2025
2026
الفصل الثاني

حلول الكامل

توجيهي علمي

الوحدة الخامسة

إعداد: أ.ميّ عمار حوّاري

إهـــــداء

إلى صاحبةُ القلبِ الأحنّ،

والأثر الأعمق،

إلى من كان حضورها فرقًا،

وكلماتها أثرًا لا يزول،

من غرست بداخلي حلمًا لا يزال يكبر،

ملهمتي وقدوتي... نجمتي اللامعة،

معلمتي الغالية **رولا بطة**، حفظكِ الله ورعاكِ دائمًا

أ. ميّ عمار حوّاري

مقدمة

إيماناً منا بضرورة توفير أفضل المصادر التعليمية لطلبتنا في مرحلة الثانوية العامة، يسّر فريق موقع قطرة التعليمي تقديم الإجابات النموذجية لـ "كراسة الكامل" (تصنيف أسئلة السنوات السابقة).

تأتي هذه الحلول ضمن إطار جهودنا المستمرة في موقع قطرة التعليمي، الذي تأسس برؤية طموحة تهدف إلى تزويد طلاب التوجيهي بتعليم عالي الجودة، لا سيما في مادة الرياضيات، مستخدمين أحدث الأساليب والوسائل التعليمية العالمية.

وقد تم إعداد هذه الكراسة خصيصاً لطلاب الفرع العلمي، لتتضمن حلولاً مفصلة وشرحاً وافياً لكل الأسئلة، انطلاقاً من إيماننا بأن التعلم الرقمي يمنح الطالب مرونة الوصول إلى المعرفة في أي وقت ومن أي مكان.

وإننا في موقع قطرة التعليمي، نؤمن بأن وراء كل إنجاز عظيم جنوداً مجهولين؛ لذا نتقدم بأسمى آيات الشكر والتقدير للمعلّمة الفاضلة **ميّ عمار حوّاري**، عضو فريقنا المتميز، التي سخرت وقتها وجهدها وخبرتها العميقة في إعداد هذه الحلول بدقة وإتقان. إن خبرتها الواسعة تجلت في أسلوب الشرح المبسط والواضح الذي يضع مصلحة الطالب وتفوقه الأكاديمي في المقام الأول؛ فجزيل الشكر لها، ونسأل الله أن يجعل هذا العمل في ميزان حسناتها.

أتمنى أن تكون هذه الكراسة عونًا لكم في رحلتكم نحو النجاح، وأن تساهم في تحقيق التفوق والتميز الذي تسعون إليه.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح الدائم.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/kamel5

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath

نصائح مهمة لكيفية دراسة الرياضيات؟

عزيزي الطالب/ عزيزتي الطالبة، إليك بعض النصائح التي ستساعدك على التفوق في دراستك لهذه المادة وتحقيق أفضل النتائج:

1. **إخلاص النية لله.**
2. **التوكل على الله** بالأخذ بجميع أسباب التفوق، والدعاء والالحاح فيه فهو من أعظم أسلحة المسلم.
3. **فهم الأساسيات أولًا:** تأكد من أنك تفهم الأساسيات بشكل جيد. ولضمان التمكن من الأساسيات فقد وفرنا دورة مجانية عبر موقع قطرة التعليمي.
4. **التدريب المستمر باستخدام الورقة والقلم:** الحل المتكرر هو الطريق إلى الإتقان، حل المسائل بانتظام وبشكل يومي سيعزز من فهمك ويساعدك على استيعاب المفاهيم بشكل أعمق.
5. **افهم المسألة قبل الحل:** لا تتسرع في حل المسألة دون فهم كامل لمتطلباتها، خذ وقتك في قراءة السؤال جيدًا، وفهم المطلوب قبل الشروع في الحل، التسرع قد يؤدي إلى أخطاء غير ضرورية.
6. **حل المسائل بطريقة منظمة:** نظم خطوات الحل بطريقة واضحة ومنهجية، تدوين الخطوات بتسلسل منطقي يساعدك على متابعة الحل والتعرف على أي خطأ قد يحدث بسهولة، هذا الأسلوب يعزز أيضًا من فرصك في الحصول على درجات كاملة.
7. **راجع بانتظام:** خصص وقتًا لمراجعة ما تعلمته بانتظام، ولا تترك الأمور تتراكم حتى اقتراب موعد الامتحانات، المراجعة المستمرة تسهل تذكر المعلومات وتجعلك أكثر استعدادًا للامتحان.
8. **لا تخجل من طلب المساعدة:** إذا واجهت صعوبة في فهم مفهوم معين أو في حل مسألة ما، لا تتردد في طلب المساعدة من معلمك أو زملائك، الحوار والتفاعل مع الآخرين قد يفتح لك آفاقًا جديدة لفهم المادة.
9. **حافظ على هدوئك وثقتك بنفسك:** التوتر قد يؤثر سلبًا على أدائك، حافظ على هدوءك وثقتك بنفسك أثناء الدراسة وفي الامتحانات، تذكر أن النجاح في الرياضيات يعتمد على الاستمرارية والعمل الجاد، وليس على الحفظ فقط.

10. **استعد للامتحانات بالتحضير المبكر:** لا تنتظر حتى اللحظة الأخيرة، ابدأ في التحضير للامتحانات قبل وقت كافٍ، وضع خطة دراسية تغطي جميع الوحدات بشكل متوازن، قم بحل أسئلة الامتحانات السابقة المرفقة في هذه الكراسة، وتأكد من مراجعة الحلول بعد الانتهاء.

11. **قم بتحليل الأخطاء:** عند ارتكاب خطأ في حل مسألة، لا تتجاهله. بدلاً من ذلك، عد إليه وحاول فهم سبب الخطأ وكيف يمكنك تجنبه في المستقبل، التعلم من الأخطاء يُعد أحد أفضل الطرق لتطوير مهاراتك الرياضية.

12. **اجعل لك دفتراً خاصاً لتدوين كل ما يتم دراسته واحرص على تدوين الملاحظات المهمة:** أثناء حل المسائل أو مشاهدة الفيديوهات، احرص على تدوين كل شيء لأنه سيكون من الصعب مشاهدة الفيديوهات في يوم واحد مثل يوم الامتحان، وكتابة الملاحظات المهمة تساعدك على تنظيم أفكارك وتذكر النقاط المهمة عند المراجعة لاحقًا.

نتمنى لك التوفيق والنجاح في رحلتك الدراسية، ونتطلع لأن تكون هذه الكراسة عونًا لك في تحقيق أهدافك في مادة الرياضيات. تذكر أن كل مجهود تبذله اليوم سيثمر في المستقبل.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

الدرس الأول | التجزئة ومجموع ريمان

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2008 / إذا كانت ح$_ن$ تجزئة منتظمة للفترة [٠، ٢٠]، وكان العنصر الرابع فيها يساوي (٦)، فإن عدد عناصر ح$_ن$ يساوي :

أ/ ٢٠ ب/ ١١ جـ/ ١٠ د/ ٩

الحل/ أ = ٠ ، ب = ٢٠

العنصر الرابع = س$_٣$ = ٦ ⟸ س$_ر$ = أ + ل ر ⟸ س$_٣$ = ٠ + ((ب − أ)/ن) × ٣ ⟸ ٦ = ((٢٠ − ٠)/ن) × ٣

⟸ ٦ن = ٢٠ × ٣ ⟸ ن = (٢٠ × ٣)/٦ ⟸ ن = ١٠

عدد عناصر التجزئة = ن + ١ = ١٠ + ١ = ١١ ب

• 2008 إكمال/ إذا كان ق(س) = س^٢ ، س ∈ [١، ٣]، وكانت ح$_ن$ تجزئة منتظمة للفترة ذاتها، س$^*_ر$ = س$_ر$ ، فإن م(ح$_٢$، ق) يساوي

أ/ ٥ ب/ ٢٦/٣ جـ/ ١٣ د/ ٤

الحل/

أ = ١ ، ب = ٣ ، ن = ٢ ⟸ ل = (ب − أ)/ن = (٣ − ١)/٢ = ٢/٢ = ١

ح$_٢$ = {١، ٢، ٣}

م(ح$_٢$، ق) = ل $\sum_{ر=١}^{٢}$ ق(س$^*_ر$) = ١ $\sum_{ر=١}^{٢}$ ق(س$_ر$) = ق(س$_١$) + ق(س$_٢$) = ق(٢) + ق(٣)

⟸ م(ح$_٢$، ق) = ٢^٢ + ٣^٢ = ٤ + ٩ = ١٣ جـ

• 2009 / إذا كانت ح$_ن$ = {١، ٥/٣، ٧/٣، ..... ، ١٥} تجزئة منتظمة للفترة [١، ١٥]، ما عدد عناصر التجزئة؟

أ/ ٢١ ب/ ٢٢ جـ/ ٢٠ د/ ١٥

الحل/ ل = ٥/٣ − ١ = ٢/٣

ل = (ب − أ)/ن ⟸ ٢/٣ = (١٥ − ١)/ن ⟸ ٢ن = ٣ × ١٤ ⟸ ن = (٣ × ١٤)/٢ = ٢١

عدد عناصر التجزئة = ن + ١ = ٢١ + ١ = ٢٢ ب

• 2009 إكمال/ إذا كانت ح$_ن$ تجزئة منتظمة للفترة [−١٢، ٢٠]، وكان العنصر السادس فيها يساوي (−٢)، ما عدد عناصر هذه التجزئة :

أ/ ١٦ ب/ ١٥ جـ/ ١٧ د/ ٦

الحل/ ل = (ب − أ)/ن = (٢٠ − −١٢)/ن = ٣٢/ن

العنصر السادس = $س_٥$ = -٢

$س_ر = أ + ل ر$ ⇐ $س_٥ = -١٢ + \frac{٣٢}{ن} \times ٥$ ⇐ $-٢ = -١٢ + \frac{٣٢ \times ٥}{ن}$ ⇐ $\cancel{١٠}^{٢} = \frac{٣٢ \times \cancel{٥}}{ن}$

⇐ ٢ن = ٣٢ ⇐ ن = ١٦

عدد عناصر التجزئة = ن + ١ = ١٦ + ١ = ١٧ ج

• ٢٠١٠ / اذا كانت $ح_ن$ = {أ، -٢، ..... ، ٨} تجزئة منتظمة ، ما قيمة الثابت أ =

أ/ -٦ ب/ -٥ ج/ -٣ د/ -٤

الحل/ $ح_ن$ = {أ، -٢، ..... ، ٨}

⇐ $ح_٥$ = {-٢، ..... ، ٨} ⇐ $ل = \frac{ب-أ}{ن} = \frac{٨ - -٢}{٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

⇐ $ح_ن$ = {أ، -٢، ..... ، ٨} ⇐ أ = -٢ - ل = -٢ - ٢ = -٤ د

• ٢٠١٠ إكمال/ إذا كانت $ح_٨$ تجزئة منتظمة للفترة [-١، ٣] فإن الفترة الجزئية الأصغر هي:

أ/ [-٢، ٣] ب/ [٢,٧٥ ، ٣] ج/ [٢,٥ ، ٣] د/ [٢,٣ ، ٣]

