠ ، ٣) د/ (١ ، ٣)

الحل/ قَ(س) = ٢س + ١ ⇐ ميل المماس = ٢س + ١ = ٧ ⇐ $\frac{2}{2}$س = $\frac{6}{2}$ ⇐ س = ٣

ق(٣) = ٣² + ٣ − ٢ = ٩ + ١ = ١٠ ⇐ (٣ ، ١٠) نقطة التماس

---

• 2025 شمال الخليل/ يتحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^جـ وكان تسارعه بعد ثانيتين يساوي أربعة أمثال تسارعه بعد ثانية واحدة ما قيمة الثابت جـ ، جـ > ١

أ/ ٢ ب/ ٣ ج/ ٤ د/ ٥

الحل/ ف = ن^جـ ⇐ ع = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = جـ ن^(جـ−١) ⇐ ت = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = جـ(جـ−١) ن^(جـ−٢)

$\text{ت}(٢) = ٤\,\text{ت}(١) \Leftarrow \cancel{\text{ج}}(\cancel{\text{ج}}-١)(٢)^{\text{ج}-٢} = ٤\cancel{\text{ج}}(\cancel{\text{ج}}-١)(١)^{\text{ج}-٢}$ ، ج ≠ ٠ ، ج ≠ ١

$\Leftarrow (٢)^{\text{ج}-٢} = ٤ \Leftarrow ٢^{\text{ج}-٢} = ٢^{٢}$ «إذا تساوت الأساسات ← الأسس متساوية»

$\Leftarrow \text{ج}-٢ = ٢ \Leftarrow \text{ج} = ٤$

---

• خارجي / إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند (س = ٢) هي $\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س} + ٣$ ما قيمة $\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق(س)} - ٤}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}$

أ/ $\frac{١}{١٠}$ ب/ $-\frac{١}{١٠}$ ج/ $-\frac{٢}{٥}$ د/ $\frac{٢}{٥}$

الحل/ (٢، ق(٢)) ∈ للعمودي ⇐ $\text{ق}(٢) = \frac{١}{٢}\times ٢ + ٣ = ١ + ٣ = ٤$

$\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س} + ٣ \Leftarrow \text{ص}' = \frac{١}{٢} =$ ميل العمودي

$\Leftarrow$ ميل المماس $= \frac{-١}{\text{ميل العمودي}} = -٢ = \text{ق}'(٢)$

$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق(س)} - ٤}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦} = \frac{\text{ق}(٢) - ٤}{٢^٢ + ٢ - ٦} = \frac{٤ - ٤}{٦ - ٦} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}}$

أ.ميّ حوّاري

باستخدام لوبيتال / $\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق}'(\text{س})}{٢\text{س} + ١} = \frac{\text{ق}'(٢)}{٢\times ٢ + ١} = \frac{-٢}{٥}$

---

• خارجي / ما معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = لو$_{\text{هـ}}$ ظاس عند النقطة الواقعة عليه واحداثها السيني = $\frac{\pi}{٤}$

أ/ $٨\text{ص} = \pi - ٤\text{س}$ ب/ $٨\text{ص} = \pi + ٤\text{س}$

ج/ $\text{ص} = \pi - ٤\text{س}$ د/ $\text{ص} = \pi - \frac{١}{٢}\text{س}$

الحل/ $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}} \Leftarrow \text{ق}'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{\text{قا}^٢(\frac{\pi}{٤})}{\text{ظا}(\frac{\pi}{٤})} = \frac{(\sqrt{٢})^٢}{١} = ٢ =$ ميل المماس

$\Leftarrow$ ميل العمودي $= \frac{-١}{\text{ميل المماس}} = -\frac{١}{٢}$

$\text{ق}(\frac{\pi}{٤}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا}(\frac{\pi}{٤}) = \text{لو}_{\text{هـ}}١ = ٠ \Leftarrow (\frac{\pi}{٤}، ٠)$ نقطة تماس.

معادلة العمودي / $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١) \Leftarrow \text{ص} - ٠ = -\frac{١}{٢}(\text{س} - \frac{\pi}{٤})$

$[\text{ص} = -\frac{١}{٢}\text{س} + \frac{\pi}{٨}] \times ٨ \Leftarrow ٨\text{ص} = -٤\text{س} + \pi$

$٨\text{ص} = \pi - ٤\text{س}$

---

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة الآتية :

• 2018 دور أول / جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $\text{ق(س)} = ٦\text{س} - ٢\text{س}^٢$ عند النقطة التي احداثها السيني س = ٢

الحل/ $\text{ق}(٢) = ٦(٢) - ٢(٢)^٢ = ١٢ - ٨ = ٤ \Leftarrow (٢، ٤)$ نقطة تماس

$\text{ق}'(\text{س}) = ٦ - ٤\text{س} \Leftarrow$ ميل المماس $= \text{ق}'(٢) = ٦ - ٤ \times ٢ = ٦ - ٨ = -٢$

معادلة المماس/ $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$

$\text{ص} - ٤ = -٢(\text{س} - ٢) \Leftarrow \text{ص} - ٤ = -٢\text{س} + ٤ \Leftarrow \text{ص} = -٢\text{س} + ٨$

---

• 2019 دور ثالث/ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})$ ، $\text{س} > ٠$ جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ عند $\text{س} = ١$

الحل/ $\text{ق}(١) = \text{هـ}^{١}\,\text{لو}_{\text{هـ}}١ = \text{هـ} \times ٠ = ٠ \Leftarrow (١ ، ٠)$ نقطة تماس.

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

ميل المماس $= \text{ق}'(١) = \text{هـ} + \text{هـ}^{١} \times \text{لو}_{\text{هـ}}١ = \text{هـ} + \text{هـ} \times ٠ = \text{هـ}$

معادلة المماس/ $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١) \Leftarrow \text{ص} - ٠ = \text{هـ}(\text{س} - ١) \Leftarrow \text{ص} = \text{هـ}\text{س} - \text{هـ}$

---

• 2019 دور ثاني/ جد معادلة المماس على منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}}{\text{س} - ٢}$ ، $\text{س} \neq ٢$ عندما $\text{س} = ٨$

الحل/ $\text{ق}(٨) = \frac{٣ \times ٨}{٨ - ٢} = \frac{٢٤}{٦} = ٤ \Leftarrow (٨ ، ٤)$ نقطة التماس.

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢)(٣) - ٣\text{س}}{(\text{س} - ٢)^٢} = \frac{\cancel{٣\text{س}} - ٦ - \cancel{٣\text{س}}}{(\text{س} - ٢)^٢} = \frac{-٦}{(\text{س} - ٢)^٢}$

$\text{ق}'(٨) = \frac{-٦}{(٨ - ٢)^٢} = \frac{-٦}{٣٦} = \frac{-١}{٦} =$ ميل المماس

معادلة المماس/ $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١) \Leftarrow \text{ص} - ٤ = \frac{-١}{٦}(\text{س} - ٨) \Leftarrow \text{ص} - ٤ = \frac{-١}{٦}\text{س} + \frac{٤}{٣}$

$\text{ص} = \frac{-١}{٦}\text{س} + \frac{٤}{٣} + ٤ \Leftarrow \text{ص} = \frac{-١}{٦}\text{س} + \frac{١٦}{٣}$

---

• 2020 دور أول/ جد معادلة المماس لمنحنى $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢ - \sqrt{٢}\,\text{جتاس})$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، \text{ق}(\frac{\pi}{٤}))$

الحل/ $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢ - \sqrt{٢}\,\text{جتاس})$

$\text{ق}(\frac{\pi}{٤}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢ - \sqrt{٢}\,\text{جتا}(\frac{\pi}{٤})) = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢ - \cancel{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\cancel{\sqrt{٢}}}) = \text{لو}_{\text{هـ}}١ = ٠$

$\Leftarrow (\frac{\pi}{٤} ، ٠)$ نقطة تماس

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\sqrt{٢} \times -\text{جاس}}{٢ - \sqrt{٢}\,\text{جتاس}} \Leftarrow$ ميل المماس $= \text{ق}'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{\sqrt{٢}\,\text{جا}(\frac{\pi}{٤})}{٢ - \sqrt{٢}\,\text{جتا}(\frac{\pi}{٤})}$

$\Leftarrow$ ميل المماس $= \frac{\cancel{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\cancel{\sqrt{٢}}}}{٢ - \cancel{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\cancel{\sqrt{٢}}}} = \frac{١}{١} = ١$

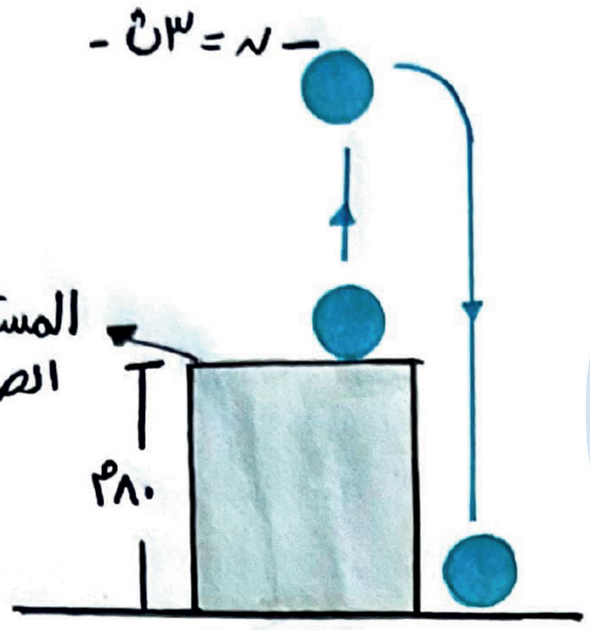
أ.ميّ حوّاري

معادلة المماس/ $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١) \Leftarrow \text{ص} - ٠ = (\text{س} - \frac{\pi}{٤})$

$\text{ص} = \text{س} - \frac{\pi}{٤}$

---

• 2020 دور أول/ قذف جسم رأسيًا لأعلى من قمة برج ارتفاعه ٨٠ متر فكانت إزاحته من قمة البرج تعطى بالعلاقة $\text{ف} = ٣٠\text{ن} - ٥\text{ن}^٢$ ، حيث $\text{ف}(\text{ن})$ تمثل ارتفاع الجسم من قمة البرج بعد (ن) ثانية ، أوجد :




أ.ميّ حوّاري

أ/ أقصى ارتفاع يصله الجسم عند قمة البرج

ب/ الزمن الذي استغرقه الجسم للوصول إلى سطح الأرض

الحل/ أ/ ف = ٣٠ن - ٥ن^٢

ع = ف' = ٣٠ - ١٠ن = ٠ ⇐ ١٠ن = ٣٠ ⇐ ن = ٣ ث

⇐ ن = ٣ ث زمن الوصول لأقصى ارتفاع "

أقصى ارتفاع عند البرج = ف(٣) = ٣٠×٣ - ٥×٣^٢

= ٩٠ - ٤٥ = ٤٥ م

ب/ عندما يصطدم الجسم إلى سطح الأرض تكون

ف(ن) = -٨٠ م ⇐ تحت المستوى الصفري

⇐ ٣٠ن - ٥ن^٢ = -٨٠ ⇐ ٥ن^٢ - ٣٠ن - ٨٠ = ٠ ÷ ٥

⇐ ن^٢ - ٦ن - ١٦ = ٠ ⇐ (ن - ٨)(ن + ٢) = ٠

إما ن + ٢ = ٠ ⇐ ن = -٢ مرفوضة ن > ٠

أو ن - ٨ = ٠ ⇐ ن = ٨ ث

---

• 2020 دورة ثاني/ جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = هـ^س عند النقطة التي تقع عليه وأحداثيها السيني يساوي ١

الحل/ ق(١) = هـ^١ = هـ ⇐ (١، هـ) نقطة تماس.

ق'(س) = هـ^س × ١ - هـ^س × ٣س^٢

ميل المماس = ق'(١) = هـ - ٣هـ = -٢هـ

معادلة المماس/ ص - ص١ = م(س - س١)

ص - هـ = -٢هـ(س - ١)

ص = -٢هـس + ٢هـ + هـ

ص = -٢هـس + ٣هـ ⇐ هـص = -٢س + ٣

---

• 2020 دورة ثالث/ جد معادلة المماس على منحنى ق(س) = هـ^(جا٣س) + لو_هـ(١ + جاس) عند (س = ٠)

الحل/ ق(٠) = هـ^(جا٠) + لو_هـ(١ + جا٠) = هـ^٠ + لو_هـ ١ = ١ + ٠ = ١ ⇐ (٠، ١) نقطة تماس

ق'(س) = هـ^(جا٣س) × ٣جتا(٣س) + جتاس / (١ + جاس)

ميل المماس = ق'(٠) = ٣جتا٠ هـ^(جا٠) + جتا٠ / (١ + جا٠) = ٣ × ١ × هـ^٠ + ١/١ = ٣ + ١ = ٤

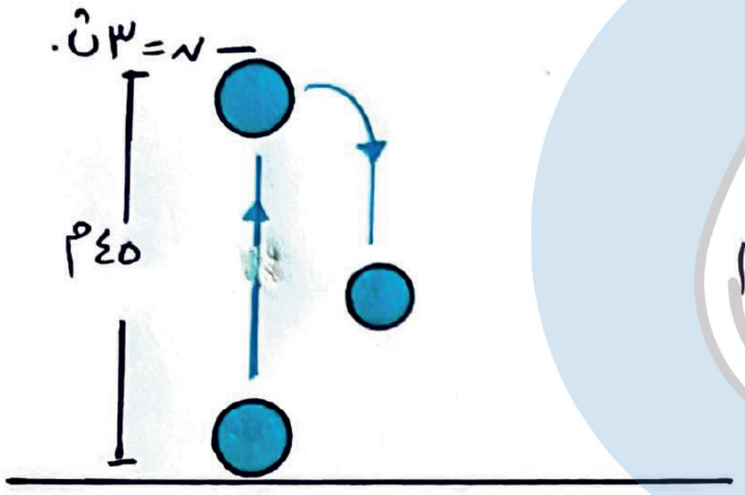
معادلة المماس/ ص - ص١ = م(س - س١)

ص - ١ = ٣(س - ٠)

ص - ١ = ٣س ⇐ ص = ٣س + ١

• 2020 دور ثالث / قذف جسم رأسيًا لأعلى من سطح الأرض ، فكانت إزاحته من سطح الأرض تعطى بالعلاقة ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن² ، حيث ف(ن) تمثل إزاحة الجسم بالأمتار بعد (ن) ثانية

أوجد سرعة الجسم عندما يقطع مسافة (٦٥ متر)




الحل / ف = ٣٠ن − ٥ن² ⇐ ع = $\frac{دف}{دن}$ = ٣٠ − ١٠ن

⇐ ع = ٠ = ٣٠ − ١٠ن ⇐ ٣٠ = ١٠ن ⇐ ٣ث = ن

أقصى ارتفاع = ف(٣) = ٣٠×٣ − ٥×٣² = ٩٠ − ٤٥ = ٤٥م

المسافة المقطوعة = ٢ أقصى ارتفاع − ف(ن)

٦٥ = ٢×٤٥ − ف(ن)

ف(ن) = ٩٠ − ٦٥ = ٢٥م

⇐ ٣٠ن − ٥ن² = ٢٥ ⇐ (٥ن² − ٣٠ن + ٢٥ = ٠) ÷ ٥

ن² − ٦ن + ٥ = ٠ ⇐ (ن − ١)(ن − ٥) = ٠

إما ن − ١ = ٠ ⇐ ن = ١ث مرفوض الجسم يجب أن يكون هابط

أو ن − ٥ = ٠ ⇐ ن = ٥ث .

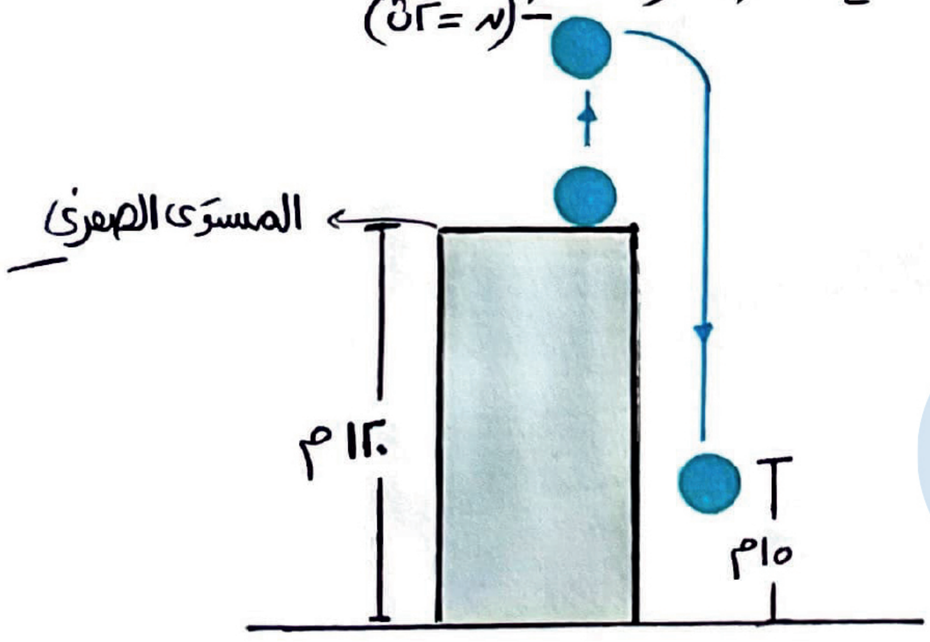
ع(٥) = ٣٠ − ١٠×٥ = ٣٠ − ٥٠ = −٢٠م/ث

أ.ميّ حوّاري

• 2021 دور أول / قذف جسم رأسيًا للأعلى من قمة برج ارتفاعه ١٢٠م فكانت إزاحته من قمة البرج تعطى بالعلاقة ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن² ، أوجد:

أ/ أقصى ارتفاع يصله الجسم عن سطح الأرض .

ب/ سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ١٥ متر من سطح الأرض وهو نازل




الحل / أ/ ف = ٢٠ن − ٥ن²

ع = $\frac{دف}{دن}$ = ٢٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ٢٠ = ١٠ن

⇐ ن = ٢ث «زمن الوصول لأقصى ارتفاع»

أقصى ارتفاع عن البرج = ف(٢) = ٢٠×٢ − ٥×٢²

= ٤٠ − ٢٠ = ٢٠م

⇐ أقصى ارتفاع عن الأرض = ارتفاع البرج + أقصى ارتفاع عن البرج

= ١٢٠ + ٢٠ = ١٤٠م

لأن الجسم تحت المستوى الصفري

ب/ عندما يكون الجسم على ارتفاع ١٥ متر عن الأرض تكون ف(ن) = ١٢٠ − ١٥ = −١٠٥

ف(ن) = −١٠٥ = ٢٠ن − ٥ن² ⇐ (٥ن² − ٢٠ن − ١٠٥ = ٠) / ٥

⇐ ن² − ٤ن − ٢١ = ٠ ⇐ (ن − ٧)(ن + ٣) = ٠

إما ن + ٣ = ٠ ⇐ ن = −٣ مرفوض

أو ن − ٧ = ٠ ⇐ ن = ٧ث

ع(٧) = ٢٠ − ١٠×٧ = ٢٠ − ٧٠ = −٥٠م/ث

• 2021 دور أول/ ما معادلة المماس لمنحنى $ق(س) = \frac{س^2}{هـ^س}$ عند س = -1

الحل/ $ق(س) = \frac{س^2}{هـ^س} = س^2 هـ^{-س}$

$ق(-1) = (-1)^2 هـ^{-(-1)} = 1 \times هـ^1 = هـ \Leftarrow (-1، هـ)$ نقطة تماس

$ق'(س) = س^2 هـ^{-س} \times -1 + هـ^{-س} \times 2س$

ميل المماس = $ق'(-1) = -هـ^1 + -2هـ = -3هـ$

معادلة المماس/ $ص - ص_1 = م(س - س_1) \Leftarrow ص - هـ = -3هـ(س - -1)$

$ص - هـ = -3هـ س - 3هـ \Leftarrow ص = -3هـ س - 2هـ$

أ.ميّ حوّاري

---

• 2021 دور ثاني/ جد معادلة المماس لمنحنى $ق(س) = 2س \, لو_هـ س$ عند س = هـ

الحل/ $ق(هـ) = 2هـ \, لو_هـ هـ = 2هـ \times 1 = 2هـ \Leftarrow (هـ، 2هـ)$ نقطة التماس

$ق'(س) = 2س \times \frac{1}{س} + 2 \, لو_هـ س$

ميل المماس = $ق'(هـ) = 2 + 2 \, لو_هـ هـ = 2 + 2 = 4$

معادلة المماس/ $ص - ص_1 = م(س - س_1) \Leftarrow ص - 2هـ = 4(س - هـ)$

$\Leftarrow ص - 2هـ = 4س - 4هـ \Leftarrow ص = 4س - 2هـ$

---

• 2021 دور ثاني/ يتحرك جسم على خط مستقيم، حيث أن بعده عند نقطة ثابتة (و) يتحدد بالعلاقة $ف = ن^3 - 9ن^2 + 7$ حيث ف بعده بالأمتار، ن الزمن بالثواني جد:

١/ السرعة المتوسطة في [2، 4]  ٢/ تسارع الجسم عندما يعكس اتجاه حركته.