الحل/

$ل = \frac{ب-أ}{ن} = \frac{٣ - -١}{٨} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

الفترة الجزئية الثامنة "الأصغر" = [$س_٧$ ، ٣] ⇐ $س_٧ = ٣ - ل = ٣ - \frac{١}{٢} = ٢,٥$

= [٢,٥ ، ٣] ج

• ٢٠١١/ إذا كان العنصر السادس في تجزئة نونية منتظمة للفترة [-٢، ٤] يساوي ١ ، ما عدد عناصر هذه التجزئة

أ/ ١٠ ب/ ١١ ج/ ١٢ د/ ١٣

الحل/ أ = -٢ ، ب = ٤ ، $ل = \frac{ب-أ}{ن} = \frac{٤ - -٢}{ن} = \frac{٦}{ن}$

العنصر السادس = $س_٥$ = ١ ⇐ $س_ر = أ + ل ر$ ⇐ $س_٥ = -٢ + \frac{٦}{ن} \times ٥$ ⇐ $١ = -٢ + \frac{٣٠}{ن}$

⇐ $٣ = \frac{٣٠}{ن}$ ⇐ ٣ن = ٣٠ ⇐ ن = ١٠

عدد عناصر التجزئة = ن + ١ = ١٠ + ١ = ١١ ب

• ٢٠١٢/ إذا كانت $ح_{١٢}$ تجزئة منتظمة للفترة [٣، ب] وكان العنصر التاسع = ٥ ، فإن قيمة الثابت ب تساوي:

أ/ ١٢ ب/ ١٠ ج/ ٨ د/ ٦

الحل/ $ل = \frac{ب-أ}{ن} = \frac{ب-٣}{١٢}$

العنصر التاسع = $س_٨$ ⇐ $س_٨ = ٥$ ⇐ $س_ر = أ + ل ر$

$\text{س}_٨ = ٣ + \frac{(\text{ب}-٣)}{٣}\times ٨ \Leftarrow ٥ = ٣ + \frac{٢(\text{ب}-٣)}{٣} \Leftarrow ٢ = \frac{٢(\text{ب}-٣)}{٣} \Leftarrow ٣ = \text{ب}-٣ \Leftarrow \text{ب} = ٦$ د

• 2012 / إكمال / إذا كانت ح$_ن$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [١، ٧] وكان العنصر الثاني منها = ١٫٣
ما قيمة ن

أ/ ١٩ ب/ ٢٠ جـ/ ٢١ د/ ٢٢

الحل/ $ل = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{ن} = \frac{٧-١}{ن} = \frac{٦}{ن}$

العنصر الثاني $= \text{س}_١ = ١٫٣ \Leftarrow \text{س}_ر = \text{أ} + ر\,ل \Leftarrow \text{س}_١ = ١ + \frac{٦}{ن}\times ١ \Leftarrow ١٫٣ = ١ + \frac{٦}{ن}$
$\Leftarrow ٠٫٣ = \frac{٦}{ن} \Leftarrow ٠٫٣\,ن = ٦ \Leftarrow ن = \frac{٦}{٠٫٣} = ٢٠$ ب

• 2013 / إذا كانت ح$_ن$ = {١، ......، ١٧، ١٩، ......، ٩٩} تجزئة منتظمة للفترة [١، ٩٩]
ما عدد الفترات الجزئية الناتجة عن التجزئة ح$_ن$

أ/ ٤٨ ب/ ٤٩ جـ/ ٥٠ د/ ٥١

الحل/ $ل = ١٩ - ١٧ = ٢$

$ل = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{ن} \Leftarrow ٢ = \frac{٩٩-١}{ن} \Leftarrow ٢ن = ٩٨ \Leftarrow ن = ٤٩$ ب

• 2014 / إذا كانت ح تجزئة منتظمة للفترة [أ، ب] وكان $\sum_{ر=١}^{٥} (\text{س}_ر - \text{س}_{ر-١}) = ١٠$ ، فإن
طول الفترة الجزئية [س$_٤$، ب] =

أ/ ١٠ ب/ ٢٫٥ جـ/ ٢ د/ ١

الحل/ $\sum_{ر=١}^{٥} (\text{س}_ر - \text{س}_{ر-١}) = ١٠ \Leftarrow \text{ب} - \text{أ} = ١٠$

طول الفترة الجزئية $= ل = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{ن} = \frac{١٠}{٥} = ٢$ جـ

• 2016 / إذا كانت ح$_ن$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [−١، ٥] وكان طول الفترة الجزئية يساوي $\frac{١}{٣}$
فإن عدد عناصرها

أ/ ٢٠ ب/ ١٩ جـ/ ١٨ د/ ٦

الحل/ $ل = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{ن} \Leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{٥ - -١}{ن} \Leftarrow ن = ٣ \times ٦ = ١٨$

• عدد العناصر $= ن + ١ = ١٨ + ١ = ١٩$ ب

• 2017 / إذا كانت ح$_٨$ = {١، ......، ٦٥} تجزئة منتظمة للفترة [١، ٦٥] ، وكانت
[س$_{ر-١}$، س$_ر$] فترة جزئية لهذه التجزئة ، ما قيمة $\sum_{ر=١}^{٨} (\text{س}_ر - \text{س}_{ر-١})$

أ/ ٨ ب/ ٩ جـ/ ٦٤ د/ ٦٥

الحل/ $\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - س_{ر-١}) = ب - أ = ٦٥ - ١ = ٦٤$ ج

• 2017 دور ثاني / إذا كانت $ح_م = [٠، \frac{٥}{ن}، \frac{١٠}{ن}، ...، ٢٠]$ تجزئة منتظمة للفترة [٠، ٢٠] فإن عدد عناصر التجزئة هو

أ/ $٤ن$ ب/ $٤ن+١$ ج/ $٤ن-١$ د/ $٥ن$

الحل/ $ل = \frac{١٠}{ن} - \frac{٥}{ن} = \frac{٥}{ن}$

$ل = \frac{ب-أ}{م} = \frac{٢٠-٠}{م} = \frac{٢٠}{م}$

* $\frac{\cancel{٥}}{ن} = \frac{\cancel{٢٠}^{٤}}{م}$ ⇐ $م = ٤ن$ ⇐ عدد عناصر التجزئة = $م+١ = ٤ن+١$ ب

• 2019 دور أول/ إذا كانت $ح_ن$ تجزئة منتظمة للفترة [-٢، ٧] وكان $س_٦ = ١$ ما عدد عناصر التجزئة

أ/ ٥٥ ب/ ٥٤ ج/ ١٩ د/ ١٨

الحل/ $ل = \frac{ب-أ}{ن} = \frac{٧--٢}{ن} = \frac{٩}{ن}$

$س_ر = أ + ل ر$ ⇐ $س_٦ = -٢ + \frac{٩}{ن} × ٦$ ⇐ $١ = -٢ + \frac{٥٤}{ن}$ ⇐ $\frac{\cancel{٣}^{١}}{} = \frac{\cancel{٥٤}^{١٨}}{ن}$ ⇐ $ن = ١٨$

* عدد عناصر التجزئة = $ن+١ = ١٨+١ = ١٩$ ج

• 2019 دور ثاني/ إذا كانت $ح_٨$ تجزئة منتظمة للفترة [أ، ٦] وكان طول الفترة الجزئية = $\frac{١}{٤}$ ما قيمة العنصر الثامن من هذه التجزئة

أ/ $\frac{٢٣}{٤}$ ب/ $\frac{٢٢}{٤}$ ج/ ٦ د/ ٤

الحل/ $ل = \frac{ب-أ}{ن}$ ⇐ $\frac{١}{\cancel{٤}_{١}} = \frac{٦-أ}{\cancel{٨}_{٢}}$ ⇐ $٢ = ٦ - أ$ ⇐ $أ = ٦ - ٢ = ٤$

العنصر الثامن = $س_٧$ ⇐ $س_ر = أ + ل ر$ ⇐ $س = ٤ + \frac{١}{٤} × = ٤ + ١$

⇐ $س_٧ = \frac{٢٣}{٤}$ أ

• 2020 دور أول/ لتكن $ح_٥$ تجزئة منتظمة في [١، ٣١] ، ما قيمة $\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - س_{ر-١})$

أ/ ٣٠ ب/ ٥٠ ج/ ٣٢ د/ $\frac{٣}{٥}$

الحل/ $\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - س_{ر-١}) = ٣١ - ١ = ٣٠$ أ

ب - أ

• 2020 دور أول / إذا كانت ح = [-٣، -١، ٠، ١] تجزئة للفترة [-٣، ١] وكان الاقتران ق(س) = ٢س ، صيغ $س^*_ر = س_{ر-١}$ ما قيمة م(ح، ق)

أ/ -١٤ ب/ -١٦ ج/ -٧ د/ ٨

الحل /

[$س_{ر-١}$، $س_ر$]	ل	$س^*_ر$	ق($س^*_ر$)	ل ق($س^*_ر$)
[-٣، -١]	٢	-٣	-٦	-١٢
[-١، ٠]	١	-١	-٢	-٢
[٠، ١]	١	٠	٠	٠

م(ح، ق) = $\sum_{ر=١}^{٣}$ ق($س_{ر-١}$) × ل = -١٢ + -٢ + ٠ = -١٤ أ

• 2020 دور ثاني / إذا كان $ح_{١٠٠}$ تجزئة منتظمة للفترة [أ، ١٦] وكانت الفترة الجزئية العاشرة والعشرون هي [د، ٨] ما قيمة الثابت أ

أ/ ٦ ب/ -٦ ج/ ١٢ د/ -١٢

الحل /

* الفترة الجزئية العاشرة والعشرون = [$س_{١٩}$، $س_{٢٠}$] = [د، ٨] ⇐ $س_{٢٠}$ = ٨

$س_ر$ = أ + ل ر ⇐ $س_{٢٠}$ = أ + $(\frac{١٦-أ}{\cancel{١٠٠}})$ × $\cancel{٢٠}$ ⇐ [٨ = أ + $\frac{١٦-أ}{٥}$] × ٥

⇐ ٤٠ = ٥أ + ١٦ - أ ⇐ ٤٠ = ٤أ + ١٦ ⇐ $\frac{٢٤}{٤} = \frac{٤أ}{٤}$ ⇐ أ = ٦ أ

• 2020 دور أول / إذا كانت ح = {-٢، ٠، ١، ٣} تجزئة للفترة [-٢، ٣] وكان الاقتران ق(س) = أ$س^٢$ - ٢ ، م(ح، ق) = ٣٠ ، صيغ $س^*_ر = س_{ر-١}$ ، ما قيمة الثابت أ

أ/ ٤ ب/ $\frac{٨}{٣}$ ج/ $\frac{٢١}{٥}$ د/ ٢

الحل /

[$س_{ر-١}$، $س_ر$]	ل	$س^*_ر$	ق($س^*_ر$)	ل ق($س^*_ر$)
[-٢، ٠]	٢	-٢	٤أ - ٢	٨أ - ٤
[٠، ١]	١	٠	-٢	-٢
[١، ٣]	٢	١	أ - ٢	٢أ - ٤

م(ح، ق) = $\sum_{ر=١}^{٣}$ ق($س^*_ر$) ل ⇐ ٣٠ = ٨أ - ٤ - ٢ + ٢أ - ٤ ⇐ ٣٠ = ١٠أ - ١٠ ⇐ ٤٠ = ١٠أ ⇐ أ = ٤

• 2020 دورثالث / إذا كانت σ_n تجزئة منتظمة للفترة [٠، ٢٠] وكان العنصر الرابع فيها يساوي (٦)، ما عدد الفترات الجزئية الناتجة من تلك التجزئة

أ/ ٢٠   ب/ ١١   جـ/ ١٠   د/ ٩

الحل/ أ = ٠ ، ب = ٢٠ ، العنصر الرابع = $س_٣$ = ٦

$س_ر$ = أ + ل ر ⇐ $س_٣$ = ٠ + ل × ٣ ⇐ ٦ = ٣ل ⇐ ٢ = ل

* ل = $\frac{ب - أ}{ن}$ ⇐ ٢ = $\frac{٢٠ - ٠}{ن}$ ⇐ ٢ن = ٢٠ ⇐ ن = ١٠

* عدد الفترات الجزئية = ن = ١٠   جـ

• 2020 دورثاني / إذا كان عدد عناصر التجزئة σ_n للفترة [أ، ب] يساوي ٩ عناصر، وكانت الفترة الجزئية الرابعة فيها [٥، $\frac{٢١}{٤}$]، ما قيمة (ب − أ)

أ/ ٢   ب/ ٤   جـ/ $\frac{٩}{٤}$ د/ $\frac{٩}{٢}$

الحل/ ل = $\frac{٢١}{٤}$ − ٥ = $\frac{١}{٤}$ ، عدد عناصر التجزئة = ن + ١ = ٩ ⇐ ن = ٨

* ل = $\frac{ب - أ}{ن}$ ⇐ $\frac{١}{\cancel{٤}}$ = $\frac{ب - أ}{\cancel{٨}\,٢}$ ⇐ ب − أ = ٢   أ

• 2022 دورأول / ما رتبة العنصر الذي قيمته ٨٫١ في التجزئة $\sigma_{١٠٠}$ للفترة [٢، ١٢]

أ/ ٩٠   ب/ ٨٩   جـ/ ٨٨   د/ ٨٧

الحل/ ل = $\frac{ب - أ}{ن}$ = $\frac{١٢ - ٢}{١٠٠}$ = $\frac{١٠}{١٠٠}$ = $\frac{١}{١٠}$

$س_ر$ = أ + ل ر ⇐ $س_ر$ = ٢ + $\frac{١}{١٠}$ر ⇐ ٨٫١ = ٢ + $\frac{١}{١٠}$ر ⇐ ٦٫١ = $\frac{١}{١٠}$ر

⇐ ٦١ = ر

رتبة العنصر = ر + ١ = ٦١ + ١ = ٦٢   ب

• 2023 دورأول / إذا كانت $\sigma_{٢٠}$ = {أ، أ−١، ...، ٣٥، ب} تجزئة منتظمة للفترة [أ، ب] ما قيمة أ

أ/ −٣٫٥   ب/ −٣   جـ/ +٣٫٥   د/ −٢

الحل/ $\sigma_{٢٠}$ = {أ، أ−١، ...، ٣٥، ب}

$\sigma_{١٨}$ = {−١، ...، ٣٥} ⇐ ل = $\frac{ب - أ}{ن}$ = $\frac{٣٥ + ١}{١٨}$ = $\frac{٣٦}{١٨}$ = ٢

⇐ $\sigma_{٢٠}$ = {أ، أ−١، ...، ٣٥، ب}

+ل   −ل

أ = −١ − ل = −١ − ٢ = −٣   ب

• 2023 دوري ثاني / إذا كانت ح_ن = {-١ ، ------- ، ٥٤ ، ٥٩ ، ------- ، ٩٩} تجزئة منتظمة في [-١ ، ٩٩] ، ما عدد الفترات الجزئية الناتجة عن هذه التجزئة:

أ/ ١٩ ب/ ٢٠ ج/ ٢١ د/ ٢٢

الحل/ ل = (ب − أ)/ن ⇐ ٥٩ − ٥٤ = (٩٩ − -١)/ن ⇐ ٥ = ١٠٠/ن ⇐ ٥ن = ١٠٠

⇐ ن = ٢٠ ب

• 2024 دوري ثاني / إذا كانت ح_ن = {أ ، -٢ ، ------- ، ٦} تجزئة منتظمة عدد عناصرها (١٠) للفترة [أ ، ٦] ، ما قيمة الثابت أ

أ/ -٣ ب/ ٢ ج/ -٢٨/١٠ د/ -٢٦/١١

الحل/ عدد العناصر = ن + ١ = ١٠ ⇐ ن = ٩ / ح_٨ = {-٢ ، ------- ، ٦}

ل = (ب − أ)/ن ⇐ (٦ − -٢)/٨ = ٨/٨ = ١ = ل

أ = -٢ − ل = -٢ − ١ = -٣ أ

• 2025 دور أول / إذا كانت ح_١١ = {أ ، ٢ ، ------- ، ١٧ ، ب} تجزئة منتظمة للفترة [أ ، ب] ما قيمة الثابت أ

أ/ ٥/٣ ب/ ١ ج/ -١/٣ د/ ١/٣

الحل/ ح_٩ = {٢ ، ------- ، ١٧}

ل = (ب − أ)/ن = (١٧ − ٢)/٩ = ١٥/٩ = ٥/٣

أ = ٢ − ل = ٢ − ٥/٣ = ١/٣ د

• 2025 دوري ثاني / لتكن ح_ن تجزئة منتظمة للفترة [-٢ ، ٦] فإذا كانت النسبة بين العنصر الثالث إلى العنصر الرابع تساوي ١ : ٣ ما قيمة ن

أ/ ١٢ ب/ ٢٤ ج/ ٦ د/ ١٨

الحل/ العنصر الثالث / العنصر الرابع = ١/٣ ⇐ س_٢ / س_٣ = ١/٣

* س_ر = أ + ر ل
س_٢ = -٢ + ٢ل
س_٣ = -٢ + ٣ل

⇐ (-٢ + ٢ل)/(-٢ + ٣ل) = ١/٣ ⇐ -٦ + ٦ل = -٢ + ٣ل

⇐ ٦ل − ٣ل = -٢ + ٦ ⇐ ٣ل = ٤ ⇐ ل = ٤/٣

$\Leftarrow$ ل $= \frac{ب - أ}{ن} \Leftarrow \frac{٤}{٣} = \frac{٦ - {}^{-}٢}{ن} \Leftarrow \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{ن} \Leftarrow ن = ٦$ ج

• 2025 دور ثالث / إذا كانت ق(س) = ٧ معرفاً في [١، ٤] وكانت $ط_ن$ تجزئة منتظمة [١، ٤] ما قيمة م($ط_ن$، ق)

أ/ ٣ ب/ ٧ ج/ ٢١ د/ ٢٨

الحل/ **ملاحظة:** للاختيار من متعدد:

إذا كانت $ط_ن$ تجزئة للفترة [أ، ب] وكان ق(س) = م، م $\in$ ح

فإن م($ط_ن$، ق) = م(ب − أ)

$\Leftarrow$ م($ط_ن$، ق) = م($ط_ن$، ٧) = ٧(٤ − ١) = ٧ × ٣ = ٢١ ج

طريقة (٢) / * ل $= \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٤ - ١}{ن} = \frac{٣}{ن}$

* ق($س_ر^*$) = ٧ لجميع قيم $س_ر^*$

* م($ط_ن$، ق) = ل $\sum_{ر=١}^{ن}$ ق($س_ر^*$) $= \frac{٣}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ٧ = \frac{٣}{ن} \times ٧ن = ٢١$

• تكميلية 2024 / إذا كانت $ط_{١٢}$ تجزئة منتظمة للفترة [-١، ١٩]، ما ترتيب الحد الذي قيمته ١٤

أ/ الثامن ب/ التاسع ج/ العاشر د/ السابع

الحل/ ل $= \frac{ب - أ}{ن} = \frac{١٩ - {}^{-}١}{١٢} = \frac{٢٠}{١٢} = \frac{٥}{٣}$

$س_ر = أ + ل ر \Leftarrow ١٤ = {}^{-}١ + \frac{٥}{٣} ر \Leftarrow ١٥ = \frac{٥}{٣} ر \Leftarrow ر = ٩$

ترتيب الحد = ر + ١ = ٩ + ١ = ١٠ $\Leftarrow$ الحد العاشر ج

• طولكرم 2025 / إذا كان عدد عناصر التجزئة المنتظمة $ط_ن$ للفترة [أ، ١ + ٣أ] يساوي (١٦) وكان العنصر العاشر منها يساوي (١٦)، ما قيمة الثابت أ

أ/ $\frac{٥٩}{١٤}$ ب/ ٧ ج/ ٨ د/ ٥

الحل/ عدد عناصر التجزئة = ن + ١ = ١٦ $\Leftarrow$ ن = ١٥

* العنصر العاشر = $س_٩$ = ١٦ $\Leftarrow س_ر = أ + ل ر \Leftarrow س_٩ = أ + \left(\frac{١ + ٣أ - أ}{١٥}\right) \times ٩$

٥ × (٣×(أ٢+١)/٥ + أ = ١٦) ⇐ (أ٢+١)٣ + أ٥ = ٨٠ ⇐ أ٦ + ٣ + أ٥ = ٨٠

⇐ ٣ + أ١١ = ٨٠ ⇐ أ١١/١١ = ٧٧/١١ ⇐ أ = ٧   **ب**

• طولكرم / 2025 / في التجزئة المنتظمة ح ن للفترة [أ ، ٣أ] ، إذا كان العنصر السادس فيها هو (٥/٤ أ) ما عدد الفترات الجزئية

أ/ ٢٠   ب/ ٢١   جـ/ ٤٠   د/ ٤١

الحل/

العنصر السادس = س٥ = ٥/٤ أ ⇐ س ر = أ + ر ل ⇐ س٥ = أ + ٥ × (٣أ − أ)/ن ⇐ ٥أ/٤ = أ + ٥ × ٢أ/ن

⇐ ٥أ/٤ − أ = ١٠أ/ن ⇐ أ/٤ = ١٠أ/ن ⇐ أ ≠ ٠ ، ن = ٤ × ١٠ = ٤٠   **جـ**

• رام الله / 2025 / إذا كانت ح ن تجزئة منتظمة للفترة [٢ ، ب] وكان الوسط الحسابي للعنصرين الثاني والرابع يساوي ٥ ما قيمة العنصر الأخير؟