الحل/

١/ السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1} = \frac{ف(4) - ف(2)}{4 - 2} = \frac{(4^3 - 9(4)^2 + 7) - (2^3 - 9(2)^2 + 7)}{2}$

$= \frac{(64 - 144 + 7) - (8 - 36 + 7)}{2} = \frac{-73 - -21}{2} = \frac{-52}{2} = -26$ م/ث

---

٢/ يعكس الجسم اتجاه حركته عندما ع = ٠ وتتغير اشارة السرعة.

$ع = \frac{دف}{دن} = 3ن^2 - 18ن = 0 \Leftarrow 3ن(ن - 6) = 0$

إما $3ن = 0 \Leftarrow ن = 0$ × بداية الحركة / أو $ن - 6 = 0 \Leftarrow ن = 6$ ث



لاحظ عندما (ن = 6 ث) توقف الجسم لحظياً ثم عكسه اتجاه حركته.

اشارة ع: + − − − − − | + + +
0 ، 6

$ت = \frac{دع}{دن} = 6ن - 18$

$ت(6) = 6 \times 6 - 18 = 18$ م/ث²

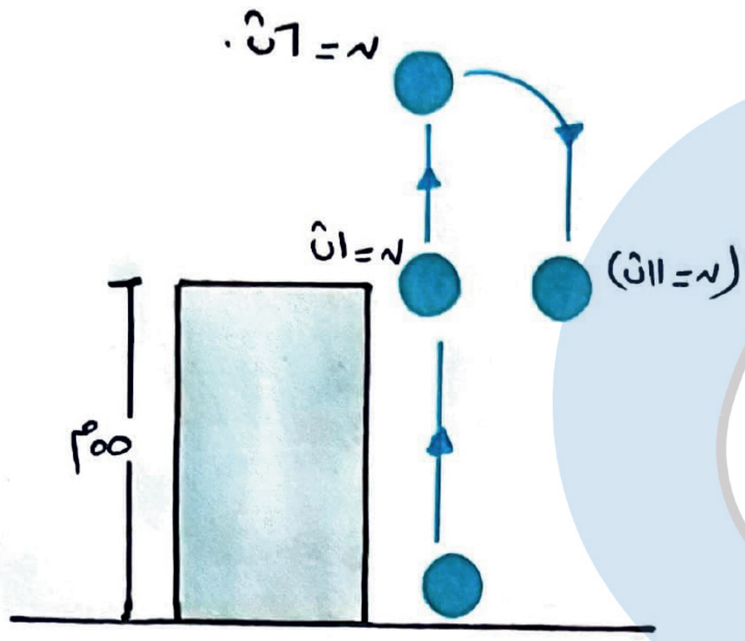
---

• 2022 دور أول/ قذفت كرة رأسياً لأعلى من سطح الأرض ومن أمام بناية ارتفاعها 100م، فكانت إزاحته من سطح الأرض تعطى بالعلاقة $ف(ن) = 60ن - 5ن^2$، ف(ن) تمثل إزاحة الجسم بالأمتار بعد (ن) ثانية، أوجد:

١/ ما سرعة الكرة عندما تصل إلى مستوى سطح البناية.

٢/ ما أقصى ارتفاع عن مستوى سطح البناية .

الحل/ ١/ تصل الكرة إلى سطح البناية




⇐ ف(ن) = ٥٥ ⇐ ٦٠ن − ٥ن² = ٥٥

⇐ (٥ن² − ٦٠ن + ٥٥ = ٠) ÷ ٥

ن² − ١٢ن + ١١ = ٠

(ن − ١)(ن − ١١) = ٠

إما ن − ١ = ٠ ⇐ ن = ١ث «صاعد»

أو ن − ١١ = ٠ ⇐ ن = ١١ث «هابط»

ع(ن) = $\frac{\text{عف}}{\text{عن}}$ = ٦٠ − ١٠ن

ع(١) = ٦٠ − ١٠ = ٥٠م/ث

ع(١١) = ٦٠ − ١٠×١١ = ٦٠ − ١١٠ = −٥٠م/ث

٢/ ع(ن) = ٦٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ٦٠ = ١٠ن ⇐ ن = ٦ث «زمن الوصول لأقصى ارتفاع»

أقصى ارتفاع عن الأرض = ف(٦) = ٦٠×٦ − ٥×٦² = ٣٦٠ − ١٨٠ = ١٨٠م

أقصى ارتفاع عن البرج = أقصى ارتفاع عن الأرض − ارتفاع البرج

= ١٨٠ − ٥٥ = ١٢٥م

أ.ميّ حوّاري

---

• 2022 دور ثاني/ يتحرك جسم في خط مستقيم ، حيث أن بعده عن نقطة الانطلاق يتحدد بالعلاقة ف(ن) = ن² + ٨ن حيث ف بعده بالأمتار ، ن الزمن بالثواني وكانت السرعة المتوسطة في [١، أ] تساوي ١٣ جد قيمة الثابت أ

الحل/ السرعة المتوسطة = $\frac{\text{ف}}{\text{ن}}$ = $\frac{\text{ف(أ)} - \text{ف(١)}}{\text{أ} - ١}$ = $\frac{(\text{أ}^2 + ٨\text{أ}) - (١^2 + ٨)}{\text{أ} - ١}$ = ١٣

⇐ $\frac{\text{أ}^2 + ٨\text{أ} - ٩}{\text{أ} - ١}$ = ١٣ ⇐ $\frac{(\text{أ} + ٩)(\text{أ} - ١)}{\text{أ} - ١}$ = ١٣ ، أ ≠ ١

⇐ أ + ٩ = ١٣ ⇐ أ = ١٣ − ٩ ⇐ أ = ٤

---

• 2023 دور أول/ إذا كانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند (س = ٢) هي ٤س − ص − ٥ = ٠ وكانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى هـ(س) عند (س = ٢) هي س + ٤ص − ٢٢ = ٠ وكانت ل(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، هـ(س) ≠ ٠ جد ل′(٢)

الحل/ (٢، ق(٢)) ∈ للمماس/ ٤س − ص − ٥ = ٠ ⇐ ٤×٢ − ق(٢) − ٥ = ٠ ⇐ ٣ − ق(٢) = ٠

⇐ ٣ = ق(٢)

مماس ق(س) |س = ٢ ⇐ ٤س − ص − ٥ = ٠ ⇐ ٤ − ص′ = ٠ ⇐ ٤ = ص′ = ق′(٢) = ميل المماس

⇐ ق′(٢) = ٤

(٢، هـ(٢)) ∈ للعمودي ⇐ س + ٤ص − ٢٢ = ٠ ⇐ ٢ + ٤هـ(٢) − ٢٢ = ٠ ⇐ ٤هـ(٢) − ٢٠ = ٠

⇐ ٤هـ(٢) = ٢٠ ⇐ هـ(٢) = ٥

العمودي على هـ(س) |س = ٢ ⇐ س + ٤ص − ٢٢ = ٠ ⇐ ١ + ٤ص′ = ٠ ⇐ ص′ = −$\frac{١}{٤}$ = ميل العمودي

ميل المماس = $\frac{-1}{\text{ميل العمودي}}$ = ٤ = هـَ(٢)

ل(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ⇐ لَ(س) = $\frac{\text{هـ(س) قَ(س) − ق(س) هـَ(س)}}{\text{هـ}^2\text{(س)}}$ ⇐ لَ(٢) = $\frac{\text{هـ(٢) قَ(٢) − ق(٢) هـَ(٢)}}{\text{هـ}^2\text{(٢)}}$

⇐ لَ(٢) = $\frac{(٥)(٤) - (٣)(٤)}{٥^2}$ = $\frac{٢٠ - ١٢}{٢٥}$ = $\frac{٨}{٢٥}$

---

• 2024 دور أول / يتحرك جسم في خط مستقيم ، حيث أن بعده ف عن نقطة الانطلاق يتحدد بالعلاقة ف(ن) = ن$^2$(أن + ب) + ٧ حيث ف بعده بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، وكان تسارعه عندما (ن = ٦ث) يساوي (١٨م/ث) ويعكس الجسم من اتجاه حركته في تلك اللحظة ، جد قيم الثابتين أ ، ب

الحل /

ت(٦) = ١٨ / يعكس الجسم اتجاه حركته عندما ن = ٦ ⇐ ع(٦) = ٠

ف(ن) = ن$^2$(أن + ب) + ٧ ⇐ أن$^3$ + بن$^2$ + ٧ = ف

ع = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٣أن$^2$ + ٢بن ⇐ ع(٦) = (٣أ × ٦$^2$ + ٢ب × ٦ = ٠) / ١٢ ⇐ ٩أ + ب = ٠ — (١)

ت = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٦أن + ٢ب ⇐ ت(٦) = (٦أ × ٦ + ٢ب = ١٨) / ٢ ⇐ ١٨أ + ب = ٩ — (٢)

بطرح (٢) − (١) / ٩أ = ٩ ⇐ أ = ١ نعوضها في (١)

٩أ + ب = ٠ ⇐ ٩ + ب = ٠ ⇐ ب = −٩

أ.مي حوّاري

---

• 2024 دور ثاني / جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س$^2$هـ$^{\text{س}}$ عند النقطة التي احداثها السينية ١

الحل /

ق(١) = (١)$^2$هـ$^1$ = هـ ⇐ (١ ، هـ) نقطة تماس .

قَ(س) = س$^2$هـ$^{\text{س}}$ + هـ$^{\text{س}}$(٢س)

ميل المماس = قَ(١) = هـ + ٢هـ = ٣هـ

معادلة المماس / ص − ص$_1$ = م(س − س$_1$) ⇐ ص − هـ = ٣هـ(س − ١) ⇐ ص − هـ = ٣هـس − ٣هـ

+هـ +هـ

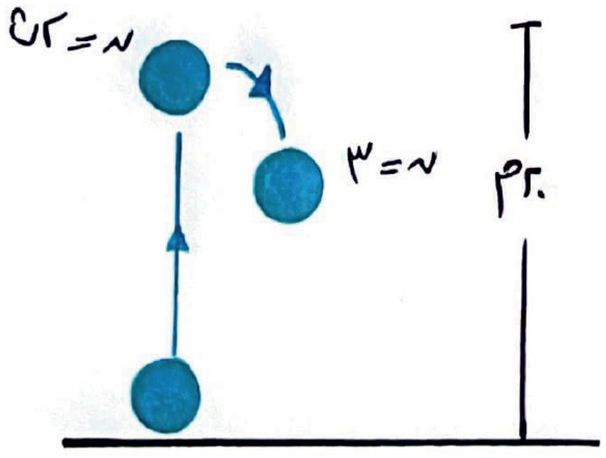
ص = ٣هـس − ٢هـ

---

• 2024 دور ثاني / قذف جسم رأسياً لأعلى من نقطة على سطح الأرض حسب العلاقة ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن$^2$ حيث ف هو الارتفاع بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، أوجد :

أ/ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم

ب/ الزمن اللازم لتكون المسافة المقطوعة ٢٥ متر




الحل / أ/ ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن$^2$

ع = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٢٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ٢٠ = ١٠ن

⇐ ن = ٢ث "زمن الوصول لأقصى ارتفاع"

ف(٢) = ٢٠ × ٢ − ٥(٢)$^2$ = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠م

ب/ المسافة المقطوعة = ٢ × أقصى ارتفاع − ف(ن)

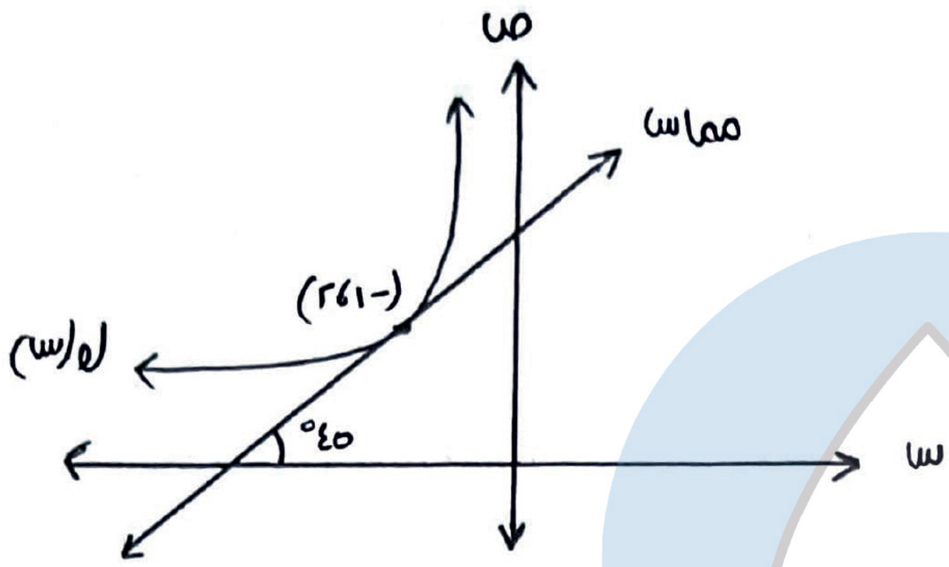
٢٥ = ٢ × ٢٠ − ف(ن)

ف(ن) = ٤٠ − ٢٥ = ١٥م

⇐ ١٥ = ٢٠ن − ٥ن$^2$ ⇐ $\frac{٥}{٥}$ن$^2$ − $\frac{٢٠}{٥}$ن + $\frac{١٥}{٥}$ = ٠ ⇐ ن$^2$ − ٤ن + ٣ = ٠

(ن − ١)(ن − ٣) = ٠

إما ن − ١ = ٠ ⇐ ن = ١ث × الجسم صاعد / ن − ٣ = ٠ ⇐ ن = ٣ث "الجسم هابط"




• 2024 دور ثالث/ اذا علمت أن الاقتران $ق(س) = \frac{س+٣}{س^٢+١}$ وكان الشكل المجاور يمثل منحنى ل(س) جد قيمة $(ق \times ل)'(-١)$

الحل/

* من الرسمة:

(-١،٢) تقع على ل(س) ⇐ ل(-١) = ٢

ل'(-١) = ميل المماس = ظا ٤٥ ⇐ ل'(-١) = ١

* $ق(س) = \frac{س+٣}{س^٢+١}$ ⇐ $ق(-١) = \frac{-١+٣}{(-١)^٢+١} = \frac{٢}{٢} = ١$ ⇐ ق(-١) = ١

$ق'(س) = \frac{(س^٢+١)(١) - (س+٣)(٢س)}{(س^٢+١)^٢}$ ⇐ $ق'(٢) = \frac{((-١)^٢+١) - (-١+٣)(٢\times-١)}{((-١)^٢+١)^٢}$

⇐ $ق'(-١) = \frac{٢-(٢)(-٢)}{٢^٢} = \frac{٢+٤}{٤} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

أ.ميّ حوّاري

المطلوب/ $(ق \times ل)'(-١) = ق(-١)ل'(-١) + ل(-١)ق'(-١)$

$= (١)(١) + (\frac{٣}{٢})(٢) = ١+٣ = ٤$

---

• 2025 دور أول/ قذف جسم رأسياً لأعلى من نقطة على سطح الأرض وكانت ارتفاعه عن سطح الأرض ف بالأقدام بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة $ف = ٩٦ن - ١٦ن^٢$ ، جد المسافة الكلية المقطوعة خلال الثواني الأربعة الأولى.

الحل/ $ف = ٩٦ن - ١٦ن^٢$ ⇐ $ع = \frac{ف}{ن}$ = ٩٦ - ٣٢ن = ٠ ⇐ ٩٦ = ٣٢ن ⇐ ٣ث = ن

أقصى ارتفاع عن الأرض = ف(٣) = ٩٦×٣ - ١٦×٣^٢ = ٢٨٨ - ١٤٤ = ١٤٤م

* ف(٤) = ٩٦×٤ - ١٦×٤^٢ = ٣٨٤ - ٢٥٦ = ١٢٨م

المسافة المقطوعة = ٢أقصى ارتفاع - ف(ن)

= ٢×١٤٤ - ف(٤) = ٢٨٨ - ١٢٨ = ١٦٠م

---

• خارجي/ أوجد معادلة المماس الأفقي لمنحنى $ق(س) = ٣س^٢ + ٦س$

الحل/ نفرض نقطة التماس (س، ق(س))

ق'(س) = ٦س + ٦

المماس أفقي ⇐ ميله = ٠ ⇐ ق'(س) = ٠ ⇐ ٦س + ٦ = ٠ ⇐ $\frac{٦س}{٦} = \frac{-٦}{٦}$ ⇐ س = -١

ق(-١) = ٣(-١)^٢ + ٦(-١) = ٣ - ٦ = -٣ ⇐ (-١، -٣) نقطة تماس

معادلة المماس/ $ص - ص_١ = م(س - س_١)$ ⇐ ص - -٣ = صفر(س - -١) ⇐ ص + ٣ = ٠

⇐ ص = -٣

---

كُلٌّ في ميدانه، قائد

# الدرس السادس | قاعدة السلسلة

## • القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2017 دور أول/ إذا كان ق(س) = ل²(س) ، ل(س) قابلاً للاشتقاق ، جد قَ(س)

أ/ لَ(س) ب/ ٢لَ(س) ج/ ٢س لَ(س) د/ ٢ل(س) لَ(س)

الحل/ ق(س) = (ل(س))² ⇐ قَ(س) = ٢(ل(س)) لَ(س)

---

• 2017 دور أول/ إذا كان ف = جا(٣ن) + جتا(٢ن) هي العلاقة بين الإزاحة ف بالأمتار والزمن (ن) بالثواني لجسم يتحرك على خط مستقيم ، جد سرعة الجسم عندما ن = $\frac{\pi}{6}$

أ/ $\sqrt{3}$ م/ث ب/ -١ م/ث ج/ $-\sqrt{3}$ م/ث د/ ٢ م/ث

الحل/ ع = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٣جتا(٣ن) - ٢جا(٢ن)

ع($\frac{\pi}{6}$) = ٣جتا($\frac{3\pi}{6}$) - ٢جا($\frac{2\pi}{6}$) = ٣جتا($\frac{\pi}{2}$) - ٢جا($\frac{\pi}{3}$)

⇐ ع($\frac{\pi}{6}$) = ٣×٠ - ٢×$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٠ - $\sqrt{3}$ = $-\sqrt{3}$ م/ث .

---

• 2017 دور أول/ إذا كان ق(س) = جا²س ، جد ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = $\frac{\pi}{2}$

أ/ ١ ب/ -١ ج/ ٠ د/ $\frac{1}{2}$

الحل/ قَ(س) = ٢جاس × جتاس = جا(٢س)

قَ($\frac{\pi}{2}$) = جا($\frac{2\pi}{2}$) = جا($\pi$) = ٠ = ميل المماس .

---

• 2017 دور أول/ إذا كان (ق(س) + س)² = ٢س⁴ ، ق(-١) = ٣ جد قَ(-١)

أ/ -٣ ب/ -٥ ج/ -٢ د/ -٤

الحل/ (ق(س) + س)² = ٢س⁴ نشتق الطرفين

٢(ق(س) + س)(قَ(س) + ١) = ٢ × ٤س³ | س = -١

٢(ق(-١) + -١)(قَ(-١) + ١) = ٨(-١)³

٢(٣ - ١)(قَ(-١) + ١) = -٨ ⇐ $\frac{4}{4}$(قَ(-١) + ١) = $\frac{-8}{4}$

⇐ قَ(-١) + ١ = -٢ ⇐ قَ(-١) = -٣

أ.ميّ حوّاري

---

• 2018 دور أول/ إذا كان قَ(س) = س² - ٤ ، هـ(٢) = ٤ ، هـَ(٢) = -٢ جد (ق∘هـ)'(٢)

أ/ -٢٤ ب/ -١٦ ج/ -٨ د/ ٤

الحل/ (ق∘هـ)'(٢) = قَ(هـ(٢)) هـَ(٢)

= قَ(٤) × -٢ = (٤² - ٤) × -٢ = ١٢ × -٢ = -٢٤

---

• 2019 دور ثاني/ إذا كان (ق∘هـ)'(٣) = ٦ وكان قَ(١) = ٣ ، هـ(٣) = ١ ما قيمة هـَ(٣)

أ/ صفر ب/ $\frac{1}{2}$ ج/ ١ د/ ٢

الحل/ (ق∘هـ)'(٣) = قَ(هـ(٣)) هـَ(٣) = ٦ ⇐ قَ(١) × هـَ(٣) = ٦ ⇐ $\frac{3}{3}$هـَ(٣) = $\frac{6}{3}$ ⇐ هـَ(٣) = ٢

• 2020 دورأول/ إذا كان $ق(س)=س^3$ ، $ك(س)=\frac{ب}{1-س^3}$ ، $س\neq\frac{1}{2}$ ، $ب\neq0$ وكان $(ق\circ ك)'(1)=-48$ ، ما قيمة الثابت ب

P/ ٤ ب/ ٨ ج/ ١٦ د/ ٢

الحل/ $ق(س)=س^3$

$ق'(س)=3س^2$

$ك'(س)=6س$

$ك(س)=\frac{ب}{1-س^3}\Leftarrow ك(1)=ب$

$ك'(س)=\frac{-ب\times2}{(1-س^3)^2}\Leftarrow ك'(1)=\frac{-12}{(1-2)^2}=-12ب$

$*\ (ق\circ ك)'(1)=ق'(ك(1))ك'(1)\Leftarrow -48=ق'(ب)\times-12ب=-48$

$\Leftarrow 6ب\times-12ب=-48\Leftarrow -12ب^3=-48\Leftarrow ب^3=4\Leftarrow ب=2$

$\swarrow ب=-\frac{1}{2}\times2ب^2$

$\Leftarrow ب=\{2\}$ .