أ/ ١٢   ب/ ١١   جـ/ ١٠   د/ ٩

الحل/

العنصر الثاني = س١ = ٢ + ١ × ل = ٢ + ل

العنصر الرابع = س٣ = ٢ + ٣ل

الوسط الحسابي = (س١ + س٣)/٢ = ٥ ⇐ (٢ + ل + ٢ + ٣ل)/٢ = ٥ ⇐ ٤ل + ٤ = ١٠

⇐ ٤ل = ٦ ⇐ ل = ٣/٢

ل = (ب − أ)/ن ⇐ ٣/٢ = (ب − ٢)/٦ ⇐ ب − ٢ = ٩ ⇐ ب = ١١

العنصر الأخير = ب = ١١   **ب**

• خارجي تفوق / إذا كانت ح ن+١ تجزئة منتظمة للفترة [٢ ، ٢٢] وكان طول الفترة الجزئية الواحدة يساوي ١/٥ ، ما عدد عناصر التجزئة =

أ/ ١٠٢   ب/ ١٠١   جـ/ ١٠٠   د/ ٩٩

الحل/

ل = (ب − أ)/ن ⇐ ١/٥ = (٢٢ − ٢)/(ن + ١) ⇐ ن + ١ = ١٠٠

⇐ ح ن+١ = ح ١٠٠ ⇐ عدد عناصر التجزئة = ١٠٠ + ١ = ١٠١   **ب**

١٠. القسم الثاني: أجب عن الأسئلة الآتية:

• 2011 كامل / إذا كانت ح₁₂ تجزئة منتظمة للفترة [٢، أ] وكان العنصر السابع يساوي (٨) ما قيمة الثابت أ

الحل/ $\text{أ} = ٢$ ، $\text{ب} = \text{أ}$ ، $\text{ن} = ١٢$ ، العنصر السابع $= \text{س}_٦ = ٨$

$\text{س}_\text{ر} = \text{أ} + \text{ر ل} \Leftarrow \text{س}_٦ = ٢ + ٦ \times \text{ل} \Leftarrow ٨ = ٢ + ٦\text{ل} \Leftarrow \frac{٦}{٦} = \frac{٦\text{ل}}{٦} \Leftarrow ١ = \text{ل}$

$* \ \text{ل} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \Leftarrow ١ = \frac{\text{أ} - ٢}{١٢} \Leftarrow ١٢ = \text{أ} - ٢ \Leftarrow \boxed{١٤ = \text{أ}}$

• 2020 دور أول / لتكن ح_ن تجزئة منتظمة للفترة [أ، ١٤] وكان العنصر الخامس والسابع ٦، ١٠ على الترتيب، أوجد

١) طول الفترة الكلية ٢) قيمة ن

الحل/ $\text{س}_\text{ر} = \text{أ} + \text{ر ل}$

العنصر الخامس $= \text{س}_٤ = ٦ \Leftarrow \text{س}_٤ = \text{أ} + ٤ \times \text{ل} \Leftarrow ٦ = \text{أ} + ٤\text{ل}$ — (١)

العنصر السابع $= \text{س}_٦ = ١٠ \Leftarrow \text{س}_٦ = \text{أ} + ٦\text{ل} \Leftarrow ١٠ = \text{أ} + ٦\text{ل}$ — (٢)

(٢) − (١) / $٤ = ٢\text{ل} \Leftarrow \text{ل} = ٢$ نعوضها في (١)

$٦ = \text{أ} + ٤ \times ٢ \Leftarrow ٦ - ٨ = \text{أ} \Leftarrow \text{أ} = -٢$

١) طول الفترة الكلية $= \text{ب} - \text{أ} = ١٤ - -٢ = \boxed{١٦}$

٢) $\text{ل} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \Leftarrow ٢ = \frac{١٦}{\text{ن}} \Leftarrow ٢\text{ن} = ١٦ \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ٨}$

• 2020 دور أول / اذا كان ق(س) = ٥س − ٢ معرفاً على الفترة [١، ب] وكان ح₅ تجزئة خماسية منتظمة لهذه الفترة بحيث م(ح₅، ق) = ٣٦ أوجد قيمة الثابت ب حيث $\text{س}^*_\text{ر} = \text{س}_\text{ر}$

الحل/ $* \ \text{ل} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{\text{ب} - ١}{٥}$ $* \ \text{س}^*_\text{ر} = \text{س}_\text{ر} = \text{أ} + \text{ر ل} = ١ + \left(\frac{\text{ب} - ١}{٥}\right)\text{ر}$

$* \ \text{ق}(\text{س}^*_\text{ر}) = \text{ق}\left(١ + \frac{(\text{ب} - ١)}{٥}\text{ر}\right) = ٥\left(١ + \frac{(\text{ب} - ١)}{٥}\text{ر}\right) - ٢ = ٥ + (\text{ب} - ١)\text{ر} - ٢$

$= ٣ + (\text{ب} - ١)\text{ر}$

$* \ \text{م}(\text{ح}_٥ ، \text{ق}) = \text{ل} \sum_{\text{ر}=١}^{٥} \text{ق}(\text{س}^*_\text{ر}) \Leftarrow ٣٦ = \frac{(\text{ب} - ١)}{٥} \sum_{\text{ر}=١}^{٥} \left(٣ + (\text{ب} - ١)\text{ر}\right)$

$\Leftarrow ٣٦ = \frac{(\text{ب} - ١)}{٥}\left(\sum_{\text{ر}=١}^{٥} ٣ + \sum_{\text{ر}=١}^{٥} (\text{ب} - ١)\text{ر}\right) \Leftarrow ٣٦ = \frac{(\text{ب} - ١)}{٥}\left(٣ \times ٥ + (\text{ب} - ١) \times \frac{٥(٥ + ١)}{٢}\right)$

⇐ ٣٦ = $\frac{ب-١}{٥}$ (١٠ + ١٠(ب−١)) ⇐ [٣٦ = ٣(ب−١) + ٣(ب−١)^{٢}] ÷ ٣

١٢ = ب − ١ + (ب−١)^{٢} ⇐ ١٢ = ب − ١ + ب^{٢} − ٢ب + ١ ⇐ صفر = ب^{٢} − ب − ١٢

⇐ صفر = (ب + ٣)(ب − ٤)

إما ب + ٣ = ٠ ⇐ ب = −٣ مرفوض

أو ب − ٤ = ٠ ⇐ ب = ٤

• 2020 دور ثاني / إذا كان الاقترانان ق(س)، هـ(س) اقترانين معرفين في [٢، ١٠] وكان الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) + س بحيث م(ع$_{٤}$، ق) = ٦ أوجد م(ع$_{٤}$، هـ) معتبراً س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر}$ علماً بأن ع$_{٤}$ تجزئة منتظمة في [٢، ١٠]

الحل/ * ل = $\frac{ب-أ}{ن}$ = $\frac{١٠-٢}{٤}$ = $\frac{٨}{٤}$ = ٢   * س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر}$

* م(ع$_{٤}$، ق) = ل $\sum_{ر=١}^{٤}$ ق(س$_{ر}^{*}$) ⇐ ٦ = ٢ $\sum_{ر=١}^{٤}$ ق(س$_{ر}$) ⇐ ٣ = $\sum_{ر=١}^{٤}$ ق(س$_{ر}$)

* م(ع$_{٤}$، هـ) = ل $\sum_{ر=١}^{٤}$ هـ(س$_{ر}^{*}$) = ٢ $\sum_{ر=١}^{٤}$ هـ(س$_{ر}$) = ٢ $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٣ق(س$_{ر}$) + س$_{ر}$)

= ٢(٣ $\sum_{ر=١}^{٤}$ ق(س$_{ر}$) + $\sum_{ر=١}^{٤}$ س$_{ر}$)

= ٢(٣×٣ + س$_{١}$ + س$_{٢}$ + س$_{٣}$ + س$_{٤}$)

= ٢(٩ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠)

= ٢ × ٣٧ = ٧٤

* ل = ٢

ع$_{٤}$ = {٢، ٤، ٦، ٨، ١٠}

س$_{٠}$ س$_{١}$ س$_{٢}$ س$_{٣}$ س$_{٤}$

• 2020 دور ثالث / إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٢س، وكانت ع$_{٤}$ تجزئة رباعية منتظمة للفترة [−٣، ٥] احسب م(ع$_{٤}$، ق) حيث س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر-١}$

الحل/

* ل = $\frac{ب-أ}{ن}$ = $\frac{٥--٣}{٤}$ = $\frac{٨}{٤}$ = ٢   * ع$_{٤}$ = {−٣، −١، ١، ٣، ٥}

س$_{٠}$ س$_{١}$ س$_{٢}$ س$_{٣}$ س$_{٤}$

* م(ع$_{٤}$، ق) = ل $\sum_{ر=١}^{٤}$ ق(س$_{ر}^{*}$) = ٢ $\sum_{ر=١}^{٤}$ ق(س$_{ر-١}$) = ٢(ق(س$_{٠}$) + ق(س$_{١}$) + ق(س$_{٢}$) + ق(س$_{٣}$))

= ٢(ق(−٣) + ق(−١) + ق(١) + ق(٣))

= ٢(١٥ + ٣ + −١ + ٣) = ٢ × ٢٠

= ٤٠

ق(−٣) = (−٣)^{٢} − ٢×−٣ = ١٥

ق(−١) = ١ − ٢×−١ = ٣

ق(١) = ١ − ٢ = −١

ق(٣) = ٩ − ٦ = ٣

• 2021 دور أول / إذا كانت $ح_ن$ تجزئة منتظمة للفترة [أ ، ٨] وكان العنصر الخامس عشر يساوي $(\frac{٣}{٢})$ وكان $س_٨ - س_٥ = \frac{٣}{٤}$ ، ما قيمة كل من أ ، ن

الحل / العنصر الخامس عشر $= س_{١٤} = \frac{٣}{٢}$ ، $س_ر = أ + ل ر$

$س_{١٤} = أ + ١٤ ل \Leftarrow \frac{٣}{٢} = ١٤ ل + أ$ —— (١)

مُعطى / $س_٨ - س_٥ = \frac{٣}{٤} \Leftarrow (أ + ٨ ل) - (أ + ٥ ل) = \frac{٣}{٤} \Leftarrow \cancel{أ} + ٨ ل - \cancel{أ} - ٥ ل = \frac{٣}{٤}$

$\Leftarrow ٣ ل = \frac{٣}{٤} \Leftarrow ل = \frac{١}{٤}$ نعوضها في (١)

$\Leftarrow \frac{٣}{٢} = ١٤ \times \frac{١}{٤} + أ \Leftarrow \frac{٣}{٢} = \frac{٧}{٢} + أ \Leftarrow \frac{٣}{٢} - \frac{٧}{٢} = أ \Leftarrow -٢ = أ$

* $ل = \frac{ب - أ}{ن} \Leftarrow \frac{١}{٤} = \frac{٨ - -٢}{ن} \Leftarrow ن = ٤ \times ١٠ \Leftarrow ن = ٤٠$

• 2021 دور ثاني / إذا كانت $ح_{١٢}$ تجزئة منتظمة للفترة [أ ، ٨] وكان العنصر التاسع منها يساوي مثلي العنصر الثالث ، ما قيمة الثابت أ

الحل /

العنصر التاسع = ٢ × العنصر الثالث $\Leftarrow س_٨ = ٢ س_٢$ —— (١)