---

• 2020 دورأول/ اذا كان $ص=(ع^2+1)^2$ ، $ع=س^2$ ، جد قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما $س=1$

P/ ١٦ ب/ ٨ ج/ $\frac{5}{3}$ د/ ١

الحل/ $ص=(ع^2+1)^2$

$\frac{دص}{دع}=2(ع^2+1)\times2ع$

$ع=س^2$

$\frac{دس}{دع}=2س$

عندما $س=1\Leftarrow ع=1^2\Leftarrow ع=1$

$\frac{دص}{دس}=\frac{دص}{دع}\times\frac{دع}{دس}\Leftarrow \frac{دص}{دس}=4ع(ع^2+1)\times2س=4\times2\times2\Big|_{\substack{س=1\\ع=1}}=16$

---

أ.مي حواري

طريقة (٢):

$ص=(ع^2+1)^2$ نفوض $ع=س^2$

$ص=((س^2)^2+1)^2\Leftarrow ص=(س^4+1)^2\Leftarrow \frac{دص}{دس}=2(س^4+1)\times4س^3\Big|_{س=1}$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=1}=2(1+1)\times4=2\times2\times4=16$

---

• 2020 دورثاني/ إذا كان $ق(س)=(س^3+5س+2)^{\frac{3}{4}}$ ، ما قيمة $ق'(2)$

P/ $\frac{27}{4}$ ب/ $\frac{27}{8}$ ج/ $\frac{21}{4}$ د/ $\frac{3}{7}$

الحل/

$ق'(س)=\frac{3}{4}(س^3+5س+2)^{-\frac{1}{4}}(3س^2+5)$

$ق'(2)=\frac{3}{4}(8+10+2)^{-\frac{1}{4}}(12+5)$

$=\frac{3}{4}\times20\times(20)^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}\times20\times\frac{1}{(20)^{\frac{1}{4}}}$

$\Leftarrow ق'(2)=\frac{3}{4}\times(\frac{1}{2})^{\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}\times2^{-1}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{(2^3)^{\frac{1}{4}}}$

$\Leftarrow ق'(2)=\frac{27}{8}$

• 2020 دور ثالث/ إذا كان ق(س) = $\frac{1}{س^2+1}$ ، هـ(س) = ظاس ما قيمة (ق∘هـ)'(س)

أ/ ٢جاس جتاس  ب/ -جا(٢س)  جـ/ ٢جتا(٢س)  د/ قتا²س

الحل/ ق(س) = $\frac{1}{س^2+1}$ ⇐ قَ(س) = $\frac{-٢س}{(س^2+1)^2}$

هـ(س) = ظاس ⇐ هَ(س) = قا²س

أ.مي حواري

* (ق∘هـ)'(س) = قَ(هـ(س)) هَ(س)

= قَ(ظاس) × قا²س

= $\frac{-٢ظاس}{(ظا^2س+1)^2}$ × قا²س = $\frac{-٢ظاس\ \cancel{قا^2س}}{(قا^2س)^{\cancel{2}}}$ = $\frac{-٢ظاس}{قا^2س}$

⇐ (ق∘هـ)'(س) = -٢ظاس جتا²س = -٢$\frac{جاس}{\cancel{جتاس}}$ × جتا²س = -٢جاس جتاس

= -جا(٢س)

---

• 2022 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = $\frac{1}{س}$ ، هـ(س) = ٦-س ما قيمة (ق∘هـ)'(٣)

أ/ $-\frac{1}{9}$  ب/ $\frac{1}{9}$  جـ/ $\frac{1}{3}$  د/ $\frac{-1}{3}$

الحل/

ق(س) = $\frac{1}{س}$  هـ(س) = ٦-س ⇐ هـ(٣) = ٦-٣ = ٣

قَ(س) = $\frac{-1}{س^2}$  هَ(س) = -١ ⇐ هَ(٣) = -١

(ق∘هـ)'(٣) = قَ(هـ(٣)) هَ(٣)

= قَ(٣) × -١ = $\frac{-1}{3^2}$ × -١ = $\frac{1}{9}$

---

• 2022 دور ثالث/ إذا كان ق(س² + ٢س - ٢) = $\sqrt{س+3}$ ، س > -٣ ما قيمة قَ(١)

أ/ $\frac{1}{16}$  ب/ $\frac{1}{8}$  جـ/ $\frac{1}{4}$  د/ ١

الحل/

* عندما س² + ٢س - ٢ = ١ ⇐ س² + ٢س - ٣ = ٠ ⇐ (س-١)(س+٣) = ٠

إما س - ١ = ٠ ⇐ س = ١ ، أو س + ٣ = ٠ ⇐ س = -٣ مرفوض لأن س > -٣

* ق(س² + ٢س - ٢) = $\sqrt{س+3}$

قَ(س² + ٢س - ٢)(٢س + ٢) = $\frac{1}{2\sqrt{س+3}}$ ، س = ١

قَ(١+٢-٢)(٢+٢) = $\frac{1}{2\sqrt{4}}$ ⇐ قَ(١) × $\frac{4}{4}$ = $\frac{1}{4\times4}$ ⇐ قَ(١) = $\frac{1}{16}$

---

• 2020 دور ثالث/ إذا كان ص = لو$_{هـ}$(ق(س)) ، ما قيمة $\frac{دص}{دس}$

أ/ $\frac{1}{س}$ قَ(س)  ب/ $\frac{1}{س}$ قَ(لو$_{هـ}$س)  جـ/ قَ($\frac{1}{س}$)  د/ قَ(لو$_{هـ}$س)

الحل/ $ص = ق(لو_{هـ}(س)) \Leftarrow ص' = ق'(لو_{هـ}س) \times \frac{1}{س}$

---

• 2020 دور ثاني/ إذا كان $ق(س) = (٥ - ٢س)^{٦}$ ، $ق''(س) = ٨أ(٥ - ٢س)^{٤}$ ما قيمة الثابت أ

أ/ ٣ ب/ ١ ج/ ١٥ د/ -١٥

الحل/ $ق(س) = (٥ - ٢س)^{٦}$

$ق'(س) = ٦(٥ - ٢س)^{٥} \times -٢ = -١٢(٥ - ٢س)^{٥}$

$ق''(س) = -١٢ \times ٥(٥ - ٢س)^{٤} \times -٢ = ١٢٠(٥ - ٢س)^{٤}$

$٨أ(٥ - ٢س)^{٤} = ١٢٠(٥ - ٢س)^{٤}$ بالمقارنة

$٨أ = ١٢٠ \Leftarrow أ = \frac{١٢٠}{٨} = ١٥$

أ.مي حواري

---

• 2023 دور ثاني/ إذا كان $ق(س) = \frac{س}{س+١}$ ، $هـ(٢) = ١$ ، $هـ'(٢) = ٨$ ما قيمة $(ق \circ هـ)'(٢)$

أ/ ٣٢ ب/ ٨ ج/ ٢ د/ ٤

الحل/ $ق(س) = \frac{س}{س+١}$ اضافة وطرح (١) للبسط «لتسهيل عملية الاشتقاق»

$ق(س) = \frac{س+١-١}{س+١} = \frac{س+١}{س+١} + \frac{-١}{س+١} = ١ - \frac{١}{س+١}$

$ق'(س) = ٠ - \frac{-١}{(س+١)^{٢}} = \frac{١}{(س+١)^{٢}}$

$*(ق \circ هـ)'(٢) = ق'(هـ(٢))هـ'(٢) = ق'(١) \times ٨ = \frac{١}{(١+١)^{٢}} \times ٨ = \frac{٨}{٤} = ٢$

---

• 2024 دور أول/ إذا كان $ص = \sqrt{٣س+٤}$ ، $س = ٢ع - ٢$ جد $\frac{دص}{دع}$ عندما $ع = ٣$

أ/ $\frac{٣}{٤}$ ب/ $\frac{٣}{٢}$ ج/ $\frac{١}{٤}$ د/ $\frac{١}{٢}$

طريقة (١):

$ص = \sqrt{٣س+٤}$ $س = ٢ع - ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣س+٤}}$ $\frac{دس}{دع} = ٢$

• عندما $ع = ٣ \Leftarrow س = ٢ \times ٣ - ٢ = ٦ - ٢ \Leftarrow س = ٤$

$\frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \times \frac{دس}{دع} \Leftarrow \frac{دص}{دع} = \frac{٣}{\cancel{٢}\sqrt{٣س+٤}} \times \cancel{٢} \Big|_{س=٤} = \frac{٣}{\sqrt{٣ \times ٤ + ٤}} = \frac{٣}{\sqrt{١٦}} = \frac{٣}{٤}$

طريقة (٢):

$ص = \sqrt{٣س+٤}$ نعوض $س = ٢ع - ٢$

$ص = \sqrt{٣(٢ع - ٢) + ٤} = \sqrt{٦ع - ٦ + ٤} = \sqrt{٦ع - ٢}$

$\frac{دص}{دع} = \frac{\cancel{٦}^{٣}}{\cancel{٢}\sqrt{٦ع - ٢}} \Big|_{ع=٣} = \frac{٣}{\sqrt{١٨ - ٢}} = \frac{٣}{\sqrt{١٦}} = \frac{٣}{٤}$

• 2024 دورثاني/ لتكن $(هـ\circ ه)'(٤) = -١٦$ و $هـ(س) = س^{٣}+٣$ و $\text{ق}(٤) = ٤$ ما قيمة $\text{ق}(٤)$

د/ -٤ ج/ ٤ ب/ ٢ أ/ -٢

الحل/ $هـ(س) = س^{٣}+٣ \Leftarrow هـ'(س) = ٣س^{٢} \Leftarrow هـ'(\text{ق}(٤)) = ٣\text{ق}(٤)$

$*\ (هـ\circ ه)'(٤) = هـ'(\text{ق}(٤))\ \text{ق}'(٤)$

$-١٦ = ٣\text{ق}(٤) \times ٤ \Leftarrow \frac{-١٦}{٨} = \frac{٨\text{ق}(٤)}{٨} \Leftarrow \text{ق}(٤) = -٢$

---

• 2024 دورثالث/ إذا كان $ص = \sqrt[٣]{س^{٤}-٢}$ ما قيمة $\left|\frac{دص}{دس}\right|_{س=١}$

د/ ٢ ج/ ١ ب/ $\frac{٣}{٢}$ أ/ $\frac{٢}{٣}$

الحل/ $ص = (س^{٤}-٢)^{\frac{١}{٣}} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٣}(س^{٤}-٢)^{-\frac{٢}{٣}} \times ٤س^{٣} = \frac{٤س^{٣}}{٣\sqrt[٣]{(س^{٤}-٢)^{٢}}} = \frac{٤س^{٣}}{٣(س^{٤}-٢)^{\frac{٢}{٣}}}$

$\left|\frac{دص}{دس}\right|_{س=١} = \frac{٤(١)}{٣\sqrt[٣]{(١-٢)^{٢}}} = \frac{٤}{٣\sqrt[٣]{١}} = \frac{٤}{٣}$

---

• 2025 دورأول/ إذا كان $هـ(س) = س^{٤}-س$ و $\text{ق}(س) = ١-س$ ما قيمة $(هـ\circ ه)'(١)$

د/ صفر ج/ ٢ ب/ -١ أ/ ١

الحل/ $هـ(س) = س^{٤}-س$

$\text{ق}(س) = ١-س$

$(هـ\circ ه)'(١) = هـ'(\text{ق}(١))\ \text{ق}'(١)$

$= هـ'(٠) \times -١ = (٤ \times ٠^{٣}-١) \times -١ = -١ \times -١ = ١$

---

• 2025 دورأول/ إذا كان $هـ(س) = \frac{س}{\sqrt{٢س+١}}$ و $\text{ق}(س) = ٣س^{٢}-١$ ما قيمة $\text{ق}'(٠)$

د/ $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ج/ -١ ب/ ١ أ/ صفر

الحل/ $هـ(س) = \frac{س}{(٢س+١)^{\frac{١}{٢}}} = س \times (٢س+١)^{-\frac{١}{٢}}$

$\text{ق}'(س) = س \times -\frac{١}{٢}(٢س+١)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢ + (٢س+١)^{-\frac{١}{٢}} \times ١$

$\text{ق}'(٠) = ٠ \times -\frac{١}{٢}(١)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢ + (١)^{-\frac{١}{٢}} \times ١ = ١ \times ١ = ١$

أ.مي حواري

---

• 2025 دورثاني/ إذا كان $\text{ق}(٣س-٢) = ١-س^{٧}$ و ما قيمة $\text{ق}(٥)$

د/ -٢ ج/ ٧ ب/ ١ أ/ -١

الحل/ $*\ ٣س-٢ = ٥ \Leftarrow ٣س = ٧ \Leftarrow س = ١$

$\text{ق}(٣س-٢) = ١-س^{٧} \Leftarrow \text{ق}'(٣س-٢) \times ٣ = -٧س^{٦}$

$\text{ق}'(٣-٢) = -(١)^{٦} \Leftarrow \text{ق}'(٥) = -١$

• 2025 دور ثاني / اذا كان $ق(س) = لو_{هـ} هـ^{ل(س)} - لو_{هـ}(هـ^{س} + س)$ ، $ل'(ن) = ٣$ ، ما قيمة $ق'(ن)$

أ/ $٣ - لو_{هـ} ٢$ ب/ $\frac{١}{٢}$ ج/ ١ د/ $\frac{١}{هـ+١}$

الحل/ $ق(س) = \cancel{لو_{هـ} هـ^{ل(س)}} - لو_{هـ}(هـ^{س} + س) \Leftarrow ق(س) = ل(س) - لو_{هـ}(هـ^{س} + س)$

$ق'(س) = ل'(س) - \frac{هـ^{س}+١}{هـ^{س}+س} \Leftarrow ق'(ن) = ل'(ن) - \frac{هـ^{ن}+١}{هـ^{ن}+ن} = ٣ - \frac{١+١}{١}$

$ق'(ن) = ٣ - ٢ = ١$

---

• 2024 نابلس / إذا كان $ق(س) = س^{٢} + أس + ٥$ ، $هـ(٤) = ٢$ ، $هـ'(٤) = ٣$ وكان $(ق \circ هـ)'(٤) = ٢١$ ، ما قيمة الثابت أ

أ/ ٥ ب/ -١ ج/ ١٧ د/ ٣

الحل/ $ق(س) = س^{٢} + أس + ٥ \Leftarrow ق'(س) = ٢س + أ$

$(ق \circ هـ)'(٤) = ق'(هـ(٤))\, هـ'(٤)$

$\frac{٢١}{٣} = ق'(٢) \times \frac{٣}{٣} \Leftarrow ٧ = ق'(٢) \Leftarrow ٧ = ٢ \times ٢ + أ \Leftarrow ٧ = ٤ + أ$ ($-٤$ ، $-٤$)

$\Leftarrow أ = ٣$

أ.مي حواري

---

• خارجي / ليكن $(ق \circ هـ)'(٣) = \frac{٨}{٢٧}$ ، $هـ(س) = \frac{ب}{س}$ ، $ق(س) = س^{٣}$ ما قيمة الثابت ب

أ/ ٣ ب/ ٢٧ ج/ -٨ د/ -٢

الحل/ $ق(س) = س^{٣}$ ، $هـ(س) = \frac{ب}{س} \Leftarrow هـ(٣) = \frac{ب}{٣}$

$ق'(س) = ٣س^{٢}$ ، $هـ'(س) = \frac{-ب}{س^{٢}} \Leftarrow هـ'(٣) = \frac{-ب}{٣^{٢}} = \frac{-ب}{٩}$

* $(ق \circ هـ)'(٣) = ق'(هـ(٣))\, هـ'(٣)$

$\frac{٨}{\cancel{٢٧}_{٣}} = ق'(\frac{ب}{٣}) \times \frac{-ب}{\cancel{٩}_{١}} \Leftarrow \frac{٨}{٣} = ٣(\frac{ب}{٣})^{٢} \times -ب$

$\Leftarrow \frac{٨}{٣} = \frac{\cancel{٣} \times ب^{٢}}{\cancel{٩}_{٣}} \times -ب \Leftarrow \frac{٨}{\cancel{٣}} = \frac{-ب^{٣}}{\cancel{٣}} \Leftarrow -٨ = ب^{٣} \Leftarrow ب = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

---

• خارجي / إذا كان $ص = \sqrt{٨ع}$ ، $ع = جا^{٢}س$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ص = ٢$ علماً بأن $س \in [ن ، \frac{\pi}{٢}]$

أ/ -٢ ب/ ٤ ج/ ٢ د/ ١

الحل/ $ص = \sqrt{٨ع} = \sqrt{٨ جا^{٢}س} = \sqrt{٨} \times \sqrt{جا^{٢}س} = \sqrt{٨} \times |جاس|$ ← جاس (+) في الربع الأول

$ص = ٢\sqrt{٢}\, جاس$ / عندما $ص = ٢ \Leftarrow ٢ = ٢\sqrt{٢}\, جاس$

$\Leftarrow جاس = \frac{١}{\sqrt{٢}} \Leftarrow س = \frac{\pi}{٤} \in [ن ، \frac{\pi}{٢}]$

* $ص = ٢\sqrt{٢}\, جاس \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢\sqrt{٢}\, قتاس \Leftarrow \frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{٤}} = ٢\sqrt{٢}\, قتا(\frac{\pi}{٤}) = ٢\sqrt{٢} \times \frac{١}{\cancel{\sqrt{٢}}} = ٢$

• خارجي/ إذا كان $\frac{د}{دس}(ق(س^٤)) = ٢س^٥ + ٦س^٣$ ، س > ٠ فإن ق(س)

أ/ $٥س^{\frac{٣}{٢}} + ٩\sqrt{س}$ ب/ $س^٤ + ٣س$

ج/ $س^٤ + ٦س$ د/ $٥س^٣ + ٩س$

الحل/ $\frac{د}{دس}(ق(س^٤)) = ٢س^٥ + ٦س^٣$

$ق'(س^٤) \times \frac{٢س}{٢س} = \frac{٢س^٥}{٢س} + \frac{٦س^٣}{٢س}$ ، س ≠ ٠

$ق'(س^٤) = س^٤ + ٣س^٢$

نفرض $س^٤ = ص$

$ق'(س^٤) = (س^٤)^٢ + ٣(س^٤)$

$ق'(ص) = ص^٢ + ٣ص$

أ.مي حواري

---

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية

• 2017 دور أول/ إذا كان المماس لمنحنى $ق(س) = (\frac{٢}{س} + ٣س)^٢$ عند س = ١ يمر بالنقطة (أ، ٥) جد قيمة الثابت أ

الحل/ $ق(١) = (\frac{٢}{١} + ٣)^٢ = ٥^٢ = ٢٥$ ⇐ (١، ٢٥) نقطة التماس

$ق'(س) = ٢(\frac{٢}{س} + ٣س)(\frac{-٢}{س^٢} + ٣)$

ميل المماس = $ق'(١) = ٢(٢+٣)(-٢+٣) = ٢ \times ٥ \times ١ = ١٠$

(١، ٢٥) (أ، ٥)

ميل المماس = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ⇐ $\frac{٥ - ٢٥}{أ - ١} = ١٠$ ⇐ $\frac{\cancel{-٢٠}^{-٢}}{أ - ١} = \cancel{١٠}^{١}$ ⇐ $أ - ١ = -٢$

⇐ $أ = -١$

---

• 2019 دور ثاني/ إذا كان $ص = ل^٤ - ٢ل + ١$ ، $ل = ٣س - ١$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ١

الحل/ $ص = ل^٤ - ٢ل + ١$ $ل = ٣س - ١$

$\frac{دص}{دل} = ٤ل^٣ - ٢$ $\frac{دل}{دس} = ٣$

* عندما س = ١ ⇐ $ل = ٣ \times ١ - ١ = ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دل} \times \frac{دل}{دس}$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = (٤ل^٣ - ٢) \times ٣ \Big|_{ل=٢} = (٤ \times ٢^٣ - ٢) \times ٣ = ٣٠ \times ٣ = ٩٠$

---

• 2020 دور ثاني/ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ص = جتا^٣(س^٤ - ١)^٢$