* $س_ر = أ + ل ر \Leftarrow س_٨ = أ + ٨ ل$ ، $س_٢ = أ + ٢ ل$

بالتعويض في (١) / $أ + ٨ ل = ٢ (أ + ٢ ل) \Leftarrow أ + ٨ ل = ٢ أ + ٤ ل \Leftarrow ٤ ل = أ$

* $ل = \frac{ب - أ}{ن} \Leftarrow ل = \frac{٨ - أ}{١٢} \Leftarrow ١٢ ل = ٨ - أ \Leftarrow ٣ \times ٤ ل = ٨ - أ$

$٣ أ = ٨ - أ \Leftarrow ٤ أ = ٨$

$\Leftarrow أ = ٢$

• 2021 دور ثاني / إذا كان الاقتران ق(س) اقترانًا معرفًا ومحددًا في [٠ ، ١٠] وكانت $ح_{٢٠}$ تجزئة منتظمة للفترة [٠ ، ١٠] بحيث $م(ح_{٢٠} ، ق) = ٢٧$ عندما $س_ر^* = س_ر$ وكانت $م(ح_{٢٠} ، ق) = ١٦$ عندما $س_ر^* = س_{ر-١}$ ، ما قيمة المقدار ق(١٠) − ق(٠)

الحل / $ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{١٠ - ٠}{٢٠} = \frac{١}{٢}$

* عندما $س_ر^* = س_ر$: $م(ح_{٢٠} ، ق) = ٢٧ \Leftarrow ل \sum_{ر=١}^{٢٠} ق(س_ر) = ٢٧$

⇐ (½ (ق(س٠) + ق(س١) + ق(س٢) + ق(س٣) + ------ + ق(س١٩) + ق(س٢٠)) = ٢٧) × ٢

⇐ ق(س٠) + ق(س١) + ق(س٢) + ق(س٣) + ----- + ق(س١٩) + ق(س٢٠) = ٥٤ ← معادلة (١)

* عندما س*ر = سر-١ ؛ م(د٢٠، ن) = ١٦ ⇐ (½ ∑ر=١..٢٠ ق(سر-١) = ١٦) × ٢

⇐ ∑ر=١..٢٠ ق(سر-١) = ٣٢

⇐ ق(س٠) + ق(س١) + ق(س٢) + ------- + ق(س١٩) = ٣٢ ← معادلة (٢)

معادلة (١) _ معادلة (٢) / ق(س٢٠) - ق(س صفر) = ٢٢

⇐ ق(١٠) - ق(٠) = ٢٢

• 2022 دور أول / إذا كان الاقتران ق(س) = ٣س + ب معرفاً في [-١، ٧] وكانت د٤ تجزئة رباعية منتظمة للفترة [-١، ٧] بحيث أن م(د٤، ن) = ١٦ عندما س*ر = سر-١ ، ما قيمة الثابت ب

الحل / * ل = (ب - أ)/ن = (٧ - ١-)/٤ = ٨/٤ = ٢ * س*ر = سر-١ "بداية الفترة"

* د٤ = [-١ ، ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧] (س٠ ، س١ ، س٢ ، س٣ ، س٤)

م(د ن، ن) = ل ∑ر=١..ن ق(س*ر) ⇐ م(د٤، ن) = ٢ ∑ر=١..٤ ق(سر-١)

⇐ ١٦/٢ = ٢/٢ (ق(س٠) + ق(س١) + ق(س٢) + ق(س٣)) ⇐ ٨ = ق(-١) + ق(١) + ق(٣) + ق(٥)

⇐ ٨ = (ب + ٢-) + (ب + ٢) + (ب + ٦) + (ب + ١٠) ⇐ ٨ = ١٦ + ٤ب ⇐ -٨ = ٤ب

⇐ -٢ = ب

• 2022 دور ثاني / لتكن د١٢ تجزئة منتظمة للفترة [ب ، ٢ب + ١] وكان العنصر الخامس فيها يساوي ١١ ، ما قيمة الثابت ب

الحل / سر = أ + ل ر ⇐ العنصر الخامس = س٤ = ١١ ⇐ س٤ = ب + ((٢ب + ١ - ب)/~~١٢~~ ٣) × ~~٤~~ ١

⇐ (١١ = ب + (ب + ١)/٣) × ٣ ⇐ ٣٣ = ٣ب + ب + ١ ⇐ ٣٢ = ٤ب
(-١) (-١)

⇐ ب = ٨

• 2022 دور ثاني / إذا كان الاقتران $ق(س) = ٢ + هـ^{س}$ معرفاً في $[-١ ، ٢]$ وكانت $ح_٣$ تجزئة منتظمة للفترة نفسها جد $م(ح_٣ ، ق)$ معتبراً $س^*_ر = س_ر$

الحل

* $ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٢ - -١}{٣} = \frac{٣}{٣} = ١$

* $ح_٣ = \{ \underset{س_٠}{-١} ، \underset{س_١}{٠} ، \underset{س_٢}{١} ، \underset{س_٣}{٢} \}$

* $م(ح_٣ ، ق) = ل \sum_{ر=١}^{٣} ق(س^*_ر) = ١ \sum_{ر=١}^{٣} ق(س_ر) = \left(ق(س_١) + ق(س_٢) + ق(س_٣) \right)$

$= ق(٠) + ق(١) + ق(٢)$

$= (٢ + هـ^{٠}) + (٢ + هـ) + (٢ + هـ^{٢})$

$= ٢ + ١ + ٢ + هـ + ٢ + هـ^{٢} = ٧ + هـ + هـ^{٢}$

• 2021 دور ثالث / إذا كانت $ح_ن$ تجزئة منتظمة للفترة $[أ ، ٨]$ بحيث $س_ر - س_{ر-١} = \frac{١}{٤}$ لجميع قيم ر الممكنة، ما عدد عناصر التجزئة $ح_ن$ علماً بأن العنصر الخامس (٣)

الحل

$س_ر - س_{ر-١} = \frac{١}{٤} \Leftarrow ل = \frac{١}{٤}$ ، $س_ر = أ + ل ر$

العنصر الخامس $= س_٤ = ٣ \Leftarrow أ + \frac{١}{\cancel{٤}} \times \cancel{٤} = ٣ \Leftarrow ٣ = أ + ١ \Leftarrow أ = ٢$

* $ل = \frac{ب - أ}{ن} \Leftarrow \frac{١}{٤} = \frac{٨ - ٢}{ن} \Leftarrow ن = ٤ \times ٦ = ٢٤$

$\Leftarrow$ عدد عناصر التجزئة $= ن + ١ = ٢٤ + ١ = ٢٥$

• 2023 دور ثالث / إذا كان عدد عناصر التجزئة المنتظمة $ح_ن$ للفترة $[أ ، ب]$ هو (١٣) وكانت الفترة الجزئية السادسة هي $[\frac{١٧}{٢} ، \frac{٢٠}{٢}]$ ، جد قيمة كل من أ ، ب

الحل

عدد عناصر التجزئة $= ن + ١ \Leftarrow ١٣ = ن + ١ \Leftarrow ن = ١٢$

$ل = \frac{٢٠}{٢} - \frac{١٧}{٢} = \frac{٣}{٢}$ ، الفترة الجزئية السادسة $= [س_٥ ، س_٦] = [\frac{١٧}{٢} ، \frac{٢٠}{٢}]$

$س_٥ = \frac{١٧}{٢} \Leftarrow أ + \frac{٣}{٢} \times ٥ = \frac{١٧}{٢} \Leftarrow أ + \frac{١٥}{٢} = \frac{١٧}{٢} \Leftarrow أ = \frac{١٧}{٢} - \frac{١٥}{٢} = \frac{٢}{٢}$

$\Leftarrow أ = ١$

* $ل = \frac{ب - أ}{ن} \Leftarrow \frac{٣}{٢} = \frac{ب - ١}{١٢} \Leftarrow ٣ \times ٦ = ب - ١ \Leftarrow ١٨ + ١ = ب \Leftarrow ب = ١٩$

• 2024 دور ثاني / إذا كانت $\text{ح}_{٢١}$ تجزئة منتظمة للفترة [أ، ب] وكان العنصر الخامس عشر فيها يساوي (٣٢) وكانت $\text{ح}_{١٤}$ تجزئة منتظمة لنفس الفترة وكان العنصر الثامن فيها يساوي ٢٥ ما قيمة كل من أ، ب

الحل / * $\text{ح}_{٢١}$ للفترة [أ، ب] العنصر الخامس عشر $= \text{س}_{١٤} = ٣٢$

$$\text{س}_\text{ر} = \text{أ} + \text{ل ر} \Leftarrow \text{س}_{١٤} = \text{أ} + \frac{(\text{ب}-\text{أ})}{٢١} \times ١٤ \Leftarrow \left[٣٢ = \text{أ} + \frac{٢(\text{ب}-\text{أ})}{٣}\right] \times ٣$$

$$\Leftarrow ٩٦ = ٣\text{أ} + ٢\text{ب} - ٢\text{أ} \Leftarrow ٩٦ = \text{أ} + ٢\text{ب} \leftarrow \text{معادلة } (١)$$

* $\text{ح}_{١٤}$ للفترة [أ، ب] العنصر الثامن $= \text{س}_{٧} = ٢٥$

$$\Leftarrow \text{س}_{٧} = \text{أ} + \frac{(\text{ب}-\text{أ})}{١٤} \times ٧ \Leftarrow \left[٢٥ = \text{أ} + \frac{(\text{ب}-\text{أ})}{٢}\right] \times ٢$$

$$\Leftarrow ٥٠ = ٢\text{أ} + \text{ب} - \text{أ} \Leftarrow ٥٠ = \text{أ} + \text{ب} \leftarrow \text{معادلة } (٢)$$

نطرح المعادلتين (١) − (٢) / $٤٦ = \text{ب}$ نعوضها في (٢) $\Leftarrow ٥٠ = \text{أ} + ٤٦$

$\Leftarrow \text{أ} = ٤$

• 2024 دور ثالث / إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^٢ - ٤\text{س}$ وكانت $\text{ح}_٤$ تجزئة رباعية منتظمة للفترة [−٢، ٦] احسب $\text{م}(\text{ح}_٤، \text{ق})$ حيث $\text{س}^*_\text{ر} = \text{س}_{\text{ر}-١}$

الحل /

$$\text{ل} = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٦-(-٢)}{٤} = \frac{٨}{٤} = ٢ \qquad \text{ح}_٤ = \{\underset{\text{س}_٠}{-٢}، \underset{\text{س}_١}{٠}، \underset{\text{س}_٢}{٢}، \underset{\text{س}_٣}{٤}، \underset{\text{س}_٤}{٦}\}$$

$$* \ \text{م}(\text{ح}_\text{ن}، \text{ق}) = \text{ل} \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{ق}(\text{س}^*_\text{ر}) \Leftarrow \text{م}(\text{ح}_٤، \text{ق}) = ٢ \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}-١})$$

$$\Leftarrow \text{م}(\text{ح}_٤، \text{ق}) = ٢\left(\text{ق}(\text{س}_٠) + \text{ق}(\text{س}_١) + \text{ق}(\text{س}_٢) + \text{ق}(\text{س}_٣)\right)$$

$$= ٢\left(\text{ق}(-٢) + \text{ق}(٠) + \text{ق}(٢) + \text{ق}(٤)\right)$$

$$= ٢(١٢ + ٠ + -٤ + ٠)$$

$$= ٢ \times ٨ = ١٦$$

$\text{ق(س)} = \text{س}^٢ - ٤\text{س}$

$\text{ق}(-٢) = ٤ - ٤ \times -٢ = ١٢$

$\text{ق}(٠) = ٠ - ٠ = ٠$

$\text{ق}(٢) = ٤ - ٨ = -٤$

$\text{ق}(٤) = ١٦ - ١٦ = ٠$

• 2025 دور أول / إذا كان الاقتران $\text{ق(س)} = \text{لو}_\text{هـ}(\text{س})$ ، $\text{ح}_٤ = \{١، \text{هـ}، \text{هـ}^٢، \text{هـ}^٣، \text{هـ}^٤\}$ تجزئة للفترة $[١، \text{هـ}^٤]$ احسب $\text{م}(\text{ح}_٤، \text{ق})$ حيث $\text{س}^*_\text{ر} = \text{س}_{\text{ر}-١}$.

$[\text{س}_{ر-1}،\ \text{س}_ر]$	ل	$\text{س}^*_ر$	$\text{ق}(\text{س}^*_ر)$	$\text{ل ق}(\text{س}^*_ر)$
$[١،\ هـ]$	$هـ - ١$	١	٠	٠
$[هـ،\ هـ^٢]$	$هـ^٢ - هـ$	هـ	٢	$٢هـ^٢ - ٢هـ$
$[هـ^٢،\ هـ^٣]$	$هـ^٣ - هـ^٢$	$هـ^٢$	٤	$٤هـ^٣ - ٤هـ^٢$
$[هـ^٣،\ هـ^٤]$	$هـ^٤ - هـ^٣$	$هـ^٣$	٦	$٦هـ^٤ - ٦هـ^٣$

$\text{م}(\text{ع}_٤،\ \text{ق}) = \sum_{ر=١}^{٤} \text{ق}(\text{س}^*_ر)\,\text{ل} = ٠ + ٢هـ^٢ - ٢هـ + ٤هـ^٣ - ٤هـ^٢ + ٦هـ^٤ - ٦هـ^٣$

$= ٦هـ^٤ - ٢هـ^٣ - ٢هـ^٢ - ٢هـ$

• ٢٠٢٥ دور ثاني/ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أس}}{\text{س}+٢}$ ، اقترانًا معرفًا على الفترة $[-١،\ ٨]$ وكانت $\text{ع}_٥ = \{-١،\ ٠،\ ٢،\ ٣،\ ٦،\ ٨\}$ تجزئة للفترة $[-١،\ ٨]$ احسب قيمة الثابت أ علمًا بأن $\text{م}(\text{ع}_٥،\ \text{ق}) = ٥{,}٦$ معتبرًا $\text{س}^*_ر = \text{س}_{ر-1}$

الحل/

$[\text{س}_{ر-1}،\ \text{س}_ر]$	ل	$\text{س}^*_ر$	$\text{ق}(\text{س}^*_ر)$	$\text{ل ق}(\text{س}^*_ر)$
$[-١،\ ٠]$	١	-١	$-\text{أ}$	$-\text{أ}$
$[٠،\ ٢]$	٢	٠	٠	٠
$[٢،\ ٣]$	١	٢	$\frac{\text{أ}}{٢}$	$\frac{\text{أ}}{٢}$
$[٣،\ ٦]$	٣	٣	$\frac{٣\text{أ}}{٥}$	$\frac{٩\text{أ}}{٥}$
$[٦،\ ٨]$	٢	٦	$\frac{٣\text{أ}}{٤}$	$\frac{٣\text{أ}}{٢}$

$\text{م}(\text{ع}_٥،\ \text{ق}) = \sum_{ر=١}^{٥} \text{ق}(\text{س}^*_ر)(\text{س}_ر - \text{س}_{ر-1}) \Leftarrow ٥{,}٦ = -\text{أ} + \frac{\text{أ}}{٢} + \frac{٩\text{أ}}{٥} + \frac{٣\text{أ}}{٢}$

$\Leftarrow ٥{,}٦ = -\text{أ} + ٢\text{أ} + \frac{٩\text{أ}}{٥} \Leftarrow \left(٥{,}٦ = \text{أ} + \frac{٩\text{أ}}{٥}\right) \times ٥ \Leftarrow ٢٨ = ٥\text{أ} + ٩\text{أ}$

$\Leftarrow ٢٨ = ١٤\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = ٢$

" نوعٌ من لَذّاتِ الفتى انشغالُهُ "

• خارجي/ إذا كان الاقتران $ق(س) = \begin{cases} |٢س-٣| & ، -١ \le س \le ٤ \\ [\frac{س}{٢} + ١] & ، ٤ \le س \le ٧ \end{cases}$ معرفاً على الفترة [-١، ٧] وكانت $ع_٤$ تجزئة رباعية منتظمة للفترة [-١، ٧]، أجد $م(ع_٤، ق)$ معتبراً $س^*_ر = س_{ر-١}$

الحل/

$$* \; ل = \frac{ب-أ}{ن} = \frac{٧-(-١)}{٤} = \frac{٨}{٤} = ٢$$

$$* \; ع_٤ = \{-١، ١، ٣، ٥، ٧\}$$

$$* \; م(ع_٤، ق) = ل \sum_{ر=١}^{٤} ق(س^*_ر) = ٢ \sum_{ر=١}^{٤} ق(س_{ر-١}) = ٢(ق(س_٠)+ق(س_١)+ق(س_٢)+ق(س_٣))$$

$$\Leftarrow م(ع_٤، ق) = ٢(ق(-١)+ق(١)+ق(٣)+ق(٥))$$
$$= ٢(٥+١+٣+٣)$$
$$= ٢(١٢)$$
$$= ٢٤$$

$$ق(-١) = |-٢-٣| = ٥$$
$$ق(١) = |٢-٣| = ١$$
$$ق(٣) = |٢\times٣-٣| = ٣$$
$$ق(٥) = [\frac{٥}{٢}+١] = ٣$$

" أسئلة للمتميزين - الدرس الأول "

١/ اذا كان $ق(س) = ٤س$ ، $س \in [أ، ٥]$ ، $س^*_ر = س_ر$ ، وكانت $ع_٣$ تجزئة منتظمة في [أ، ٥] حيث $م(ع_٣، ق) = ٧٢$ ما قيمة الثابت أ

الحل/

$$* \; ل = \frac{ب-أ}{ن} = \frac{٥-أ}{٣} \qquad * \; س^*_ر = س_ر = أ + ل ر = أ + \frac{(٥-أ)}{٣} ر$$

$$* \; ق(س^*_ر) = ق(أ + \frac{(٥-أ)}{٣} ر) = ٤(أ + \frac{(٥-أ)}{٣} ر) = ٤أ + \frac{٤}{٣}(٥-أ) ر$$

$$* \; م(ع_٣، ق) = ل \sum_{ر=١}^{٣} ق(س^*_ر) \Leftarrow ٧٢ = \frac{(٥-أ)}{٣} \sum_{ر=١}^{٣} (٤أ + \frac{٤}{٣}(٥-أ) ر)$$

$$\Leftarrow ٧٢ = \frac{(٥-أ)}{٣}\left(\sum_{ر=١}^{٣} ٤أ + \sum_{ر=١}^{٣} \frac{٤}{٣}(٥-أ) ر\right) \Leftarrow ٧٢ = \frac{(٥-أ)}{٣}\left(٤أ\times٣ + \frac{٤}{\cancel{٣}}(٥-أ)\times\frac{\cancel{٣}\times٤}{٢}\right)$$

$$\Leftarrow ٧٢ = \frac{(٥-أ)}{٣}(١٢أ + ٨(٥-أ)) \Leftarrow ٧٢ = \frac{(٥-أ)}{٣}(١٢أ + ٤٠ - ٨أ)$$

$$\Leftarrow ٧٢ = \frac{(٥-أ)}{٣}(٤أ + ٤٠) \Leftarrow ٧٢ = \frac{(٥-أ)}{٣}\times٤(أ+١٠) \Leftarrow \frac{٧٢\times٣}{٤} = (٥-أ)(أ+١٠)$$

$$\Leftarrow ٥٤ = ٥أ + ٥٠ - أ^٢ - ١٠أ \Leftarrow أ^٢ + ٥أ + ٤ = ٠ \Leftarrow (أ+٤)(أ+١) = ٠$$

إما $أ+٤ = ٠$ ، $أ = -٤$ أو $أ+١ = ٠$ ، $أ = -١$

$$\Leftarrow أ = \{-٤، -١\}$$

٢/ إذا كانت النسبة بين قيمتي العنصر الخامس إلى العنصر السادس في التجزئة المنتظمة $ح_ن$ على الفترة [-١، ٧] تساوي ٣ : ٥ ما قيمة ن

الحل/ العنصر الخامس = $س_٤$ ، العنصر السادس = $س_٥$ ، $س_ر = أ + ل ر$

$\frac{س_٤}{س_٥} = \frac{٣}{٥} \Leftarrow \frac{-١ + ٤ل}{-١ + ٥ل} = \frac{٣}{٥} \Leftarrow -٥ + ٢٠ل = -٣ + ١٥ل$

$\Leftarrow -٥ + ٣ = ٢ل + ١٥ل$

$\Leftarrow -٢ = -٥ل \Leftarrow ل = \frac{٢}{٥}$

$ل = \frac{ب - أ}{ن} \Leftarrow \frac{٢}{٥} = \frac{٧ - -١}{ن} \Leftarrow ٢ن = ٥ \times ٨ \Leftarrow ن = \frac{٥ \times ٨}{٢} = ٢٠$

$\Leftarrow ن = ٢٠$

٣/ لتكن $ح_م = \{٢، ٢ + \frac{٣}{ن}، ٢ + \frac{٦}{ن}، ....، ١٤\}$ تجزئة منتظمة للفترة [٢، ١٤]
جد عدد عناصر $ح_م$ ثم أكتب الفترة الجزئية الثانية عشر حيث ن = ١٨

الحل
أ/ $ح_م = \{٢، ٢ + \frac{٣}{ن}، ٢ + \frac{٦}{ن}، ....، ١٤\}$ ، $ل = \frac{ب - أ}{م}$

$ل = \frac{١٤ - ٢}{م} = \frac{١٢}{م} \Leftarrow ل = \frac{١٢}{م} = \cancel{٢} + \frac{٣}{ن} - \cancel{٢} \Leftarrow \frac{\cancel{١٢}^{٤}}{م} = \frac{\cancel{٣}^{١}}{ن} \Leftarrow م = ٤ن$

عدد عناصر التجزئة = م + ١ = ٤ن + ١

ب/ ن = ١٨ $\Leftarrow$ م = ٤ × ١٨ = ٧٢
$ل = \frac{١٤ - ٢}{٧٢} = \frac{١٢}{٧٢} = \frac{١}{٦}$

الفترة الجزئية الثانية عشر = [$س_{١١}$، $س_{١٢}$]
$س_{١١} = أ + ل ر = ٢ + \frac{١}{٦} \times ١١ = ٢ + \frac{١١}{٦} = \frac{١٢ + ١١}{٦} = \frac{٢٣}{٦}$
$س_{١٢} = س_{١١} + ل = \frac{٢٣}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٢٤}{٦} = ٤$

$\Leftarrow$ [$س_{١١}$، $س_{١٢}$] = [$\frac{٢٣}{٦}$، ٤]

مرحبًا يا فتى ...
في المرة التي أطلت فيها سجودًا ؛ وجدت نفسك !
أعِد الكرّة .