الحل/ $ص = جتا^٣(س^٤ - ١)^٢$

$\frac{دص}{دس} = ٣جتا^٢(س^٤ - ١)^٢ \times -جا(س^٤ - ١)^٢ \times ٢(س^٤ - ١) \times ٢س$

$= -١٢جتا^٢(س^٤ - ١)^٢ جا(س^٤ - ١) \times س(س^٤ - ١)$

• 2020 دور ثاني / إذا كان الاقترانان $ق(س) = \frac{ب}{س}$ ، $هـ(س) = س^2 - 2$ وكان $(ق \circ هـ)'(1) = 2$ ما قيمة الثابت ب

الحل/ $ق(س) = \frac{ب}{س}$ ، $هـ(س) = س^2 - 2$

$ق'(س) = \frac{-ب}{س^2}$ ، $هـ'(س) = 2س \Leftarrow هـ'(1) = 2 \times 1 = 2$

$هـ''(س) = 2$

$* (ق \circ هـ)'(1) = ق'(هـ'(1))\, هـ''(1)$

$\cancel{2} = ق'(2) \times \cancel{2} \Leftarrow 1 = ق'(2) \Leftarrow 1 = \frac{-ب}{4} \Leftarrow ب = -4$

---

• 2020 دور ثاني / إذا كان $ق(س)$ قابلاً للاشتقاق حيث $2ق(2) = 4ق'(4) = 8$ ، $ق'(2) = 10$

أوجد $\lim_{س \to 2} \frac{(ق \circ ق)(س) - ق(ق(2))}{س^2 + س - 6}$

الحل/ $\lim_{س \to 2} \frac{ق(ق(س)) - ق(ق(2))}{س^2 + س - 6} = \frac{ق(ق(2)) - ق(ق(2))}{2^2 + 2 - 6} = \frac{ن}{ن}$

باستخدام لوبيتال/

$\lim_{س \to 2} \frac{ق'(ق(س))\, ق'(س)}{2س + 1} = \frac{ق'(ق(2))\, ق'(2)}{2 \times 2 + 1} = \frac{ق'(4) \times 10}{5} = \frac{\cancel{10}^{3} \times 2}{\cancel{5}_{1}}$

$= 2 \times 3 = 6$

• ملاحظة/ $2ق(2) = 8 \Leftarrow ق(2) = 4$ / $4ق'(4) = 8 \Leftarrow ق'(4) = 2$

---

• 2020 دور ثالث / أوجد $\frac{دص}{دس}$ إزاء النقطة المحددة :

أ.مي حواري

$ص = ع^2 - 2ع$ ، $ع = 4 + ظا(2س)$ عندما $س = ن$

الحل/ $ص = ع^2 - 2ع$ ، $ع = 4 + ظا(2س)$

$\frac{دص}{دع} = 2ع - 2$ ، $\frac{دع}{دس} = قا^2(2س) \times 2$

* عندما $س = ن \Leftarrow ع = 4 + ظا(ن) = 4 + ن = 4$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = (2ع - 2) \times 2قا^2(2س)$ ، $س = ن$ ، $ع = 4$

$\frac{دص}{دس} = (2 \times 4 - 2) \times 2 \times قا^2(ن) = 6 \times 2 \times 1 = 12$

---

• 2021 دور ثاني / ليكن $ق(س) = \frac{-2}{س^2 - 2}$ ، $ل(س) = لو_{هـ} س^2$ ، ما قيمة $(ق \circ ل)'(هـ)$

الحل/

$ق(س) = \frac{-2}{س^2 - 2} \Leftarrow ق'(س) = \frac{+2 \times 2س}{(س^2 - 2)^2} = \frac{4س}{(س^2 - 2)^2}$

أ.مي حواري

$ل(س) = لو_{هـ} س^{٢} = ٢ لو_{هـ} س \Leftarrow ل'(س) = \frac{٢}{س}$

* $ل(هـ) = ٢ لو_{هـ} هـ = ٢ \times ١ = ٢$ / $ل'(هـ) = \frac{٢}{هـ}$

المطلوب/ $(ق \circ ل)'(هـ) = ق'(ل(هـ))\, ل'(هـ) = ق'(٢) \times \frac{٢}{هـ}$

$= \frac{٤ \times ٢}{(٢^{٢}-٢)^{٢}} \times \frac{٢}{هـ} = \frac{\cancel{٤} \times ٢ \times ٢}{\cancel{٤} \times هـ} = \frac{٤}{هـ}$

---

• 2021 دور أول/ إذا كان $ق(س) = س\, ل(س^{٢}+١)$
اعتمد على الجدول لإيجاد قيمة $ق''(١)$

| $ل(٢)$ | $ل'(٢)$ | $ل''(٢)$ |
|---|---|---|
| ٢ | -٣ | ٤ |

الحل/ $ق(س) = س\, ل(س^{٢}+١)$

$ق'(س) = س\, ل'(س^{٢}+١) \times ٢س + ل(س^{٢}+١) \times ١$

$\Leftarrow ق'(س) = ٢س^{٢}\, ل'(س^{٢}+١) + ل(س^{٢}+١)$

$ق''(س) = ٢س^{٢}\, ل''(س^{٢}+١) \times ٢س + ل'(س^{٢}+١) \times ٤س + ل'(س^{٢}+١) \times ٢س$ .

$ق''(١) = ٢\, ل''(٢) \times ٢ + ٤\, ل'(٢) + ٢\, ل'(٢)$

$= ٤ \times ٤ + ٤ \times -٣ + ٢ \times -٣ = ١٦ - ١٢ + -٦ = -٢$

---

• 2021 دور أول/ إذا كان $ق(س) = ٣س \sqrt{س^{٢}+٥}$ ما قيمة $ق'(٢)$

الحل/ $ق'(س) = ٣س \times \frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{س^{٢}+٥}} + \sqrt{س^{٢}+٥} \times ٣$

$ق'(٢) = \frac{٣ \times ٢ \times ٢}{\sqrt{٢^{٢}+٥}} + ٣\sqrt{٢^{٢}+٥} = \frac{\cancel{٣} \times ٤}{\cancel{٣}} + ٣ \times ٣$

$\Leftarrow ق'(٢) = ٤ + ٩ = ١٣$

---

• 2021 دور ثاني/ إذا كان $ل(س) = ق^{٣}(س) - ق(س^{٣})$ ما قيمة $ل'(١)$ علماً بأن $ق(١) = ٢ق'(١) = -٤$

الحل/ $ق(١) = -٤$ / $٢ق'(١) = -٤ \Leftarrow ق'(١) = -٢$

$ل(س) = ق^{٣}(س) - ق(س^{٣})$

$ل'(س) = ٣ق^{٢}(س)\, ق'(س) - ق'(س^{٣}) \times ٣س^{٢}$

$ل'(١) = ٣ق^{٢}(١)\, ق'(١) - ٣ق'(١) = ٣ \times (-٤)^{٢} \times -٢ - ٣ \times -٢$

$\Leftarrow ل'(١) = -٦ \times ١٦ + ٦ = -٩٦ + ٦ = -٩٠$

---

• 2021 دور ثاني/ إذا كان $ص = ع^{٢} - \frac{١}{ع}$ ، $ع = س^{٢}+١$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = -١$

الحل/ $ص = ع^{٢} - \frac{١}{ع}$ ، $ع = س^{٢}+١$

$\frac{دص}{دع} = ٢ع + \frac{١}{ع^{٢}}$ ، $\frac{دع}{دس} = ٢س$

عندما $س = -١ \Leftarrow ع = (-١)^٢ + ١ = ١ + ١ = ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \left(٢ع + \frac{١}{ع^٢}\right) \times ٢س \Big|_{\substack{س=-١ \\ ع=٢}}$

$\frac{دص}{دس} = \left(٢ \times ٢ + \frac{١}{٢^٢}\right) \times ٢ \times -١ = \left(٤ + \frac{١}{٤}\right) \times -٢ = -٨ + \frac{-١}{٢} = -٨,٥$

---

• 2022 دور أول / إذا كان $ق(س) = هـ^٢(س) + ل(س^٢) + ٣$ جد $ق'(١)$ إذا كان $ق(١) = ١٢$

$ل(١) = ٠$ ، $هـ'(١) = ٢ل'(١) = -٦$ ، $هـ(١) > ٠$

الحل / * $ق(س) = هـ^٢(س) + ل(س^٢) + ٣ \Big|_{س=١}$

$ق(١) = هـ^٢(١) + ل(١) + ٣ \Leftarrow ١٢ = هـ^٢(١) + ٣ \Leftarrow \sqrt{٩} = \sqrt{هـ^٢(١)}$

$هـ(١) = ٣$ ✓ أو $هـ(١) = -٣$ مرفوض لأن $هـ(١) > ٠$

* $ق(س) = هـ^٢(س) + ل(س^٢) + ٣$

$ق'(س) = ٢هـ(س)هـ'(س) + ل'(س^٢) \times ٢س$

$ق'(١) = ٢هـ(١)هـ'(١) + ٢ل'(١) = ٢ \times ٣ \times -٦ + ٢ \times -٣$

$= -٣٦ - ٦ = -٤٢$

---

• 2022 دور ثاني / إذا كان $ل(س) = (ق(س) - س^٢)^٣$ وكان $ق'(١) = -٣$ ، $ل(١) = ٢٧$

ما قيمة $ل'(١)$

الحل / $ل(س) = (ق(س) - س^٢)^٣ \Leftarrow ل(١) = (ق(١) - ١)^٣ \Leftarrow ٢٧ = (ق(١) - ١)^٣ \quad \left(\frac{١}{٣}\right)$

$\Leftarrow ٣ = ق(١) - ١ \Leftarrow ٤ = ق(١)$

$+١ \quad +١$

أ.مي حواري

* $ل(س) = (ق(س) - س^٢)^٣$

$ل'(س) = ٣(ق(س) - س^٢)^٢ (ق'(س) - ٢س)$

$ل'(١) = ٣(ق(١) - ١)^٢ (ق'(١) - ٢)$

$٣(٤ - ١)^٢ (-٣ - ٢) = ٣ \times ٩ \times -٥ = -١٣٥$

---

• 2022 دور ثاني / إذا كان $ص = ظاس + \frac{١}{٣}ظا^٣س$ أثبت أن $\frac{ص''}{ص'} = ٤ظاس$

الحل /

$ص' = قا^٢س + \frac{٣}{٣}ظا^٢س \times قا^٢س$ اخراج $قا^٢س$ عامل مشترك .

$ص' = قا^٢س(١ + ظا^٢س) = قا^٢س \times قا^٢س = قا^٤س$

$ص' = قا^٤س$

$ص'' = ٤قا^٣س \times قاس ظاس$

$\frac{ص''}{ص'} = \frac{٤قا^٤س ظاس}{قا^٤س} = ٤ظاس$ #

• 2022 دور ثالث/ إذا كان ق(س) = ظاس ، هـ(س) = س² − ٤ ، ما قيمة (ق∘هـ)′(٢)

الحل/ ق(س) = ظاس ، هـ(س) = س² − ٤ ⇐ هـ(٢) = ٢² − ٤ = ٠

قَ(س) = قا²س ، هـَ(س) = ٢س ⇐ هـَ(٢) = ٢ × ٢ = ٤

(ق∘هـ)′(٢) = قَ(هـ(٢)) هـَ(٢) = قَ(٠) × ٤

= قا²(٠) × ٤ = ١ × ٤ = ٤

---

• 2023 دور أول/ إذا كان ص = أع² − ١ ، ع = س² + ١ ، جد الثابت أ إذا علمت أن $\frac{دص}{دس}$ = ٢٤ عندما س = ١

الحل/ ص = أع² − ١ ، ع = س² + ١

$\frac{دص}{دع}$ = ٢أع ، $\frac{دع}{دس}$ = ٢س

* عندما س = ١ ⇐ ع = ١ + ١ = ٢

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = ٢أع × ٢س | س = ١ ، ع = ٢ ⇐ ٢٤ = ٤أ × ٢ × ١

⇐ $\frac{٢٤}{٨} = \frac{٨أ}{٨}$ ⇐ أ = ٣

---

• 2023 دور ثاني/ إذا كان ص = ع² − ٥ع ، س = ٣ع − ١ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٥

الحل/ ص = ع² − ٥ع ، س = ٣ع − ١

$\frac{دص}{دع}$ = ٢ع − ٥ ، $\frac{دس}{دع}$ = ٣

$\frac{دع}{دس} = \frac{١}{٣}$

• عندما س = ٥ ⇐ ٥ = ٣ع − ١ ⇐ $\frac{٦}{٣} = \frac{٣ع}{٣}$ ⇐ ع = ٢

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = (٢ع − ٥) × $\frac{١}{٣}$ | ع = ٢ = (٢ × ٢ − ٥) × $\frac{١}{٣}$ = $\frac{-١}{٣}$

---

• 2023 دور ثاني/ إذا كان ص = أجا(٢س) − ب قبا(٢س) ، أثبت أن

(صَ)² + ٤ص² = ٤أ² + ٤ب²

أ.مي حواري

الحل/ صَ = ٢أقبا(٢س) + ٢ب جا(٢س)

(صَ)² = (٢أقبا(٢س) + ٢ب جا(٢س))²

⇐ (صَ)² = ٤أ² قبا²(٢س) + ٢ × ٢أ × ٢ب قبا(٢س) جا(٢س) + ٤ب² جا²(٢س)

⇐ (صَ)² = ٤أ² قبا²(٢س) + ٨أب جا(٢س) قبا(٢س) + ٤ب² جا²(٢س) .

* ص = أجا(٢س) − ب قبا(٢س) ⇐ (ص)² = (أجا(٢س) − ب قبا(٢س))²

ص² = أ² جا²(٢س) − ٢أب جا(٢س) قبا(٢س) + ب² قبا²(٢س)

٤ص² = ٤أ² جا²(٢س) − ٨أب جا(٢س) قبا(٢س) + ٤ب² قبا²(٢س)

$(ص')^2 + 4ص^2 = 4أ^2 جتا^2(2س) + 8أب\, جتا(2س)\, جا(2س) + 4ب^2 جا^2(2س) + 4أ^2 جا^2(2س) - 8أب\, جا(2س)\, جتا(2س) + 4ب^2 جتا^2(2س)$

$\Leftarrow (ص')^2 + 4ص^2 = 4أ^2(جتا^2(2س) + جا^2(2س)) + 4ب^2(جا^2(2س) + جتا^2(2س))$

$= 4أ^2(1) + 4ب^2(1) = 4أ^2 + 4ب^2$ #

---

• 2024 دور أول/ إذا كان $ق(س) = س^3 + 4س - 2$ ، $هـ(س) = \sqrt{أس}$ ، $(ق \circ هـ)'(2) = 18$ ما قيمة الثابت أ

الحل/ $ق(س) = س^3 + 4س - 2$

$ق'(س) = 3س^2 + 4$

$ق''(س) = 6س$

$هـ(س) = \sqrt{أس} \Leftarrow هـ(2) = \sqrt{2أ}$

$هـ'(س) = \frac{أ}{2\sqrt{أس}} \Leftarrow هـ'(2) = \frac{أ}{2\sqrt{2أ}}$

أ.مي حواري

$(ق \circ هـ)'(2) = ق''(هـ(2))\, هـ'(2)$

$18 = ق''(\sqrt{2أ}) \times \frac{أ}{2\sqrt{2أ}} \Leftarrow 18 = 6\sqrt{2أ} \times \frac{أ}{2\sqrt{2أ}}$ ، $أ \neq 0$

$\Leftarrow 18 = 3أ \Leftarrow 6 = أ$

---

• 2024 دور ثاني/ إذا كان $ق(س) = \frac{ل(س^2+1)}{س}$ ، جد $ق'(1)$ علماً بأن $ل(2) = 0$ ، $ل'(2) = -1$

الحل/

$ق'(س) = \frac{س ل'(س^2+1) \times 2س - ل(س^2+1)}{س^2} \Leftarrow ق'(1) = \frac{2ل'(2) - ل(2)}{(1)^2}$

$\Leftarrow ق'(1) = 2 \times -1 - 0 = -2 - 0 = -7$

---

• 2024 دور ثالث/ اذا كان $ص = ع^2 + 3ع$ ، $ع = \frac{س+1}{س-1}$ ، $س \neq 1$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = 0$

الحل/ $ص = ع^2 + 3ع$

$\frac{دص}{دع} = 2ع + 3$

$\frac{دع}{دس} = \frac{(س-1) - (س+1)}{(س-1)^2} = \frac{س - 1 - س - 1}{(س-1)^2}$

$\Leftarrow \frac{دع}{دس} = \frac{-2}{(س-1)^2}$

عندما $س = 0 \Leftarrow ع = \frac{1}{-1} = -1$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = (2ع + 3) \times \frac{-2}{(س-1)^2}$ ، $س = 0$ ، $ع = -1$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = (-2 + 3) \times \frac{-2}{(-1)^2} = 1 \times -2$

$= -2$

• 2025 دور ثاني / إذا كان $ص = ق(هـ(\frac{س}{ب}))$ وكانت $ص'|_{س=1} = 2$ ، $هـ(\frac{1}{ب}) = \frac{1}{2}$

$هـ'(\frac{1}{ب}) = -1$ ، $ق'(\frac{1}{2}) = 2$ ، ما قيمة الثابت ب

الحل/ $ص = ق(هـ(\frac{س}{ب})) \Leftarrow ص' = ق'(هـ(\frac{س}{ب}))\, هـ'(\frac{س}{ب}) \times \frac{1}{ب}$

$ص'|_{س=1} = ق'(هـ(\frac{1}{ب}))\, هـ'(\frac{1}{ب}) \times \frac{1}{ب}$

$\Leftarrow 2 = ق'(\frac{1}{2}) \times -1 \times \frac{1}{ب} \Leftarrow \cancel{2} = \cancel{2} \times -1 \times \frac{1}{ب} \Leftarrow +1 = \frac{-1}{ب} \Leftarrow ب = -1$

---

• 2025 شمال الخليل / إذا كان $ق(س) = 1 - هـ^{س}$ ، $ع(س) = س^3 - س$ جد $(ق \circ ع)'(1)$

الحل/ $ق(س) = 1 - هـ^{س}$ ، $ع(س) = س^3 - س \Leftarrow ع(1) = 1 - 1 = 0$

$ق'(س) = -هـ^{س}$ ، $ع'(س) = 3س^2 - 1 \Leftarrow ع'(1) = 3 - 1 = 2$

$(ق \circ ع)'(1) = ق'(ع(1))\, ع'(1)$

$= ق'(0) \times 2 = -هـ^{0} \times 2 = -1 \times 2 = -2$

أ.مي حواري

---

• خارجي / إذا كان $م(س) = جاس + أ\, جتا(أس)$ ، $جتا(أس) \neq 0$ وكان $م''(س) = -م(س)$

ما قيمة / قيم الثابت أ

الحل/ $م'(س) = جتاس - أ \times أ\, جا(أس)$

$م''(س) = -جاس - أ^2 \times أ\, جتا(أس)$

$\Leftarrow م''(س) = -م(س) \Leftarrow -\cancel{جاس} - أ^3\, جتا(أس) = -\cancel{جاس} - أ\, جتا(أس)$

$\Leftarrow -أ^3\, \underbrace{جتا(أس)}_{-جتا(أس)} = -أ\, \underbrace{جتا(أس)}_{-جتا(أس)}$ ، $جتا(أس) \neq 0$

$\Leftarrow أ^3 = أ \Leftarrow أ^3 - أ = 0 \Leftarrow أ(أ^2 - 1) = 0 \Leftarrow أ(أ-1)(أ+1) = 0$

إما $أ = 0$ أو $أ - 1 = 0 \Leftarrow أ = 1$ أو $أ + 1 = 0 \Leftarrow أ = -1$

$\Leftarrow أ = \{0 ، 1 ، -1\}$

---

• خارجي تفوق / إذا كان $ع = \frac{ص+1}{ص-1}$ ، $ص = \frac{س+4}{س-2}$ أثبت أن $\frac{دع}{دس} = \frac{1}{3}$

الحل/

$ع = \frac{ص+1}{ص-1}$ نعوض $ص = \frac{س+4}{س-2}$

$ع = \left(\frac{س+4}{س-2} + 1\right) \div \left(\frac{س+4}{س-2} - 1\right)$ (توحيد مقامات)

$ع = \left(\frac{س+4+س-2}{س-2}\right) \div \left(\frac{\cancel{س}+4-\cancel{س}+2}{س-2}\right) = \frac{2س+2}{\cancel{س-2}} \times \frac{\cancel{س-2}}{6}$

$ع = \frac{2س}{6} + \frac{2}{6} \Leftarrow ع = \frac{1}{3}س + \frac{1}{3} \Leftarrow \frac{دع}{دس} = \frac{1}{3}$ #

• خارجي تفوق/ إذا كان $-٤\text{ق}'(٢) = ٣\text{ق}(٢) = ١٢$ ، $٢\text{ق}'(٤) = ١٤$ أوجد قيمة

$$\lim_{\text{س}\to ٢}\left(\frac{(\text{ق}\circ\text{ق})(\text{س}) - \text{ق}(\text{ق}(٢))}{\text{س}^٢+\text{س}-٦}\right)$$