الدرس الثاني| التكامل المحدود

• القسم الأول| اختر الإجابة الصحيحة

• 2008/ ق(س) اقتران معرف على [٠، ٢] ، $\sigma_ن$ تجزئة منتظمة لها بحيث أن $م(\sigma_ن، ق) = \frac{٥+٤ن}{٢ن}$

ما قيمة $\int_{٢}^{٠} ق(س)\,دس$

أ/ ٧ ب/ ٢ جـ/ -٢ د/ -٧

الحل/

$\int_{٠}^{٢} ق(س)\,دس = \lim\limits_{ن\to\infty} م(\sigma_ن، ق) = \lim\limits_{ن\to\infty}\left(\frac{٥+٤ن}{٢ن}\right) = \frac{٤}{٢} = ٢$

⟸ المطلوب/ $\int_{٢}^{٠} ق(س)\,دس = -\int_{٠}^{٢} ق(س)\,دس = -٢$ جـ

• 2010/ إذا كان الاقتران ق(س) اقتراناً متصلاً على [١، ٢] وكانت $\sigma_ن$ تجزئة منتظمة لنفس الفترة بحيث $م(\sigma_ن، ق) = \frac{٧ن - ٣ن^٢}{٢ن^٢}$ ما قيمة $\int_{٢}^{١} ق(س)\,دس$

أ/ $\frac{٢}{٣}$ ب/ $\frac{-٢}{٣}$ جـ/ $\frac{٣}{٢}$ د/ $\frac{-٣}{٢}$

الحل/

$\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس = \lim\limits_{ن\to\infty} م(\sigma_ن، ق) = \lim\limits_{ن\to\infty}\left(\frac{٧ن-٣ن^٢}{٢ن^٢}\right) = \frac{-٣}{٢}$

* المطلوب/ $\int_{٢}^{١} ق(س)\,دس = -\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس = \frac{٣}{٢}$ جـ

• 2010 إكمال/ إذا كان $م(س) = \frac{٥س}{س^٢+٣}$ اقتران أصلي لـ ق(س) ما قيمة $\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس =$

أ/ $\frac{٥}{٢٨}$ ب/ $\frac{-٥}{٢٨}$ جـ/ $\frac{١٠}{٧}$ د/ $\frac{١٠}{٤}$

الحل/

م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) ⟸ $\int ق(س)\,دس = م(س) + جـ$

* $\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس = م(س)\Big|_{١}^{٢} = م(٢) - م(١) = \left(\frac{٥\times٢}{٢^٢+٣}\right) - \left(\frac{٥\times١}{١+٣}\right) = \frac{١٠}{٧} - \frac{٥}{٤}$

$= \frac{٤٠-٣٥}{٢٨} = \frac{٥}{٢٨}$ أ

• 2012/ إذا كان الاقتران م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) على الفترة [٢، ٣] وكان م(٢) = ٤، م(٣) = ١٠ ما قيمة $\int_{٢}^{٣}$ ق(س) دس

أ/ ١٠ ب/ ٦ ج/ ٤ د/ ١

الحل/

$\int_{٢}^{٣}$ ق(س) دس = م(س) $\Big|_{٢}^{٣}$ = م(٣) − م(٢) = ١٠ − ٤ = ٦ ب

• 2013 إكمال/ إذا كان ق(س) اقتران متصلاً في [١، ٣] وكانت $ح_ن$ تجزئة منتظمة للفترة [١، ٣] حيث م($ح_ن$، ن) = ٢ − $\frac{٥ - ٣ن}{٢ن}$ ما قيمة $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس =

أ/ $-\frac{٧}{٢}$ ب/ $\frac{١}{٢}$ ج/ $\frac{٧}{٢}$ د/ $\frac{٩}{٢}$

الحل/

$\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = $\lim\limits_{ن \to \infty}$ م($ح_ن$، ن) = $\lim\limits_{ن \to \infty}$ $\left(٢ - \frac{٥ - ٣ن}{٢ن}\right)$ = $\lim\limits_{ن \to \infty}$ (٢) − $\lim\limits_{ن \to \infty}$ $\left(\frac{٥ - ٣ن}{٢ن}\right)$

= ٢ − $\frac{-٣}{٢}$ = $\frac{٤ + ٣}{٢}$ = $\frac{٧}{٢}$ ج

• 2014 إكمال/ إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً ومحدوداً على الفترة [٠، ٢] ، $ح_ن$ تجزئة منتظمة لـ[٠، ٢] حيث م($ح_ن$، ن) = $\frac{٢أن^٢ - ٣أن + أ}{٣ن^٢}$ ما قيمة أ التي تجعل $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس = $\frac{٨}{٣}$

أ/ ٨ ب/ ٤ ج/ ٣ د/ صفر

الحل/

$\int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس = $\lim\limits_{ن \to \infty}$ م($ح_ن$، ن) ⇐ $\frac{٨}{٣}$ = $\lim\limits_{ن \to \infty}$ $\left(\frac{٢أن^٢ - ٣أن + أ}{٣ن^٢}\right)$

⇐ $\frac{٨}{\cancel{٣}}$ = $\frac{٢أ}{\cancel{٣}}$ ⇐ ٢أ = ٨ ⇐ أ = ٤ ب

• 2014 إكمال ضفة/ إذا كان م(س) اقتران أصلي وكان م(٢) = ٥، م′(٢) = ٣، م(١) = ٧، م′(١) = ٢ ما قيمة $\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس =

أ/ ١ ب/ −١ ج/ ٢ د/ −٢

الحل/

$\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس = م(س) $\Big|_{١}^{٢}$ = م(٢) − م(١) = ٥ − ٧ = −٢ د

• 2015/ إذا كان ل(س)، م(س) اقترانين أصليين لـ ق(س) وكان $\int_{٢}^{٨}$ (ل(س) − م(س)) دس = ١٨

فإن $\int_{٣}^{٥}$ (ل(س) − م(س)) دس =

أ/ -٦ ب/ -٣ جـ/ ٣ د/ ٦

الحل/ نفرض ل(س) - م(س) = جـ

$\Leftarrow \int_{٢}^{٨} (ل(س) - م(س))\, دس = ١٨ \Leftarrow \int_{٢}^{٨} جـ\, دس = ١٨ \Leftarrow جـ(٨-٢) = ١٨ \Leftarrow جـ = \frac{١٨}{٦} = ٣$

$\Leftarrow ل(س) - م(س) = ٣$

المطلوب/ $\int_{٣}^{٥} ل(س) - م(س)\, دس = \int_{٣}^{٥} ٣\, دس = ٣(٥-٣) = ٣\times٢ = ٦$ د

2016/ إذا كان ق: $[-١، ٣] \to ح$ متصلاً وكان $ع_ن$ تجزئة منتظمة للفترة $[-١، ٣]$ وكان $م(ع_ن، ق) = ٤ - \frac{٥-٢ن}{ن}$ فإن $\int_{-١}^{٣} ق(س)\, دس =$

أ/ ٦ ب/ ٤ جـ/ ٢ د/ -٢

الحل/ $\int_{-١}^{٣} ق(س)\, دس = \lim_{ن\to\infty} م(ع_ن، ق) = \lim_{ن\to\infty}\left(٤ - \frac{٥-٢ن}{ن}\right) = ٤ - \frac{-٢}{١} = ٤+٢ = ٦$ أ

2016 إكمال/ $\int_{٢}^{٣} \left(\frac{١}{س^{٢}}\right) دس$

أ/ $-\frac{١}{٦}$ ب/ $\frac{١}{٢}$ جـ/ $\frac{٥}{٦}$ د/ $\frac{١}{٦}$

الحل/ $\int_{٢}^{٣} \frac{١}{س^{٢}}\, دس = \int_{٢}^{٣} س^{-٢}\, دس = \left.\frac{س^{-١}}{-١}\right|_{٢}^{٣} = \left.\frac{-١}{س}\right|_{٢}^{٣} = -\left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢}\right) = -\left(\frac{٢-٣}{٣\times٢}\right)$

$= -\left(\frac{-١}{٦}\right) = \frac{١}{٦}$ د

2016 إكمال/ $\int_{١}^{٢} ٢\sqrt[٣]{س} \times س^{\frac{٢}{٣}}\, دس$

أ/ -٣ ب/ ١ جـ/ ٢ د/ ٣

الحل/ $\int_{١}^{٢} ٢س^{\frac{١}{٣}} \times س^{\frac{٢}{٣}} = \int_{١}^{٢} ٢س^{\frac{١}{٣}+\frac{٢}{٣}}\, دس = \int_{١}^{٢} ٢س\, دس = \left. س^{٢}\right|_{١}^{٢} = ٢^{٢} - ١$

$= ٤ - ١ = ٣$ د

شكرًا لصمودك حتى هذه اللحظة ..

• 2017 دور أول / إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً ومحدداً على الفترة [٠، ٢] ، ح ن تجزئة منتظمة في [٠، ٢] صيغة م(ح ن، ق) = $\frac{٨ن^٢ + ١٢ن + ٤}{٣ن^٢}$ ، فإن قيمة $\int_{٠}^{٢} (٣ق(س) + ٢س) \, دس$ =

أ/ ٨ ب/ ٤ جـ/ ١٢ د/ ١٦

الحل/

* $\int_{٠}^{٢} ق(س) \, دس = \lim_{ن \to \infty} م(ح ن، ق) = \lim_{ن \to \infty} \left(\frac{٨ن^٢ + ١٢ن + ٤}{٣ن^٢} \right) = \frac{٨}{٣}$

المطلوب/ $\int_{٠}^{٢} (٣ق(س) + ٢س) \, دس = ٣\int_{٠}^{٢} ق(س) \, دس + \int_{٠}^{٢} ٢س \, دس = \cancel{٣} \times \frac{٨}{\cancel{٣}} + \left(س^٢ \Big|_{٠}^{٢} \right)$

$= ٨ + (٢^٢ - ٠^٢) = ٨ + ٤ = ١٢$ جـ

• 2017 دور أول / إذا كان الاقترانان هـ(س) ، م(س) اقترانان أصليين للاقتران ق(س) وكان $\int_{٢}^{٤} (م(س) - هـ(س)) \, دس = ١٠$ ما قيمة $\int_{١}^{٣} ٢س(م(س) - هـ(س)) \, دس$

أ/ ٣٥ ب/ ٣٨ جـ/ ٤٠ د/ ٤٥

الحل/ م(س) ، هـ(س) اقترانان أصليان لـ ق(س) ⇐ م(س) - هـ(س) = جـ

⇐ $\int_{٢}^{٤} (م(س) - هـ(س)) \, دس = \int_{٢}^{٤} جـ \, دس = ١٠$ ⇐ جـ(٤ - ٢) = ١٠ ⇐ جـ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

المطلوب/ $\int_{١}^{٣} ٢س(م(س) - هـ(س)) \, دس = \int_{١}^{٣} ٢س \times جـ \, دس = \int_{١}^{٣} ٢س \times ٥ \, دس = ٥س^٢ \Big|_{١}^{٣}$

$= ٥(٣^٢ - ١^٢) = ٥ \times ٨ = ٤٠$ جـ

• 2017 دور ثاني / $\int_{٠}^{١} \sqrt{س} \times س^٢ \, دس$

أ/ $\frac{٢}{٧}$ ب/ $\frac{٢}{٥}$ جـ/ $\frac{٥}{٢}$ د/ $\frac{٧}{٢}$

الحل/ $\int_{٠}^{١} س^٢ \times \sqrt{س} \, دس = \int_{٠}^{١} س^٢ \times س^{\frac{١}{٢}} \, دس = \int_{٠}^{١} س^{\frac{١}{٢}+٢} \, دس = \int_{٠}^{١} س^{\frac{٥}{٢}} \, دس$

$= \frac{س^{\frac{٥}{٢}+١}}{\frac{٥}{٢}+١} \Big|_{٠}^{١} = \frac{٢}{٧} س^{\frac{٧}{٢}} \Big|_{٠}^{١} = \frac{٢}{٧} \left((١)^{\frac{٧}{٢}} - ٠ \right) = \frac{٢}{٧}(١ - ٠) = \frac{٢}{٧}$ أ

• 2018 دور أول / إذا كان $لو_{هـ} ب = ٤$ ، $لو_{هـ}(ب) = -٢$ فإن $\int_{١}^{ب} \left(\frac{١}{س}\right) دس =$

أ/ -٦   ب/ -٢   جـ/ ٢   د/ ٦

الحل/ $\int_{1}^{ب أ} \frac{1}{س}\, ءس = لو_هـ |س| \Big|_{1}^{ب أ} = لو_هـ(ب أ) - لو_هـ(1) = لو_هـ ب + لو_هـ أ - 0 = -٢ + ٤ = ٢$ جـ

• 2018 دور أول / إذا كان الاقتران ق(س) = ٤س معرفاً على [١، أ] بحيث كان م(ع$_ن$، ء$_ن$) = ١٦ + $\frac{٨}{ن}$ ، ما قيمة الثابت أ

أ/ ٢   ب/ ٣   جـ/ ٤   د/ ٦

الحل/

$\int_{1}^{أ} ق(س)\, ءس = \lim_{ن \to \infty} م(ع_ن، ء_ن) = \lim_{ن \to \infty} (١٦ + \frac{٨}{ن}) = ١٦ + صفر = ١٦$

$\Leftarrow \int_{1}^{أ} ٤س\, ءس = ١٦ \Leftarrow ٢س^٢ \Big|_{1}^{أ} = ١٦ \Leftarrow \frac{٤}{٢}(أ^٢ - ١) = \frac{١٦}{٢} \Leftarrow أ^٢ - ١ = ٨$

$\Leftarrow أ^٢ = ٩$ ، أ = ٣ ✓ ، أ = -٣ ✗

$\Leftarrow$ أ = ٣ ب

• 2018 دور ثاني / إذا كان م$_١$(س) ، م$_٢$(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س) بحيث أن م$_١$(س) = أس^٢ - ٦س - ٣ ، م$_٢$(س) = ب س + ٦ ما قيمة كل من الثابتين أ ، ب

أ/ ٠، -٦   ب/ ١، -٦   جـ/ ١، ٦   د/ ٠، ٦

الحل/ م$_١'$(س) = م$_٢'$(س) = ق(س) $\Leftarrow$ ٢أس - ٦ = ب بالمقارنة

٢أ = صفر ، ب = -٦

أ = صفر

$\Leftarrow$ أ، ب = ٠، -٦ أ

• 2018 دور ثاني / إذا كان الاقتران م(س) = $\sqrt{س^٢+١}$ هو اقتران أصلي للاقتران ق(س) فإن قيمة $\int_{1}^{\sqrt{٧}} ق(س)\, ءس =$

أ/ $\sqrt{٢}$ ب/ ٧   جـ/ $٢\sqrt{٢}$ د/ $٣\sqrt{٢}$

الحل/

$\int_{1}^{\sqrt{٧}} ق(س)\, ءس = م(س) \Big|_{1}^{\sqrt{٧}} = م(\sqrt{٧}) - م(١) = \sqrt{٧+١} - \sqrt{١+١}$

$= \sqrt{٨} - \sqrt{٢}$ $\sqrt{٨} = \sqrt{٤ \times ٢} = ٢\sqrt{٢}$

$= ٢\sqrt{٢} - \sqrt{٢} = \sqrt{٢}$ أ

• 2018 دور ثاني / إذا كان $ق(س) = ٣س^٢$ ، س ∈ [١ ، ٢] وكانت ح$_ن$ تجزئة منتظمة للفترة [١ ، ٢] فإن $\lim_{ن \to \infty}$ م(ح$_ن$ ، ق) =

أ/ ٦ ب/ ٧ جـ/ ٨ د/ ٩

الحل/

$\lim_{ن \to \infty}$ م(ح$_ن$ ، ق) $= \int_{1}^{2} ق(س) \, دس = \int_{1}^{2} ٣س^٢ \, دس = س^٣ \Big|_{1}^{2} = ٢^٣ - ١^٣ = ٨ - ١ = ٧$ ب

• 2019 دور أول / إذا كان الاقتران $ق(س) = \frac{٢س+٣}{س^٢+١}$ ما قيمة $\int_{-1}^{1} قَ(س) \, دس =$

أ/ صفر ب/ ٢ جـ/ ٣ د/ ٤

الحل/

$\int_{-1}^{1} قَ(س) \, دس = ق(س) \Big|_{-1}^{1} = ق(١) - ق(-١)$

$= \frac{٢+٣}{١+١} - \frac{-٢+٣}{١+١} = \frac{٥}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ب

• 2019 دور أول / إذا كان الاقترانان هـ(س) ، م(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س) وكان $\int_{1}^{3} (م(س) - هـ(س)) \, دس = ١٠$ جد $\int_{1}^{3} ٢س (هـ(س) - م(س)) \, دس =$

أ/ -٥٠ ب/ -٤٠ جـ/ ٤٠ د/ ٥٠

الحل/ نفرض م(س) - هـ(س) = جـ

* $\int_{1}^{3} م(س) - هـ(س) \, دس = \int_{1}^{3} جـ \, دس = ١٠ \Leftarrow (٣-١)جـ = ١٠ \Leftarrow جـ = \frac{١٠}{٢} = ٥$

المطلوب/ $\int_{1}^{3} ٢س (\underbrace{هـ(س) - م(س)}_{-جـ}) \, دس = \int_{1}^{3} ٢س \times -٥ \, دس = -٥س^٢ \Big|_{1}^{3} = -٥(٣^٢ - ١^٢)$

$= -٥(٩-١) = -٤٠$ ب

• 2019 دور ثاني / إذا كان $ق(س) = \int_{1}^{5} \frac{١}{١+هـ^س} \, دس$ ما قيمة قَ(٢)

أ/ -١ ب/ صفر جـ/ $\frac{١}{هـ^٢}$ د/ ٢

الحل/

$ق(س) = \int_{1}^{5} \frac{١}{١+هـ^س} \, دس \Leftarrow قَ(س) = صفر$ " $(\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس)' = صفر$

قَ(٢) = صفر ب

• 2019 دور ثاني / إذا علمت أن $\int_{-1}^{4} 2\,ق(س)\,دس = 24+$ وكان $م(\sigma_ن ، ق) = \frac{(ن+1)(2أن+1)}{ن^2}$ ، حيث $\sigma_ن$ تجزئة نونية منتظمة للفترة $[-1 ، 4]$ ما قيمة الثابت أ

أ/ ٣ ب/ ٤ ج/ ٦ د/ ١٣

الحل/

* $\int_{-1}^{4} 2\,ق(س)\,دس = 24+ \Leftarrow \frac{2}{2}\int_{-1}^{4} ق(س)\,دس = \frac{24+}{2} \Leftarrow \int_{-1}^{4} ق(س)\,دس = 12+$

* $\lim_{ن \to \infty} م(\sigma_ن ، ق) = \lim_{ن \to \infty}\left(\frac{(ن+1)(2أن+1)}{ن^2}\right) = \int_{-1}^{4} ق(س)\,دس$

$\Leftarrow \lim_{ن \to \infty}\left(\frac{2أن^2 + ن + 2أن + 1}{ن^2}\right) = 12+ \Leftarrow \frac{2أ}{1} = 12+ \Leftarrow أ = 6$ ج

• 2019 دور ثالث/ إذا كان الاقتران $ق(س) = 2س$ معرفاً على $[1 ، 2]$ وكانت $\sigma_ن$ تجزئة منتظمة للفترة $[1 ، 2]$ ما قيمة $\lim_{ن \to \infty} م(\sigma_ن ، ق) =$

أ/ ٣ ب/ ٢ ج/ ١ د/ غير موجودة

الحل/

$\int_{1}^{2} ق(س)\,دس = \lim_{ن \to \infty} م(\sigma_ن ، ق) \Leftarrow \int_{1}^{2} 2س\,دس = س^2\Big|_{1}^{2} = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ أ

• 2020 دور أول/ إذا كانت $م(\sigma_ن ، ق) = 6 + \frac{ن^2 + 2ن}{ن^2}$ ، $\sigma_ن$ تجزئة منتظمة للفترة $[1 ، 4]$ ما قيمة $\int_{1}^{4} ق(س)\,دس$

أ/ ٦ ب/ ٧ ج/ ١٠ د/ ١٢

الحل/

$\int_{1}^{4} ق(س)\,دس = \lim_{ن \to \infty} م(\sigma_ن ، ق) = \lim_{ن \to \infty}\left(6 + \frac{ن^2 + 2ن}{ن^2}\right) = 6 + \frac{1}{1} = 7$ ب

• 2020 دور ثاني/ إذا كان $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس = -24$ وكانت $\sigma_ن$ تجزئة منتظمة للفترة $[1 ، 3]$ $م(\sigma_ن ، ق) = \frac{4ن - 2أن^2}{ن^2}$ للاقتران ق(س) على الفترة $[1 ، 3]$ ما قيمة الثابت أ

أ/ −١٢ ب/ ١٠ ج/ ١٢ د/ ١٤

الحل/

$\int_{1}^{3} ق(س)\,دس = \lim_{ن \to \infty} م(\sigma_ن ، ق) \Leftarrow -24 = \lim_{ن \to \infty}\left(\frac{4ن - 2أن^2}{ن^2}\right)$

$\Leftarrow -24 = \frac