الحل/ $-٤\text{ق}'(٢) = ١٢ \Leftarrow \text{ق}'(٢) = -٣$ / $٣\text{ق}(٢) = ١٢ \Leftarrow \text{ق}(٢) = ٤$

$٢\text{ق}'(٤) = ١٤ \Leftarrow \text{ق}'(٤) = ٧$

$$\lim_{\text{س}\to ٢}\frac{\text{ق}(\text{ق}(\text{س})) - \text{ق}(\text{ق}(٢))}{\text{س}^٢+\text{س}-٦} = \frac{\text{ق}(\text{ق}(٢)) - \text{ق}(\text{ق}(٢))}{٢^٢+٢-٦} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}}$$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{\text{س}\to ٢}\frac{\text{ق}'(\text{ق}(\text{س}))\,\text{ق}'(\text{س})}{٢\text{س}+١} = \frac{\text{ق}'(\text{ق}(٢))\,\text{ق}'(٢)}{٢\times٢+١} = \frac{\text{ق}'(٤)\times -٣}{٥} = \frac{٧\times -٣}{٥}$

$$= \frac{-٢١}{٥}$$

---

أ.مي حواري

وما ضَرَّك إن لَم يعلَم عن تفاصيلك أحد، ألا يكفيك أنّك تجتهد؟
ألا يُغنيك أنّك تحاول؟ ألاّ تؤمن أنّ الله يعلم! إذًا دَع عنكَ
انشغالاً بالآخرين وانشَغِل بك، استمتع برحلتك، لا تدري متىٰ

# الوحدة الثانية | تطبيقات التفاضل

## " الاقترانات المتزايدة والمتناقصة "

### • القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة

• 2019 دور أول/ إذا كان ق(س) = هـ^س − س ، س ∈ ح ، ما مجال تزايد ق(س)

أ/ ∅ ب/ ح ج/ ]−∞ ، ٠] د/ [٠ ، ∞[

الحل/ ق(س) = هـ^س − س ، متصل على ح حاصل طرح متصلين (هـ^س و ك ح)

قَ(س) = هـ^س − ١ = ٠ ⇐ هـ^س = ١ ⇐ هـ^س = هـ^٠ «للأساسات متساوية فإن الأسس متساوية»

س = ٠

ضا اشارة قَ(س)

ق(س) متزايد على [٠ ، ∞[

سلوك ق
اشارة قَ



---

• 2019 دور ثاني/ اذا كان ق(س) = س − ٢جاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{2}$] ما مجال تناقص ق(س)

أ/ [$\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{2}$] ب/ [٠ ، $\frac{\pi}{2}$] ج/ [٠ ، $\frac{\pi}{3}$] د/ ]٠ ، $\frac{\pi}{3}$[

الحل/ ق(س) = س − ٢جاس متصل على [٠ ، $\frac{\pi}{2}$] حاصل طرح متصلين (لوح و جاس)

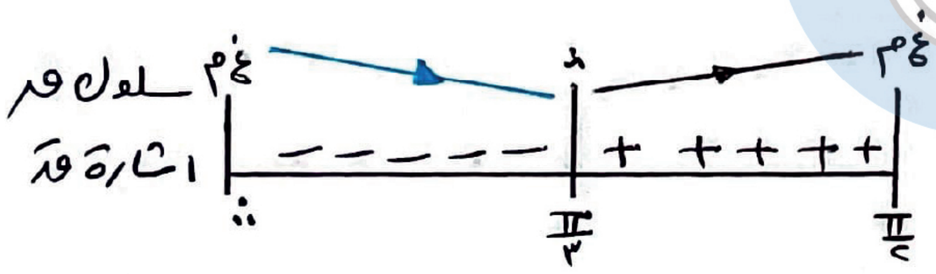
قَ(س) = ١ − ٢جتاس = ٠ ⇐ ١ = ٢جتاس ⇐ $\frac{1}{2}$ = جتاس

⇐ س = $\frac{\pi}{3}$ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[

ضا اشارة قَ(س) :

ق(س) متناقص على [٠ ، $\frac{\pi}{3}$]

سلوك ق
اشارة قَ



أ.مي حواري

---

• 2020 دور أول/ إذا كان ق(س) = $\frac{س}{س+1}$ ، س ≠ −١ ما العبارة الصحيحة فيما يلي :

أ/ ق(س) متزايد على ح

ب/ ق(س) متزايد على ]−∞ ، −١[ ∪ ]−١ ، ∞[

ج/ ق(س) متناقص على ح

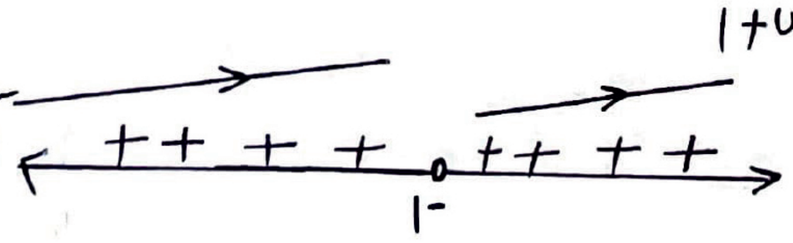
د/ ق(س) متناقص على ]−∞ ، −١[ ∪ ]−١ ، ∞[

الحل/ ق(س) = $\frac{س}{س+1}$ = $\frac{س+1-1}{س+1}$ لتسهيل عملية الاشتقاق

ق(س) = $\frac{س+1}{س+1}$ − $\frac{1}{س+1}$ = ١ − $\frac{1}{س+1}$

قَ(س) = $\frac{1}{(س+1)^2}$ ≠ ٠ ∴

سلوك ق
اشارة قَ



---

• 2020 دور ثاني/ اذا كان ق(س) = لو_هـ س ، ما المجال الذي يكون فيه ق(س) متزايد

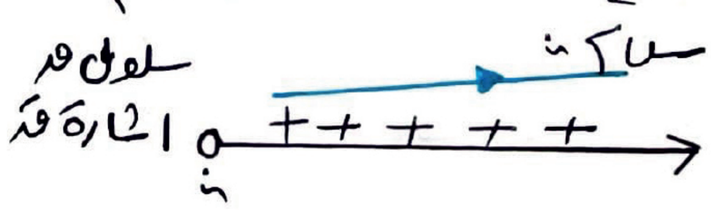
أ/ ]٠ ، ∞[ ب/ ]٠ ، ∞[ ج/ ح د/ ح − {٠}

الحل/ أولاً/ نحدد مجال ق(س) : لو_هـ س مجاله س > ٠

قَ(س) = $\frac{1}{س}$ ≠ ٠ ∴

⇐ ق(س) متزايد على ]٠ ، ∞[

سلوك ق
اشارة قَ



• 2021 دور أول / إذا كان $ق(س) = ه^{س} - ه^{-س}$ وما العبارة الصحيحة فيما يلي :

أ/ ق متزايد على $]-\infty, \infty[$ ب/ ق متزايد على $]-\infty, 0]$ متناقص على $[0, \infty[$

ج/ ق متناقص على $]-\infty, 0]$ متزايد على $[0, \infty[$ د/ ق متناقص على $]-\infty, \infty[$

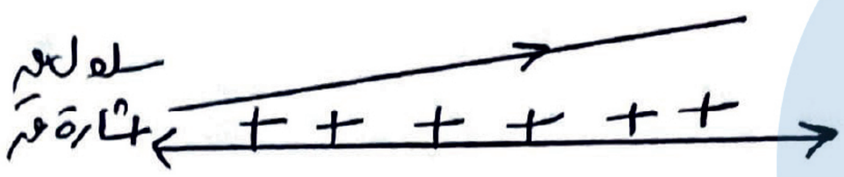
الحل / $ق(س) = ه^{س} - ه^{-س}$ متصل على ح

$ق'(س) = ه^{س} + ه^{-س} \neq 0$

$ق'(س) = ه^{س} + \frac{1}{ه^{س}}$

موجب + موجب $\neq$ صفر

إشارة $ق'$ / $ق(س)$ متزايد على ح




---

• 2021 دور ثاني / إذا كان $ق(س) = (س^{3}-1)^{3}(س-2)^{4}$ ما المجال الذي يكون فيه $ق(س)$ متناقصاً

أ/ $]-\infty, 2]$ ب/ $]-\infty, -1]$ ج/ $[-1, 2]$ د/ $[1, 2]$

الحل / $ق(س) = (س^{3}-1)^{3}(س-2)^{4} = 0$

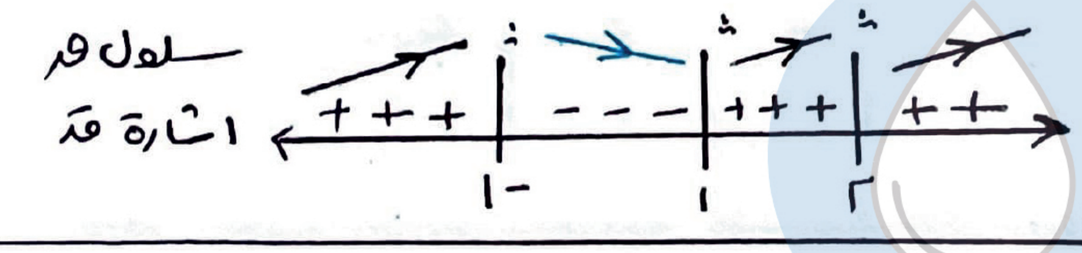
إما $س^{3}-1 = 0 \Leftarrow س^{3} = 1 \Leftarrow س = 1$

أو $س-2 = 0 \Leftarrow س = 2$

$س = -1$

من اشارة $ق(س)$ :

$ق(س)$ متناقص على $[-1, 1]$




---

• 2022 دور أول / إذا كان $ق(س) = 3س^{4} - س^{5} - 5$ ما المجال الذي يكون فيه $ق(س)$ متزايداً

أ/ $]-\infty, 2]$ ب/ $]-\infty, 0]$ ج/ $[-1, 1]$ د/ $[0, 2]$

الحل / $ق(س) = 3س^{4} - س^{5} - 5$ متصل على ح لأنه كثير حدود

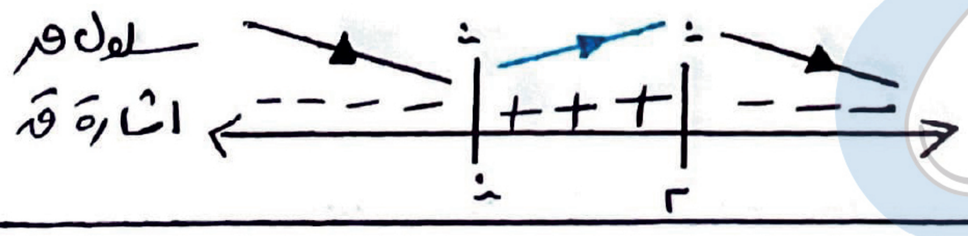
$ق'(س) = 12س^{3} - 5س^{4}$

$= س^{3}(12 - 5س)$

إما $س^{3} = 0 \Leftarrow س = 0$ أو $12 - 5س = 0 \Leftarrow س = \frac{12}{5} = 2$

من اشارة $ق'(س)$ :

$ق(س)$ متزايد على $[0, 2]$




---

• 2022 دور ثاني / إذا كان $ق(س) = س^{3} + 12س - 24$ ما العبارة الصحيحة فيما يلي :

أ/ $ق(س)$ متزايد على ح ب/ $ق(س)$ متزايد على $]-\infty, -2[ \cup ]2, \infty[$

ج/ $ق(س)$ متناقص على ح د/ $ق(س)$ متناقص على $[-2, 2]$

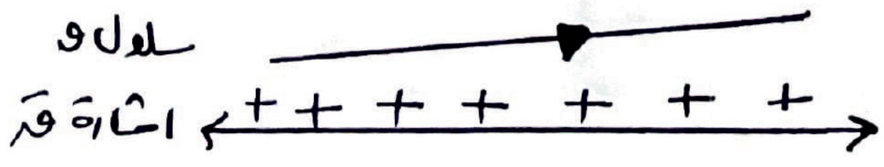
الحل / $ق(س) = س^{3} + 12س - 24$ كثير حدود متصل على ح

$ق'(س) = 3س^{2} + 12 = 0$

$3س^{2} = -12 \Leftarrow س^{2} = -4$ X

من اشارة $ق'(س)$ /

$ق(س)$ متزايد على ح.



• 2023 دور أول/ اذا كان ق(س) متزايد على ح ، ك'(س) = (٢س − ٤) ق'(س² − ٤س)

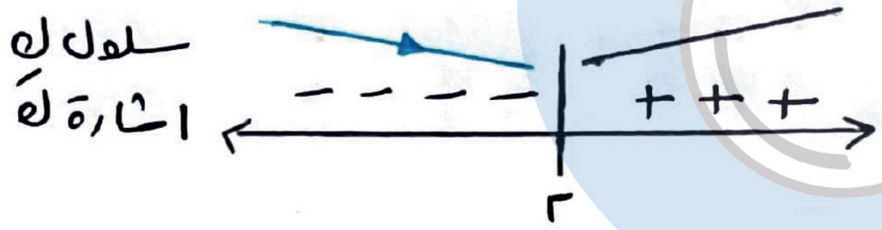
ما الفترة الذي يكون فيها ك(س) متناقصاً :

أ/ ]٢، ∞[ ب/ ]−∞، ٢] ج/ [٠، ٤] د/ ]٤، ∞[

الحل/ ق(س) متزايد على ح ⇐ ق'(س) > ٠ على ح

ك'(س) = (٢س − ٤) ق'(س² − ٤س) = ٠

إما ٢س − ٤ = ٠ ⇐ ٢س = ٤ ⇐ س = ٢ أو ق'(س² − ٤س) = ٠ × ق'(س) > ٠




ك'(س) < ٠ على ]−∞، ٢]

⇐ ك(س) متناقص على ]−∞، ٢]

---

• 2025 جنوب نابلس/ إذا كان ق(س) اقتران لـ ح ومتزايد على [−٤، −٢] ويقع في الربع الثاني وكان هـ(س) = س / ق(س) ، أي العبارات التالية صحيحة :

أ/ هـ(س) متناقص على [−٤، −٢]

ب/ هـ(س) متناقص على ]−٤، −٢[

ج/ هـ(س) متزايد على ح .

د/ هـ(س) متزايد على [−٤، −٢]

الحل/ ق(س) متزايد على [−٤، −٢] ⇐ ق'(س) > ٠ على ]−٤، −٢[

ق(س) يقع في الربع الثاني ⇐ ق(س) > ٠

هـ(س) = س / ق(س) متصل على [−٤، −٢] حاصل قسمة متصلين و ق(س) ≠ ٠

س ∈ [−٤، −٢]

هـ'(س) = (ق(س) × ١ − س ق'(س)) / ق²(س) = (موجب) − (سالب)(موجب) / موجب = (موجب + موجب) / موجب

هـ'(س) > ٠ في ]−٤، −٢[ ⇐ هـ(س) متزايد على [−٤، −٢]

---

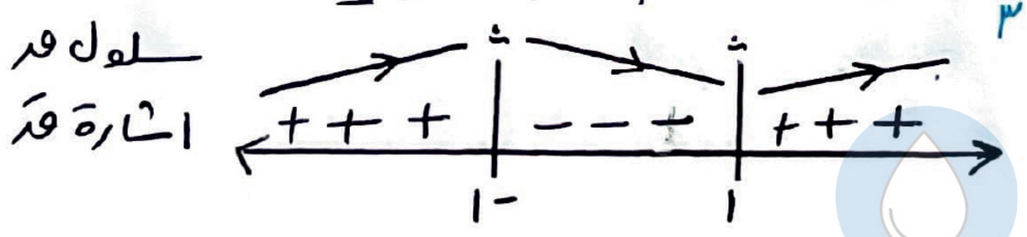
• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية :

• 2019 دور أول/ عين مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س³ − ٣س + ٢ ، س ∈ ح

الحل/ ق(س) = س³ − ٣س + ٢ متصل على ح ، لأنه كثير حدود .

ق'(س) = ٣س² − ٣

ن = ٣س² − ٣ ⇐ ٣/٣ = ٣س² ⇐ س² = ١ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين




س = ١ أو س = −١

من اشارة ق'(س) :

ق(س) متزايد على ]−∞، −١] ∪ [١، ∞[

ق(س) متناقص على [−١، ١]

أ.مي حواري

• 2019 دور ثاني / عين فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س) = هـ^{٢س} - ٢هـ^{س}$ ، $س \in ح$

الحل / $ق(س) = هـ^{٢س} - ٢هـ^{س}$ متصل على ح "حاصل طرح متصلين $هـ^{س}$"

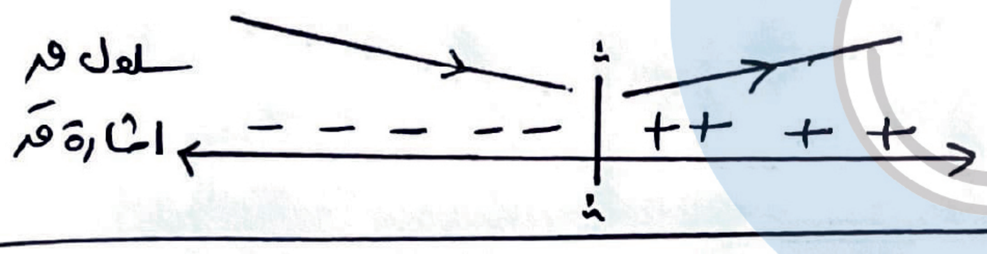
$ق'(س) = ٢هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} = ٠$ اخراج $٢هـ^{س}$ عامل مشترك

$٢هـ^{س}(هـ^{س} - ١) = ٠$

إما $٢هـ^{س} \neq ٠$ ، $هـ^{س} > ٠$ دائماً

أو $هـ^{س} - ١ = ٠ \Leftarrow هـ^{س} = ١ \Leftarrow هـ^{س} = هـ^{٠} \Leftarrow س = ٠$

من اشارة $ق'(س)$ :




$ق(س)$ متزايد على $[٠ ، ∞[$ ومتناقص على $]-∞ ، ٠]$

---

• 2019 دور ثالث / عين فترات التزايد والتناقص للاقتران : $ق(س) = س^{٣} - ٣س$ ، $س \in [-٢ ، ٢]$

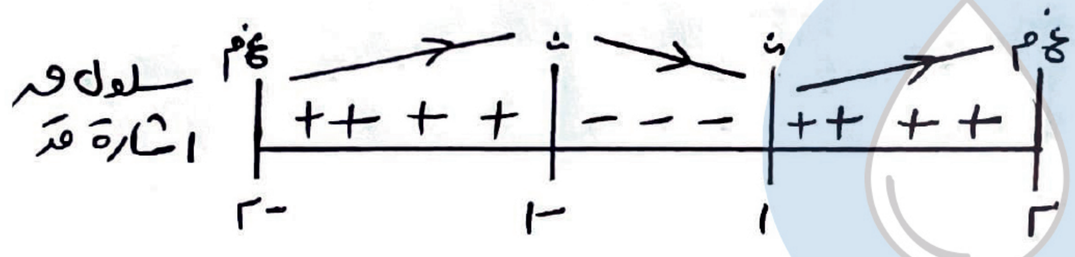
الحل / $ق(س) = س^{٣} - ٣س$ متصل على $[-٢ ، ٢]$ لأنه ك ح

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٣ = ٠ \Leftarrow \frac{٣}{٣}س^{٢} = \frac{٣}{٣} \Leftarrow س^{٢} = ١$ ، $س = ١ \in ]-٢ ، ٢[$ ، $س = -١ \in ]-٢ ، ٢[$

من اشارة $ق'(س)$ :

• $ق(س)$ متناقص على $[-١ ، ١]$

• $ق(س)$ متزايد على $[١ ، ٢] \cup [-٢ ، -١]$



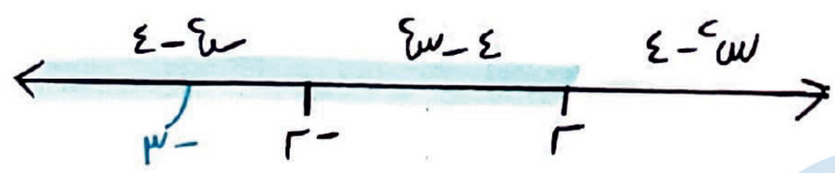

أ.مي حواري

---

• 2020 دور أول / إذا كان $ق(س) = |س^{٢} - ٤|$ ، $س \in [-٣ ، ٢]$ أوجد فترات التزايد والتناقص لـ $ق(س)$

الحل / $ق(س) = |س^{٢} - ٤|$ متصل على $[-٣ ، ٢]$ ، قيمة مطلقة لكثير حدود متصل .

$س^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ٤$ ، $س = ٢$ ، $س = -٢$




$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٤ & ، -٣ \leq س < -٢ \\ ٤ - س^{٢} & ، -٢ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & ، -٣ < س < -٢ \\ -٢س & ، -٢ < س < ٢ \\ غ م & ، س = \{-٣ ، -٢ ، ٢\} \end{cases}$

$ق'(-٢)^{+} = -٢ \times -٢ = +٤$

$ق'(-٢)^{-} = ٢ \times -٢ = -٤$

$ق'(-٢)$ غ م

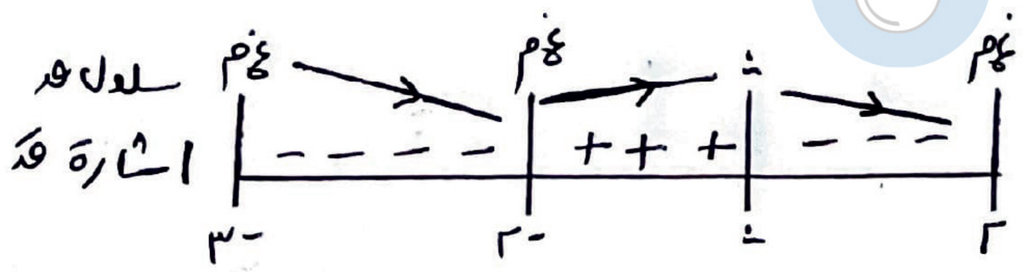
$\neq$

• $ق'(س) = ٠$

• عندما $-٣ < س < -٢$ / $ق'(س) = ٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠ \notin ]-٣ ، -٢[$

• عندما $-٢ < س < ٢$ / $-٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠ \in ]-٢ ، ٢[$ .

• من اشارة $ق'$ :




$ق(س)$ متزايد على $[-٢ ، ٠]$

$ق(س)$ متناقص $[-٣ ، -٢] \cup [٠ ، ٢]$

• 2020 دور أول/ إذا كان ق(س) كثير حدود متزايداً على ح وكان ك(س) = ٢س - س٣ أثبت أن الاقتران ل(س) = ق(س) + ك(س) ق(س) متزايد لما س ∈ ]-∞، ٣[

الحل/ ق(س) متزايد على ح ⇐ ق'(س) > ٠ لما س ∈ ح

ك(س) = ٢س - س٣ متصل على ح لأنه لـ ح .

ك'(س) = ٢ - ٣س٢

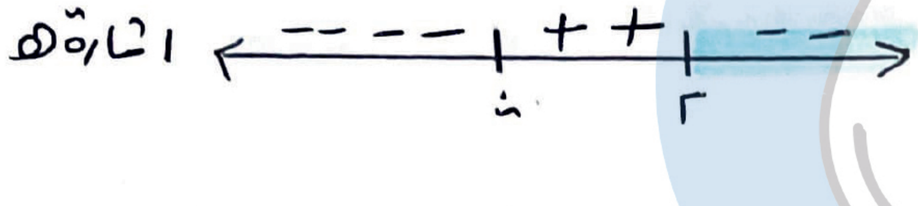
٠ = ٢ - ٣س٢

٠ = ٣س٢ - ٢

٠ = ٣(س٢ - ٢/٣)

٠ = ٣(س - √(٢/٣))(س + √(٢/٣))

س = ٠ أو س - √(٢/٣) = ٠ ⇐ س = √(٢/٣)


إشارة ك'
+ + + +

• 2020 دور ثالث / إذا كان ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود معرفين في [٠، ٤] حيث أن منحنى ق(س) متناقص في مجاله ، ويقع في الربع الرابع ، ومنحنى هـ(س) متزايد على مجاله ، ويقع في الربع الأول

أثبت أن ل(س) = ق(س) × هـ(س) متناقص في [٠، ٤]

الحل / ق ، هـ كثيري حدود متصلين على [٠، ٤] .

* ق(س) متناقص في [٠، ٤] ⇐ قَ(س) < ٠ في ]٠، ٤[
* ق(س) يقع في الربع الرابع ⇐ ق(س) < ٠ في [٠، ٤]
* هـ(س) متزايد على مجاله ⇐ هـَ(س) > ٠ على ]٠، ٤[
* هـ(س) يقع في الربع الأول ⇐ هـ(س) > ٠ في [٠، ٤]
* ل(س) = ق(س) × هـ(س) متصل على [٠، ٤] حاصل ضرب متصلين

لَ(س) = ق(س) هـَ(س) + هـ(س) قَ(س) في ]٠، ٤[

لَ(س) = (سالب)(موجب) + (موجب)(سالب) = سالب + سالب = سالب

بما أن لَ(س) < ٠ في ]٠، ٤[ ⇐ ل(س) متناقص في [٠، ٤] #

---

• 2021 دور أول / عين مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س(٣س² − ٩) ، س ∈ [−٢، ٣]

الحل / ق(س) = س(٣س² − ٩) = ٣س³ − ٩س كثير حدود متصل على [−٢، ٣]

قَ(س) = ٩س² − ٩

∴ = ٩س² − ٩ ⇐ ٩ = ٩س² ⇐ ١ = س² ⇐ س = ١ ∈ ]−٢، ٣[

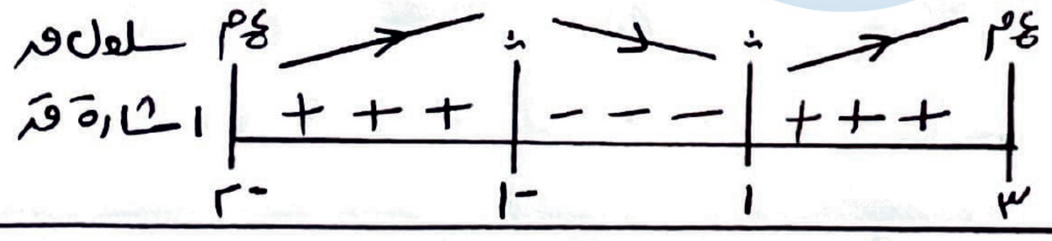
س = −١ ∈ ]−٢، ٣[

من إشارة قَ(س)

• ق(س) متناقص [−١، ١]

ومتزايد على [١، ٣] ∪ [−٢، −١]

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| غم | ↗ | ٠ | ↘ | ٠ | ↗ غم |
| إشارة قَ | + + + | | − − − | | + + + |
| | −٢ | −١ | | ١ | ٣ |



---

• 2021 دور ثاني / عين مجالات التزايد والتناقص لـ ق(س) = ١٢س² − ٢س³ ، س ∈ [−١، ٥]

الحل / ق(س) = ١٢س² − ٢س³ لـ ح متصل على [−١، ٥]

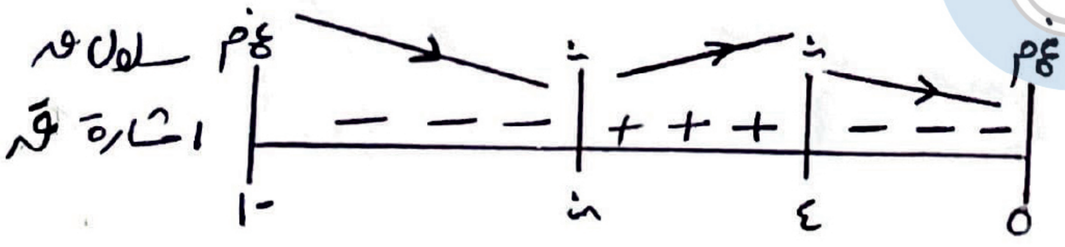
قَ(س) = ٢٤س − ٦س² = ٠

٦س(٤ − س) = ٠

إما ٦س = ٠ ⇐ س = ٠ ∈ ]−١، ٥[

أو ٤ − س = ٠ ⇐ س = ٤ ∈ ]−١، ٥[

من إشارة قَ :



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| غم | ↘ | ٠ | ↗ | ٠ | ↘ غم |
| إشارة قَ | − − − | | + + + | | − − − |
| | −١ | ٠ | | ٤ | ٥ |

ق(س) متزايد على [٠، ٤] ومتناقص على [٤، ٥] ∪ [−١، ٠]

---

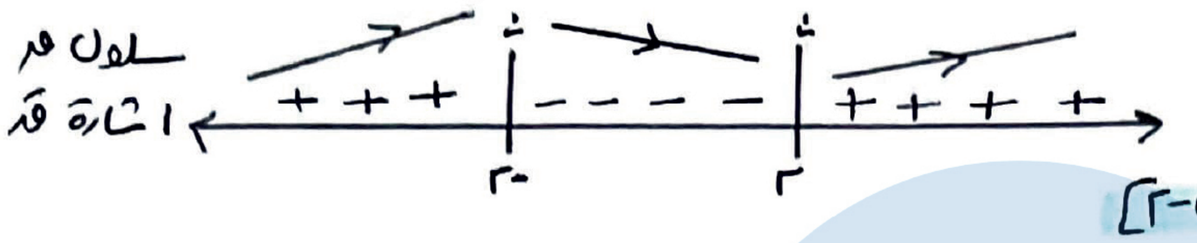
• عين فترات التزايد والتناقص لـ ق(س) = س³ − ١٢س + ١٠

الحل / ق(س) = س³ − ١٢س + ١٠ لـ ح متصل ومشتق على ح

قَ(س) = ٣س² − ١٢ = ٠ ⇐ ٣س² = ١٢ ⇐ س² = ٤ ⇐ س = ٢

س = −٢

أ.مي حواري




ضا اشارة قـ(س) :
هـ(س) متناقص على [-٢، ٢]
هـ(س) متزايد على [٢، ∞[ ∪ ]-∞، -٢]

---

• 2022 دورثاني/ جد فترات التزايد والتناقص لـ هـ(س) = س(٢-س)^٣ ، س ∈ [٠، ٤]

الحل/ هـ(س) = س(٢-س)^٣ متصل على [٠، ٤] لأنه كثير حدود

قـ(س) = ٣س(٢-س)^٢ × -١ + (٢-س)^٣ × ١ (اخراج (٢-س) عامل مشترك)

= (٢-س)[-٣س + ٢-س)

= (٢-س)(٢-٤س)

إما ٢-س = ٠ ⇐ س = ٢ ∈ ]٠، ٤[

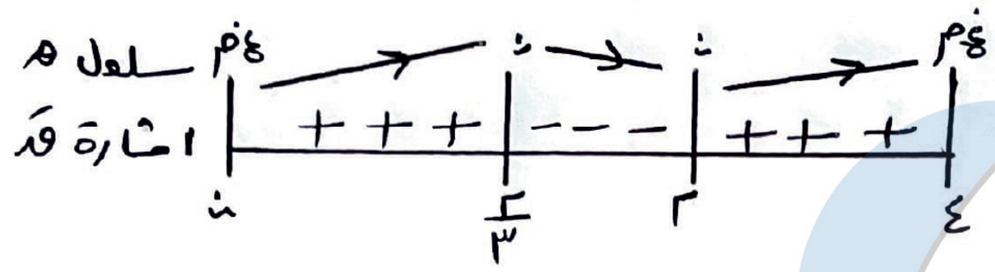
أو ٢-٤س = ٠ ⇐ ٤س = ٢ ⇐ س = ٢/٤ = ١/٢ ∈ ]٠، ٤[

**أ.مي حواري**

ضا اشارة قـ/

هـ(س) متزايد على [٠، ١/٢] ∪ [٢، ٤]

هـ(س) متناقص على [١/٢، ٢]




---

• 2022 دورثالث/ عين فترات التزايد والتناقص لمنحنى هـ(س) = س(س-٣)^٢

الحل/ هـ(س) = س(س-٣)^٢ كثير حدود متصل وقابل للاشتقاق على ح .

قـ(س) = س × ٢(س-٣) × ١ + (س-٣)^٢ اخراج (س-٣) عامل مشترك .

= (س-٣)(٢س + س-٣)

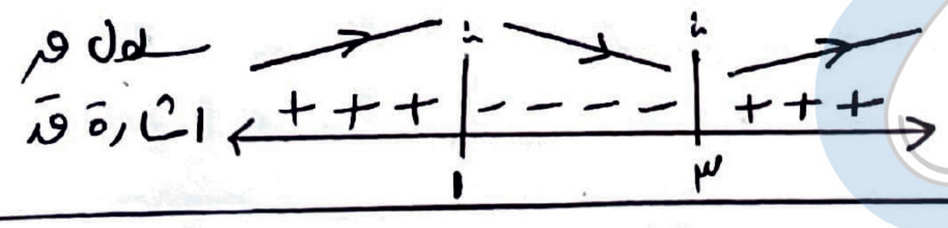
= (س-٣)(٣س-٣)

إما (س-٣) = ٠ ⇐ س = ٣ ∈ ح أو ٣س-٣ = ٠ ⇐ ٣س = ٣ ⇐ س = ١

ضا اشارة قـ/

هـ(س) متناقص على [١، ٣]

ومتزايد على ]-∞، ١] ∪ [٣، ∞[




---

• 2023 دورأول/ عين فترات التزايد والتناقص لـ هـ(س) = س^٣ - ٢٧س + ١ ، س ∈ ح

الحل/ هـ(س) = س^٣ - ٢٧س + ١ كثير حدود متصل وقابل للاشتقاق على ح

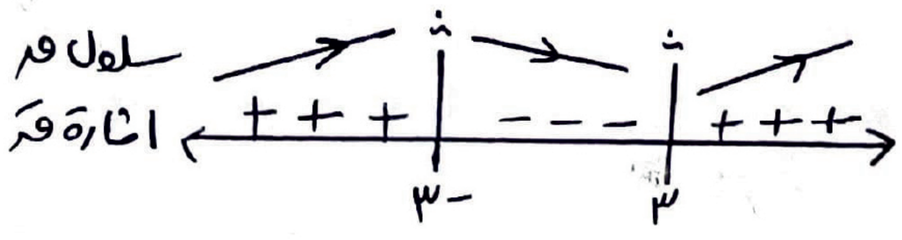
قـ(س) = ٣س^٢ - ٢٧ = ٠

٣س^٢ = ٢٧ ⇐ س^٢ = ٩ ⇐ س = ٣ ، س = -٣

ضا اشارة قـ :

هـ(س) متزايد على ]-∞، -٣] ∪ [٣، ∞[

هـ(س) متناقص على [-٣، ٣]



• 2023 دور ثاني/ جد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ه(س) = س^3 - 3س^2 - 9س + 61$
$س \in [-1, 4]$

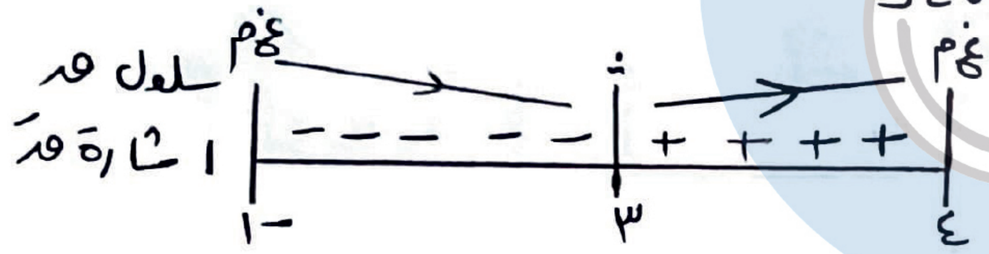
الحل/ $ه(س) = س^3 - 3س^2 - 9س + 1$ قابل للاشتقاق على $[-1, 4]$

$ه'(س) = 3س^2 - 6س - 9 = 0 \div 3$

$س^2 - 2س - 3 = 0 \Leftarrow (س + 1)(س - 3) = 0$

إما $س + 1 = 0 \Leftarrow س = -1 \notin ]-1, 4[$

أو $س - 3 = 0 \Leftarrow س = 3 \in ]-1, 4[$




ضع إشارة $ه'(س)$:

$ه(س)$ متناقص على $[-1, 3]$

ومتزايد على $[3, 4]$

---

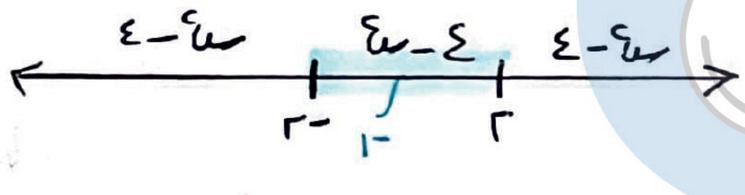
• 2023 دور ثالث/ إذا كان $ه(س) = |س^2 - 4|$ على $[-1, 3]$ أوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ه(س)$

الحل/ $ه(س) = |س^2 - 4|$ متصل على $[-1, 3]$ لأن قيمة مطلقة بداخله قابل متصل

* لفك تعريف $|س^2 - 4|$:

$س^2 - 4 = 0 \Leftarrow س^2 = 4 \Leftarrow س = 2$

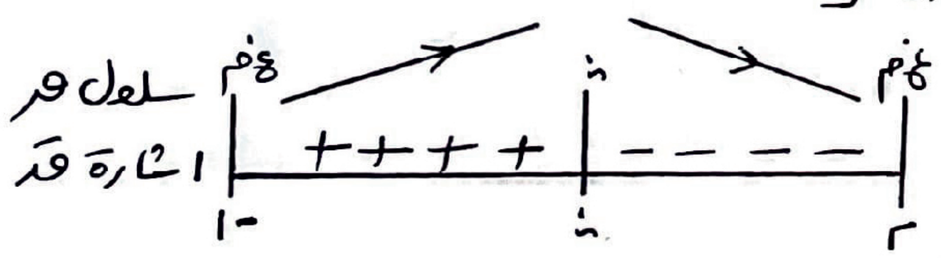
$س = -2$




$\Leftarrow ه(س) = 4 - س^2$ على $[-1, 3]$

$ه'(س) = -2س = 0 \Leftarrow س = 0 \in ]-1, 3[$

ضع إشارة $ه'$:




$ه(س)$ متزايد على $[-1, 0]$

$ه(س)$ متناقص على $[0, 3]$

أ.مي حواري

---

• 2023 دور ثالث/ إذا كان $ه(س)$ كثير حدود معرفاً على $[-1, 6]$ ويقع منحناه في الربع الأول ومتزايد في مجاله وكان $هـ(س) = 6 - س$ بين أن الاقتران $ل(س) = \frac{هـ(س)}{ه(س)}$ متناقصاً على $[0, 6]$

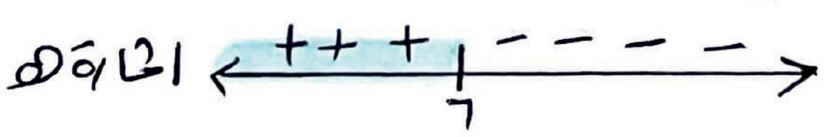
الحل/ * $ه(س)$ قابل متصل على $[-1, 6]$ ويقع منحناه في الربع الأول $\Leftarrow ه(س) > 0$ في $[0, 6]$

$ه(س)$ متزايد في مجاله $\Leftarrow ه'(س) > 0$ على $]-1, 6[$

* $هـ(س) = 6 - س$ قابل متصل وصفره عند 6.

$س = 6 \in س = 6 - س = 0$

$هـ(س) > 0$ على $[-1, 6]$




* $ك(س) = -1 < 0$ $\Leftarrow$ $ك(س) < 0$ على $]-1, 6[$

$ل(س) = \frac{هـ(س)}{ه(س)}$ متصل على $[0, 6]$ حاصل قسمة متصلين $\Leftarrow ه(س) \neq 0$

$ل'(س) = \frac{ه(س)ك(س) - هـ(س)ه'(س)}{ه^2(س)}$

$$\text{ل}'(\text{س}) = \frac{(\text{موجب})(\text{سالب}) + (\text{موجب})(\text{موجب})}{\text{موجب}} = \frac{(\text{سالب}) + (\text{سالب})}{\text{موجب}} = \text{سالب}$$

$\text{ل}'(\text{س}) < 0$ في $]0,1[$ ⇐ $\text{ل}(\text{س})$ متناقصاً في $[0,1]$ #

---

• 2024 دور أول / أوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ حيث :

$\text{ق}(\text{س}) = 3\,\text{جاس}\,\text{قباس}$ ، $\text{س} \in [0,\pi]$

أ.مي حواري

الحل / $\text{ق}(\text{س}) = 3\,\text{جاس}\,\text{قباس} = 3 \times \frac{1}{2}\,\text{جا}(2\text{س})$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{3}{2}\,\text{جا}(2\text{س})$ متصل على $[0,\pi]$

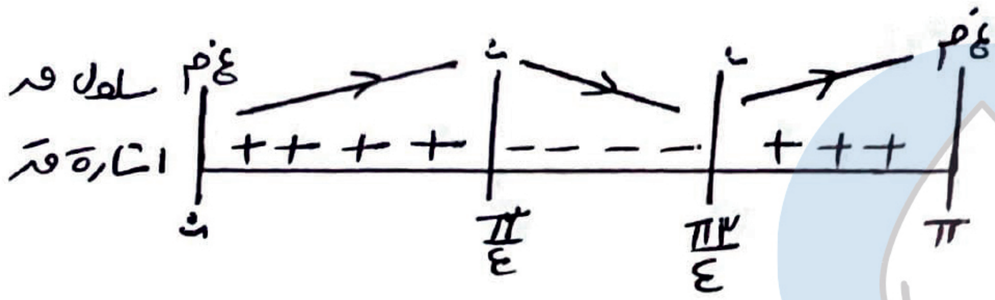
$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{3}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\,\text{قبا}(2\text{س})$

$0 = 3\,\text{قبا}(2\text{س}) \Leftarrow 0 = \text{قبا}(2\text{س})$ ، لاحظ $2\text{س} \in [0,2\pi]$

$2\text{س} = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{4} \in ]0,\pi[$

$2\text{س} = \frac{3\pi}{2} \Leftarrow \text{س} = \frac{3\pi}{4} \in ]0,\pi[$

من اشارة $\text{ق}'(\text{س})$ :




$\text{ق}(\text{س})$ متناقص على $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

$\text{ق}(\text{س})$ متزايد على $[0, \frac{\pi}{4}]$

$\cup\ [\frac{3\pi}{4}, \pi]$

---

• 2024 دور ثاني / عين فترات التزايد والتناقص لمنحنى $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - 2|$ ، $\text{س} \in \mathbb{Z}$

الحل / $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - 2|$ متصل على $\mathbb{Z}$ ، قيمة مطلقة لـ كثير حدود متصل.

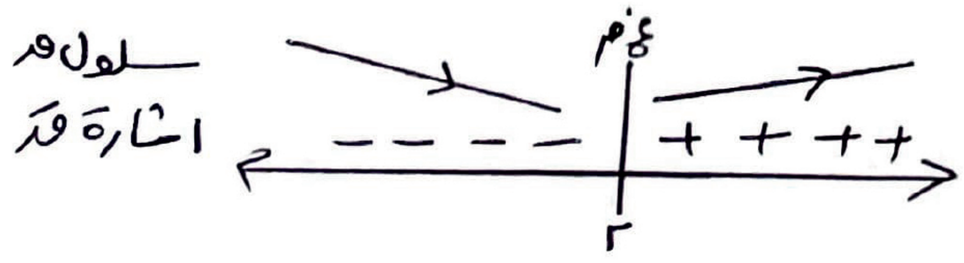
$$\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - 2| = \begin{cases} 2 - \text{س} ، & \text{س} < 2 \\ -2 + \text{س} ، & \text{س} \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} -1 ، & \text{س} < 2 \\ 1 ، & \text{س} > 2 \\ \text{غ م} ، & \text{س} = 2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \neq \begin{cases} \text{ق}'(2)^{+} = 1 \\ \text{ق}'(2)^{-} = -1 \end{cases}$$

$\text{ق}'(2)$ غ م .

$\text{ق}'(\text{س}) \neq 0$ :

من اشارة $\text{ق}'$ :




$\text{ق}(\text{س})$ متزايد على $[2, \infty[$

ومتناقص على $]-\infty, 2]$

---

• 2025 دور ثاني / اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{2}{3}\text{س}^3 + \frac{1}{2}\text{س}^2 - \text{س} + 7$ جد مجالات التزايد والتناقص لـ $\text{ق}(\text{س})$

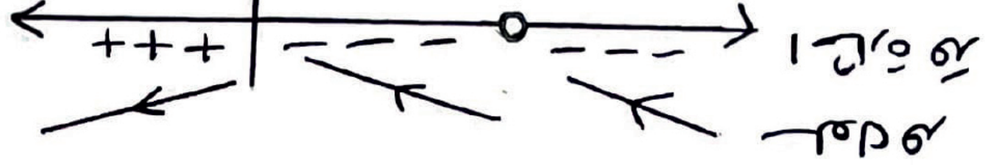
الحل / $\text{ق}(\text{س}) = \frac{2}{3}\text{س}^3 + \frac{1}{2}\text{س}^2 - \text{س} + 7$ لـ 2 متصل ومشتق

$\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س}^2 + \text{س} - 1 = 0$

• تأكد/ إذا كان $د(س)$ متصلاً على $ح$ و كان $ل(س) = ق(س) + ك(س)$
وكان $ق(س) = -د(س)$ أثبت أن $ل(س)$ متزايدة.
$ل(س) \geq ك(س) + ٢ق(س) + ٣$ ومنه $ل(س) \geq ك(س) + ٣$

---

• تأكد/ $د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٤$ متصلة على $ح$ و $س \neq ٠$ ، $٤ - ٦ = ٢$
$د(س)$ متناقصة على $]-\infty, ٠[$ ومتزايدة على $]٠, ٢[$
$د(س)$ متناقصة على $]٢, \infty[$




---

• تأكد/ $د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٤$ متصلة على $ح$ و $س \neq ٠$ ، $٤ - ٦ = ٢$
$د(س)$ متناقصة على $]-\infty, ٠[$ ومتزايدة على $]٠, ٢[$
$د(س)$ متناقصة على $]٢, \infty[$

**الحل**

$$د'(س) = \frac{(س)ق'(س)د - (س)د'(س)ق}{(س)ق^٢} = \frac{(-)(+) - (-)(-)}{(-)^٢ق}$$

$$= \frac{-ل - (+)ل}{(+)ق} = (+)ل + (+)ق = (+)ل$$

$\because$ $ل(س) \in ]٢, ٤[$ ، $ق(س) \in ]٠, ٢[$ ، $د(س) \in ]-٤, ٠[$

$\therefore$ $د'(س) < ٠$ على $]٠, ٢[$

$\therefore$ $د(س)$ متناقصة على $]٠, ٢[$

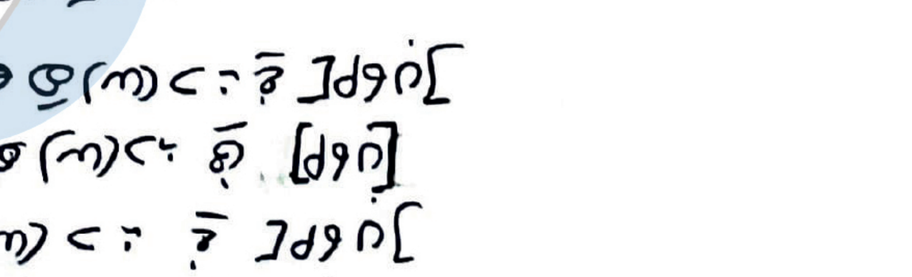
---

• تأكد/ $د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٤$ متصلة على $ح$ و $س \neq ٠$ ، $٤ - ٦ = ٢$
$د(س)$ متناقصة على $]-\infty, ٠[$ ومتزايدة على $]٠, ٢[$
$د(س)$ متناقصة على $]٢, \infty[$

**الحل**

$د'(س) = ٣س^٢ - ٦س = ٣س(س - ٢) = ٠ \Leftarrow س = ٠$ أو $س = ٢$

$٠ \in ]-\infty, ٠[$ ، $٢ \in ]٠, ٢[$ ، $٣ \in ]٢, \infty[$




$\therefore$ $د(س)$ متناقصة على $]-\infty, ٠[$ ومتزايدة على $]٠, ٢[$
ومتناقصة على $]٢, \infty[$

---

$\text{ك}'(\text{س}) = ٢\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) + ٢\text{هـ}(\text{س}) \times -\text{ق}(\text{س}) = ٠$

بما أن $\text{ك}'(\text{س}) = ٠ \Leftarrow \text{ك}(\text{س})$ اقتران ثابت #

أ.مي حواري

## ذات الذَّنب يا صديقي..

ذاكَ الذي تعرِفه جيّدًا، تُكرّره دائمًا، تحُاول تركه ألف مرّة، وتعود، ذاكَ مربط الفَرَس، والحاجز بينك والفتح الذي

## انتبه معي..

حين تُلغي متابعة التّافهين = تُنقذ نفسك! نعم تُنقذها وتُخرجها من بئر فارغٍ لا يليق بك، أُلفة الاختلاط، أجواء تافهة، متابعة يوميّات لا معنىً لها، ركض خلف اللّقطة واللّحظة وإثارة الجدل، ينقل الواحد منهم حياته وتفاصيله وزوجته وأخته وبيته حتّىٰ غرفة نومه؛ ليُريك وَهمًا ويَسقيك سُمًّا، فتدخل الصّورة عَقلك وتحُرّك شهوتك، فتَلعَن حالَتك، وتسقط في وحل المقارنات!

تسحَبُك من واقعك سَحبًا، تأخذك لسَراب يحسبه الظمآن ماءً، دائرة تحُيط بك، تُبعدك عن حقيقة مهمّتك، والله لو انشَغَل الواحد منّا بغاية عَظيمة وهدف بعيدٍ ومسؤوليّةٍ جادّة؛ لَما تَفرّغ لهذا، ولا وَجَدَ وقتًا يُعطيه لتافهٍ

# اختبار نهاية الوحدتين الأولى والثانية

أ.مي حواري

• السؤال الأول | اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١/ أحد الاقترانات التالية قابلة للاشتقاق عند س = ٠ :

ب/ هـ(س) = |س³| ، ك ل(س) = ∛س

ج/ ل(س) = س⁴ / (س⁴ − س)

أ/ ق(س) = [س³ + ٣] ، الحل/ ق(س) = [س³ + ٣]

غير مشتقة عند نقط التصل .

ق(٠) = [٣ + ٠ × ٣] = [٣] ← عدد صحيح ← عند س = ٠ تحول ← ق(٠) عوض X

ب/ هـ(س) = |س³| = |س|³ = { س⁶ − ١٢ س² ٠ ، ٦ متصل عند 2 لأنه قيمة مطلقة لكثير حدود ✓
− س⁶ + ٦ س² ٠

ق(س) = { ٣ س⁴ + ٦ س² ٠
− ٣ س⁴ + ٦ س² ٠

ق(٠) = ٠ / ق(ث)⁺ = ٣(٠)⁴ = ٠ ، ق(ث)⁻ = −٣(٠)⁴ = ٠ ← ق(ث) موجودة

X جـ/ ل(س) = √س² = |س| متصل عند نقطة التصل (س = ٠) ولكنه غير مشتقة عندها

X د/ ل(س) = س⁴ / (س⁴ − س) المجال ℝ / أصفار المقام

س⁴ − س = ٠ ← س(س − ١) = ٠ ← إما س = ٠ أو س = ١

المجال ℝ / {١ ، ٠} ← غير معرف عند س = ٠

---

٢/ إذا كان هـ(١ − س) = [½ س − ١] × جتا(π/٢ س) + ٥ فإن ق(٢) = ؟

أ/ −٣ ب/ −π ج/ ٠ د/ غير ذلك

الحل/ عندما ١ − س = ٢ ← ١ − ٢ = س ← س = −١

[½ س − ١]′ | س = −١ = −½ ∉ ص ← [½ س − ١]′ | س = −١ = صفر

هـ(١ − س) = [½ س − ١] جتا(π/٢ س)

ق(١ − س) × −١ = [½ س − ١] × −π/٢ جا(π/٢ س) + جتا(π/٢ س) [½ س − ١]′ | س = −١

ق(٢) × −١ = [−½ − ١] × −π/٢ جا(−π/٢) + جتا(−π/٢) × ٠

+ ق(٢) = [−¾] × −π/٢ × + جا(π/٢)

ق(٢) = −٢ × −π/٢ × ١ = π

• ملاحظة / جا(−س) = − جا س

---

٣/ إذا كان المستقيم ص = ٩ س + ٣ يمس منحنى هـ(س) = ١ + ٥ س − ٣ س² فإن نقطة التماس

أ/ (٦ ، ١) ب/ (−٦ ، ١) ج/ (٦ ، −١) د/ (−٦ ، −١)

الحل/ نفرض نقطة التماس (س ، ص)

ص = ٩ س + ٣ ← ص = ٩ = ميل المماس

ق′(س) = ٥ − ٤ س = ميل المنحنى عند نقطة التماس

ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس ← ٩ = ٥ − ٤ س

$ع = -ع س \Leftarrow س = -1$

$ه(-1) = 1+5\times(-1) - 2(-1)^2 = 1-5-2 = -6 \Leftarrow$ نقطة التماس $= (-1, -6)$

---

٤/ إذا كان متوسط تغير $ه(س) = س^3 + 3س$ في $[ب، ب+3]$ يساوي $(-3)$ وكانت المماسة للثابت $ب$

ب/ $-1$ ، ج/ $-3$ ، د/ $-2$

الحل/ طريقة (١)/ $\frac{\Delta ه(س)}{\Delta س} = \frac{ه(ب) - ه(ب-3)}{ب - (ب-3)} = -3 \Leftarrow \frac{(ب^3 + 3ب) - ((ب-3)^3 + 3(ب-3))}{3} = -3$

$\Leftarrow \frac{ب^3 + 3ب - (ب^3 - 9ب^2 + 27ب - 27 + 3ب - 9)}{3} = -3 \Leftarrow 9ب^2 - 27ب + 27 = -9$

$\Leftarrow 9ب^2 - 27ب + 36 = 0 \Leftarrow ب^2 - 3ب + 4 = 0 \Leftarrow (ب-4)(ب+1) = 0$

$\therefore ب = -1$ أو $ب = 4$

طريقة (٢)/ نبدأ السؤال ضع دائرة:

$\frac{\Delta ه(س)}{\Delta س} = 2(س + ج) + ب \Leftarrow -3 = 2(-3 + 3) + ب \Leftarrow ب = -3$

$\Leftarrow ه(س) = س^2 - 3س + ج \Leftarrow -1 = 9 - 9 + ج \Leftarrow ج = -1$

---

٥/ إذا كان $ص = ظاس + قاس$ ومماسة $\frac{ص}{ص}$

ب/ $ظاس$ ، ج/ $قاس$ ، د/ $ظاس$

الحل/ $ص = ظاس قاس + قاس$ (إخراج $قاس$ عامل مشترك).

$ص = قاس(ظاس + قاس)$

$\frac{ص}{ص} = قاس \times \frac{ص}{ص}$ ، $\frac{ص}{ص} = قاس$.

أ.مي حواري

---

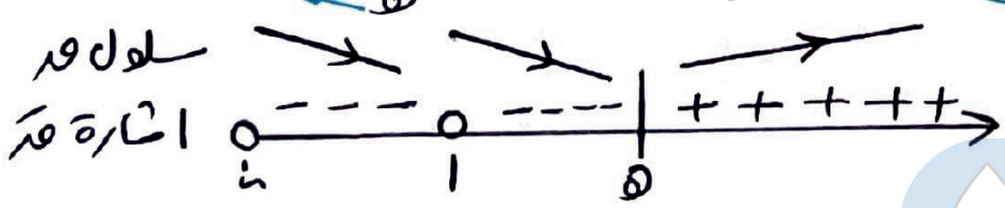
٦/ الاقتران $ه(س) = \frac{س}{لو_{ه} س}$ متزايداً على الفترة:

ب/ $[ه، \infty[$ ، ج/ $]-\infty، ه[$ ، د/ $]-\infty، ه[$

الحل/ $ه(س) = \frac{س}{لو_{ه} س}$ متصل على $س > صفر، س \neq 1$ وحاصل قسمة متصلين و $لو_{ه} س \neq 0$

$ه'(س) = \frac{لو_{ه} س \times 1 - س \times \frac{1}{س}}{(لو_{ه} س)^2}$

$= 0 \Leftarrow لو_{ه} س - 1 = 0 \Leftarrow لو_{ه} س = 1 \Leftarrow س = ه$




$س = ه \in ]-\infty، ه[ \cup ]ه، \infty[$ / ؟!

من إشارة $ه'(س)$ / $ه(س)$ متزايداً في $[ه، \infty[$

ملاحظة/ مجال $ه(س)$: $لو_{ه} س \Leftarrow س > 0$ ولكن نبدأ الـ $(لو_{ه} س)$ في المقام

$لو_{ه} س = 0 \Leftarrow س = ه^0 \Leftarrow س = 1$ ، المجال $س > 0$ / $\{1\}$.

٧/ يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ن^ك ، ك > ٠ ، فإذا كانت سرعة الجسم بعد (١٠ث) تساوي مثلي سرعته بعد (٥ث) ما قيمة الثابت ك

أ/ -٢ ب/ ٢ ج/ ٣ د/ ٤

الحل/ ف = ن^ك ⇐ ع = دف/دن = ك(ن)^(ك-١)

ع(١٠) = ٢(ع(٥)) ⇐ ك(١٠)^(ك-١) = ٢ك(٥)^(ك-١) ، ك ≠ ٠

⇐ (٢×٥)^(ك-١) = ٢(٥)^(ك-١) ⇐ ٢^(ك-١) × ٥^(ك-١) = ٢ × (٥)^(ك-١) ، ٥^(ك-١) ≠ ٠

⇐ ٢^(ك-١) = ٢^١ ⇐ ك-١ = ١ ⇐ ك = ٢

---

٨/ إذا كان ص = لو_هـ (هـ^(س²) / س²) فإن دص/دس = ٠ عندما س = ١

أ/ ١ ب/ ±١ ج/ -١ د/ صفر

الحل/ ص = لو_هـ هـ^(س²) - لو_هـ س² ⇐ ص = س² - ٢لو_هـ س

ص' = ٢س - ٢/س = ٠ ⇐ ٢س = ٢/س ⇐ ٢س² = ٢ ⇐ س² = ١ ⇐ س = ١ ، س = -١

---

٩/ اذا كان ق(س) = س² ، هـ(س) = |٤س - ٥| ما قيمة (ق×هـ)'(١)

أ/ ٢ ب/ -٢ ج/ غير موجودة د/ ٠

الحل/ هـ(س) = |٤س - ٥| = { ٤س - ٥ ، س ≥ ٥/٤ ؛ ٥ - ٤س ، س < ٥/٤ } ⇐ س = ١ ∈ ]-∞ ، ٥/٤[

هـ(س) = ٥ - ٤س عندما (س = ١) ⇐ هـ(١) = ٥ - ٤ = ١

هـ'(س) = -٤ ⇐ هـ'(١) = -٤

ق(س) = س² ⇐ ق(١) = (١)² = ١ / ق'(س) = ٢س ⇐ ق'(١) = ٢

(ق×هـ)'(١) = ق(١) هـ'(١) + هـ(١) ق'(١)

= ١×-٤ + ١×٢ = -٤ + ٢ = -٢

أ.مي حواري

---

١٠/ إذا كان ق(س) = س + ١/س ، هـ(س) = جتاس ، جد (ق∘هـ)'(س)

أ/ جا³س قا²س ب/ جا³س قتا²س ج/ جتا³س قا²س د/ جتاس

الحل/ ق(س) = س + ١/س ، هـ(س) = جتاس

ق'(س) = ١ - ١/س² ، هـ'(س) = -جاس

(ق∘هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) هـ'(س) = ق'(جتاس) × -جاس

= (١ - ١/جتا²س) × -جاس = جاس (١/جتا²س - ١)

= جاس (١ - جتا²س / جتا²س) = جاس × جا²س × ١/جتا²س = جا³س × قا²س

• السؤال الثاني

١/ إذا كان متوسط تغير $ك(س) = هـ^{(س^٢+س)} + ب هـ^{(س+١)} - ٢ب$ للفترة [-١، صفر] يساوي $٣(هـ - ١)$
ما قيمة الثابت ب.

الحل/ ب = ٣ مكرر درس متوسط التغير (خارجي).

---

٢/ إذا كان $ق(س) = \frac{أ}{٤}س^٤ - ٢س^٣ - س - ١$ وكان $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق''(١+٤هـ) - ق''(١)}{٣هـ} = -٣٢$
ما قيمة الثابت أ

الحل/ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق''(١+٤هـ) - ق''(١)}{٣هـ} = \frac{ق''(١) - ق''(١)}{٣ \times ٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{هـ \to ٠} ق'''(١+٤هـ) \times \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣} ق'''(١) = -٣٢ \Leftarrow ق'''(١) = ٣ \times -٨ = -٢٤$

$ق(س) = \frac{أ}{٤}س^٤ - ٢س^٣ - س - ١$

$ق'(س) = أ س^٣ - ٦س^٢ - ١$

$ق''(س) = ٣أ س^٢ - ١٢س \Leftarrow ق'''(س) = ٦أ س - ١٢ \Leftarrow ق'''(١) = ٦أ - ١٢$

$-٢٤ = ٦أ - ١٢ \Leftarrow \frac{-١٢}{٦} = \frac{٦أ}{٦} \Leftarrow -٢ = أ$

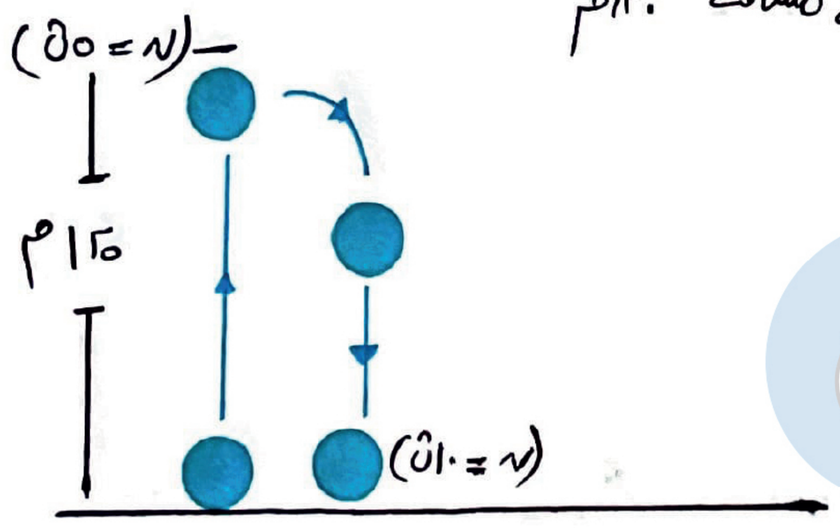
أ.مي حواري

---

٣/ قذف جسم رأسياً من أرض حسب العلاقة $ف(ن) = ٥٠ن - ٥ن^٢$ ، (ف) ارتفاعه فوق نقطة القذف ، (ن) الزمن بالثواني ، جد

أ/ أقصى ارتفاع وصله الجسم ب/ سرعة ارتطام الجسم بالأرض

ج/ سرعة الجسم عندما يكون قطع مسافة ١٣٠م




الحل/ أ/ $ف = ٥٠ن - ٥ن^٢$

$ع = ٥٠ - ١٠ن = ٠ \Leftarrow ٥٠ = ١٠ن$

$\Leftarrow ن = ٥ث$ «زمن الوصول لأقصى ارتفاع»

$ف(٥) = ٥٠ \times ٥ - ٥ \times ٥^٢ = ٢٥٠ - ١٢٥ = ١٢٥م$

ب/ بما أن زمن الصعود = زمن الهبوط
$\Leftarrow$ يصل الجسم الأرض بعد ١٠ث.

$ع(١٠) = ٥٠ - ١٠ \times ١٠ = ٥٠ - ١٠٠ = -٥٠م/ث$

ج/ المسافة المقطوعة = ٢ × أقصى ارتفاع - ف(ن)

$١٣٠ = ٢ \times ١٢٥ - ف(ن) \Leftarrow ف(ن) = ٢٥٠ - ١٣٠ = ١٢٠م$

$\Leftarrow ١٢٠ = ٥٠ن - ٥ن^٢ \Leftarrow (٥ن^٢ - ٥٠ن + ١٢٠ = ٠) / ٥$

$ن^٢ - ١٠ن + ٢٤ = ٠ \Leftarrow (ن + ٤)(ن + ٦) = ٠$

إما $ن - ٤ = ٠ \Leftarrow ن = ٤ث$ مرفوض ، $ن > ٥$ الجسم هابط

أو $ن - ٦ = ٠ \Leftarrow ن = ٦ث$.

$ع(٦) = ٥٠ - ١٠ \times ٦ = ٥٠ - ٦٠ = -١٠م/ث$

## • السؤال الثالث

١/ إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ب س + ٣ ، & س < ٢ \\ أ س + جـ ، & س \geq ٢ \end{cases}$ ، اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند (س = ٢)

وكان متوسط تغير هـ(س) في [٠،١] يساوي (٣) ما قيمة كل من الثوابت أ، ب، جـ

الحل/ (س) مشتق عند س = ٢ ← هـ(س) متصل عند (س = ٢)

$هـ'(٢)^+ = هـ'(٢)^-$

$نها_{س \to ٢^+} (أ س + جـ) = نها_{س \to ٢^-} (س^٢ + ب س + ٣)$

$أ = ٢س + ب \quad |_{س=٢}$

$٢أ + جـ = ٢^٢ + ٢ب + ٣$

$أ = ٢ \times ٢ + ب$

$٢أ - ٢ب + جـ = ٧$

$أ - ب = ٤$

نعوضها

$٢(أ - ب) + جـ = ٧$

$٢ \times ٤ + جـ = ٧$

$٨ + جـ = ٧ \Leftarrow جـ = -١$

$-٨ \quad -٨$

أ.مي حواري

$* \quad \frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{هـ(٥) - هـ(١)}{٥ - ١} = \frac{(٥أ + جـ) - (١ + ب + ٣)}{٤} = ٣$

$\Leftarrow ١٢ = (٥أ - ١) - (٤ + ب) \Leftarrow ١٢ = ٥أ - ١ - ٤ - ب \Leftarrow ١٢ = ٥أ - ب - ٥$

$+٥ \quad +٥$

$\Leftarrow ١٧ = ٥أ - ب$

نحل المعادلتين / $أ - ب = ٤$

$٥أ - ب = ١٧ \Leftarrow ٤أ = ١٣ \Leftarrow أ = \frac{١٣}{٤}$

عندما $أ = \frac{١٣}{٤} \Leftarrow \frac{١٣}{٤} - ب = ٤ \Leftarrow \frac{١٣}{٤} - ٤ = ب \Leftarrow \frac{١٣}{٤} - \frac{١٦}{٤} = ب \Leftarrow \frac{-٣}{٤} = ب$

---

٢/ إذا كان $ق(س) = (س^٢ - ٣) هـ^س$ ، $س \in ح$ ، ما فترات التزايد للاقتران ق(س)

الحل/ $ق(س) = (س^٢ - ٣) هـ^س$ متصل ومشتق على ح ؛ لأنه حاصل ضرب متصلين

لـ ح متصل ، $هـ^س$ متصل

$ق'(س) = (س^٢ - ٣) هـ^س + هـ^س (٢س) = ٠$

$هـ^س (س^٢ - ٣ + ٢س) = ٠$

إما $هـ^س \neq ٠$ أو $س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$

$(س - ١)(س + ٣) = ٠$

$س = ١ \quad س = -٣$

• من اشارة ق/

• ق(س) متزايد على $[-٣، -\infty[ \cup ]١، \infty[$

سلول ق

اشارة ق

$+ + + \quad | \quad - - - - \quad | \quad + + +$

$-٣ \quad ١$

٣/ إذا كان $ق(س) = (٩-س^٢)(٩+٣س+س^٢)(٩-٣س+س^٢)$ أثبت أن $ق''(س) = -٣٠س^٤$

الحل/ $ق(س) = (٩-س^٢)(٩+٣س+س^٢)(٩-٣س+س^٢)$

$ق(س) = (٣-س)(٣+س)(٩+٣س+س^٢)(٩-٣س+س^٢)$

$ق(س) = (٣+س)(٩-٣س+س^٢) \times (٣-س)(٩+٣س+س^٢)$

$ق(س) = (٣^٣+س^٣)(٣^٣-س^٣) = (٢٧+س^٣)(٢٧-س^٣)$

$ق(س) = (٢٧)^٢ - (س^٣)^٢ = ٢٧^٢ - س^٦$

$ق'(س) = -٦س^٥$

$ق''(س) = -٢٤س^٤$ #

• تذكر/

$س^٢ - ص^٢ = (س-ص)(س+ص)$

$س^٣ - ص^٣ = (س-ص)(س^٢+سص+ص^٢)$

$س^٣ + ص^٣ = (س+ص)(س^٢-سص+ص^٢)$

أ.مي حواري

• السؤال الرابع

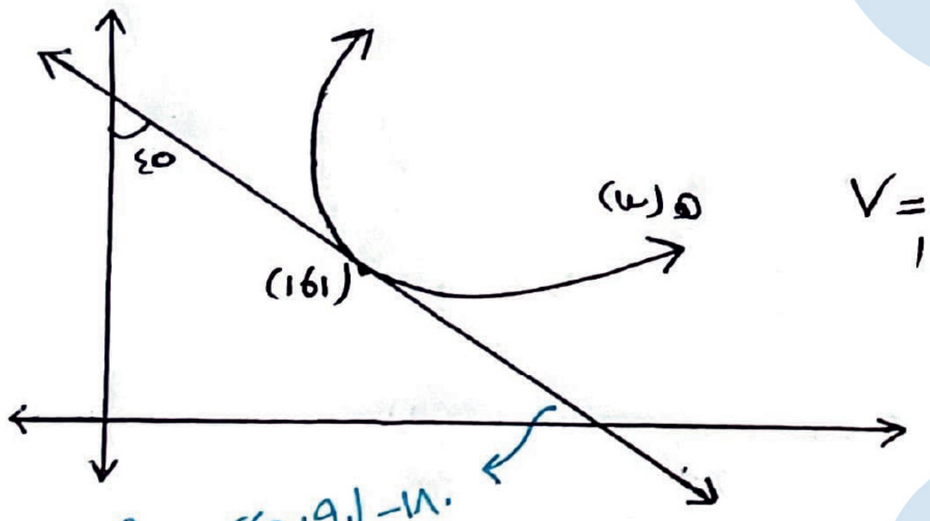
١/ إذا كان $ص = \sqrt{٨ع}$ ، $ع = جا^٢(س)$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ص = ٢$ علماً بأن $س \in [\frac{\pi}{٢}, \pi]$

الحل/ $\frac{دص}{دس} = ٢$ درس السلسلة (ضع دائرة - خارجي)

مكرر

٢/ إذا كان $ق(١) = ٣$ ، $ق'(١) = ٢$ والشكل المرافق يمثل منحنى $هـ(س)$ ، جد قيمة الثابت ب

اذا علمت أن $\frac{د}{دس}\left(\frac{٢ب\,ق}{هـ(١)} + هـ \times ق - ٤س\right)\Big|_{س=١} = ٧$




$١٨٠ - (٩٠+٤٥) = ٤٥^\circ$

الحل/

من الشكل (١،١) تقع على $هـ(س) \Leftarrow هـ(١) = ١$

زاوية ميل المماس $= ١٨٠ - ٤٥ = ١٣٥$

$هـ'(١) = ظا\,١٣٥ = -١$

$\frac{د}{دس}\left(\frac{٢ب}{هـ(١)}ق + هـ \times ق - ٤س\right) = \frac{٢ب}{هـ(١)}ق'(س) + هـ\,ق' + ق\,هـ' - ٤\Big|_{س=١} = ٧$

ثابت

$\frac{٢ب}{١} \times ق'(١) + هـ(١)ق'(١) + ق(١)هـ'(١) - ٤ = ٧$

$(٢ب \times ٢) + (١ \times ٢) + (٣ \times -١) - ٤ = ٧ \Leftarrow ٤ب + ٢ - ٣ - ٤ = ٧$

$٤ب - ٥ = ٧ \Leftarrow \frac{٤ب}{٤} = \frac{١٢}{٤} \Leftarrow ب = ٣$

٣/ اذا كان $ق(س) = (س-١)^{\frac{١}{٢}}$ ، $هـ(س) = قا^٢س$ ، $س \in ]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ وكان $(ق \circ هـ)'(س) = ب\,هـ(س)$ ما قيمة/قيم الثابت ب

الحل/ $ق(س) = \sqrt{س-١}$ ، $هـ(س) = قا^٢س$

$ق'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س-١}}$ ، $هـ'(س) = ٢قاس\,قاس\,ظاس$

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س))\,هـ'(س)$

$\Leftarrow$ ب هـ(س) = قـ(ظاس) × ٣ قاس ظاس

$\Leftarrow$ ب × قاس = $\frac{1}{٣\sqrt{\text{قاس} - 1}}$ × ٣ قاس × ظاس ، قاس $\neq$ ٠ ∴

$\Leftarrow$ ب = $\frac{1}{\text{ظاس}}$ × ظاس $\Leftarrow$ ب = $\frac{\text{ظاس}}{|\text{ظاس}|}$

• لاحظ س $\in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$
$\Leftarrow |\text{ظاس}| = -\text{ظاس}$

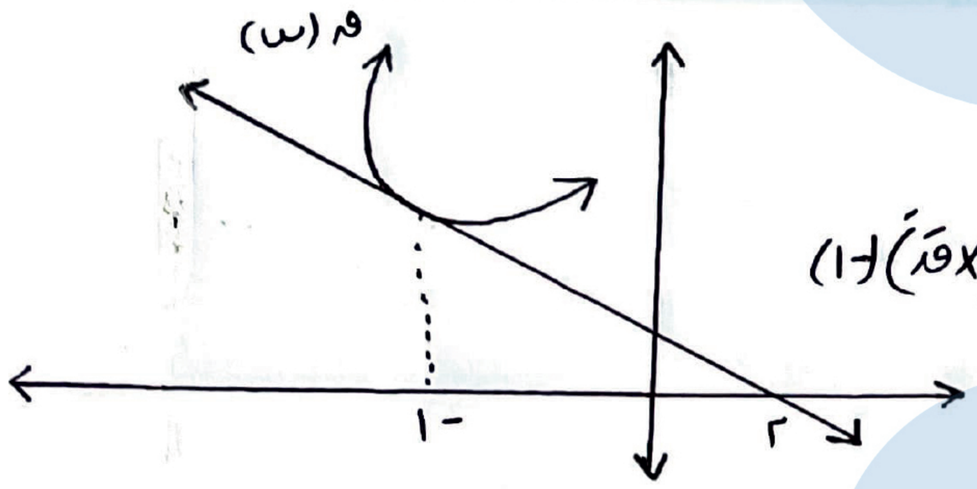
$\Leftarrow$ ب = $\frac{\text{ظاس}}{-\text{ظاس}}$ $\Leftarrow$ ب = -١

---

• السؤال الخامس

١/ الشكل المجاور يمثل منحنى قـ(س) والمماس له عند (س = -١) وكانت

نهـا $\frac{٣ قـ(س) - \sqrt[٣]{س}}{س^٤ + س}$ = $\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{٢}$ ، جـ = (هـ × قـ)(-١)
س $\to$ -١




الحل/

نهـا $\frac{٣ قـ(س) - \sqrt[٣]{س}}{س^٤ + س}$ = $\frac{٣ قـ(-١) + \sqrt[٣]{-١}}{(-١)^٤ - ١}$
س $\to$ -١

= $\frac{٣ قـ(-١) + \sqrt[٣]{-١}}{٠}$

بما أن المقام = ٠ / والنهاية موجودة $\Leftarrow$ البسط = ٠ $\Leftarrow$ ٣ قـ(-١) + $\sqrt[٣]{-١}$ = ٠

٣ قـ(-١) = $\sqrt[٣]{-١}$ $\Leftarrow$ قـ(-١) = $\frac{\sqrt[٣]{-١}}{٣}$ = $\frac{\sqrt[٣]{-١} \times \sqrt[٣]{-١}}{٣ \times \sqrt[٣]{-١}}$ = $\frac{\sqrt[٣]{-١}}{٣\sqrt[٣]{-١}}$ = $\frac{-١}{٣\sqrt[٣]{-١}}$

$\Leftarrow$ قـ(-١) = $\frac{-١}{٣\sqrt[٣]{-١}}$

(-١ ، هـ(-١)) ∈ ل

الميل = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = قـ(-١) $\Leftarrow$ $\frac{هـ(-١)}{-١ - ٢}$ = قـ(-١) $\Leftarrow$ هـ(-١) = -٣ × $\frac{\sqrt[٣]{-١}}{٣}$ = $\sqrt[٣]{-١}$

$\Leftarrow$ هـ(-١) = $\sqrt[٣]{-١}$

• نهـا $\frac{٣ قـ(س) - \sqrt[٣]{س}\, هـ(س)}{س^٤ + س}$ = $\frac{٣ قـ(١) - \sqrt[٣]{-١}}{١ + ٢-}$ = $\frac{٣ قـ(س) - \sqrt[٣]{-١}}{١ + ٣س}$ = $٢\sqrt[٣]{٣}$
س $\to$ ١

٣ قـ(-١) - $\sqrt[٣]{-١}$ = -$٢\sqrt[٣]{٣}$ $\Leftarrow$ ٣ قـ(-١) = -$\sqrt[٣]{٣}$ $\Leftarrow$ قـ(-١) = $\frac{-\sqrt[٣]{٣}}{٣}$ = $\frac{-١}{\sqrt[٣]{٣}}$

• المطلوب/ (هـ × قـ)'(-١) = هـ(-١) قـ'(-١) + قـ(-١) قـ(-١)

= $\sqrt[٣]{-١} \times -\frac{١}{\sqrt[٣]{-١}} + (\frac{-١}{\sqrt[٣]{-١}})^٢$ = -١ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{-٢}{٣}$

أ.مي حواري

---

١٢/ إذا كان صـ = $(\frac{١}{٢}$ ظاس جا(٢س))$^٣$ ، بيّن أن صـ = ٣ جأس جا(٢س)

الحل/ $\frac{١}{٢}$ ظاس جا(٢س) = $\frac{١}{٢} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times ٢$ جاس جتاس = جأس

$ص = (جا^{٢}س)^{٣} = جا^{٦}س \Leftarrow ص' = ٦جا^{٥}س \times جتا س$

$= ٣ \times ٢ \times جاس \times جا^{٤}س \times جتاس$

$= (٢ \times جاس \times جتاس) \times ٣جا^{٤}س$

$= ٣جا^{٤}س\ جا(٢س)$ #

---

٣/ اذا كان ق(س) كثير حدود معرف على [٢،٦] بحيث يقع منحناه في الربع الأول ومتناقصاً في مجاله

وكان هـ(س) = ٨ − س بين أن الاقتران $(ق \circ هـ)^{٢}(س)$ متزايداً في [٢،٦] .

الحل/ * ق(س) لـ2 متصل على [٢،٦] ومشتق على ]٢،٦[

ق(س) يقع في الربع الأول ⇐ ق(س) > ٠ على [٢،٦]

ق(س) متناقصاً في مجاله ⇐ ق'(س) < ٠ على ]٢،٦[

* هـ(س) = ٨ − س ⇐ لـ2 متصل ومشتق على ح

هـ'(س) = −١ < ٠ في ]٢،٦[

نفرض ل(س) = $(ق \circ هـ)^{٢}(س)$ متصل لأنه تركيب اقترانات متصلة .

ل'(س) = ٢ق(هـ(س)) ق'(هـ(س)) هـ'(س)

= (موجب) (سالب) (سالب) = موجب

بما أن/

ل'(س) > ٠ في ]٢،٦[ ⇐ ل(س) متزايداً في [٢،٦] #

أ.مي حواري

---

• السؤال السادس

١/ إذا كان $ص = \frac{١}{\sqrt{س}} + \sqrt{س}$ أثبت أن $٤س^{٣}(ص')^{٢} = (س-١)^{٢}$

الحل/

$ص = س^{-\frac{١}{٢}} + \sqrt{س} \Leftarrow \left(ص' = -\frac{١}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{س}}\right) \times ٢\sqrt{س}$

$\Leftarrow ٢\sqrt{س}\,ص' = -س^{-١} + ١ \Leftarrow ٢\sqrt{س}\,ص' = ١ - \frac{١}{س} \Leftarrow ٢\sqrt{س}\,ص' = \frac{س-١}{س}$

بتربيع الطرفين/ $(٢\sqrt{س}\,ص')^{٢} = \frac{(س-١)^{٢}}{س^{٢}}$

$٤س(ص')^{٢} = \frac{(س-١)^{٢}}{س^{٢}} \Leftarrow ٤س^{٣}(ص')^{٢} = (س-١)^{٢}$ #

---

٢/ ما قيمة $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{هـ^{س}-١}\right)$ باستخدام قاعدة لوبيتال

الحل/ $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{هـ^{س}-١}\right) = \lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س}-١-س}{س(هـ^{س}-١)} = \frac{هـ^{٠}-١-٠}{٠(هـ^{٠}-١)} = \frac{١-١}{٠(١-١)} = \frac{٠}{٠}$

توحيد مقامات

باستخدام لوبتال / نهـا $\frac{هـ^{س}-1}{س هـ^{س}+هـ^{س}-1} = \frac{هـ^{ن}-1}{هـ^{ن}-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{ن}{ن}$ ، س ← ٠

لوبتال مرة ثانية / نهـا $\frac{هـ^{س}}{س هـ^{س}+هـ^{س}+هـ^{س}} = \frac{هـ^{ن}}{هـ^{ن}+هـ^{ن}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

---

٣/ جـ معادلة العمودي لمنحنى ق(س) = س٣ - ٦س الذي ميله يساوي (-٤)

الحل نفرض نقطة التماس (س١ ، ق(س١))

ق'(س) = ٣س٢ - ٦ = ميل المماس

-٤ = ٣س٢ - ٦ ← ٣س٢ = ٢ ← س٢ = $\frac{2}{3}$ ← س = ١

ق(١) = ١ - ٦ = -٥ ← (١ ، -٥) نقطة التماس .

* ميل العمودي = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}} = \frac{1}{4}$

م = $\frac{1}{4}$ (س١ ، ص١) = (١ ، -٥)

معادلة العمودي / ص - ص١ = م(س - س١) ← ص - ٥ = $\frac{1}{4}$(س - ١)

ص + ٥ = $\frac{1}{4}$(س - ١)

---

أ.مي حواري

أتقنوا دراستكم يا شباب حتى نستغني عن المجرمين في
غذائنا ودوائنا ولباسنا وكل معاشنا، إفعل ذلك كله
وأنت تستحضر أنك تحافظ على انتصارات إخوانك التي
بذلوا لها دمائهم واعمل بانشراح صدر وهمة ويقين
بنصر الله لعباده المؤمنين ولو بعد حين

## روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/sinaae-kamel1

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath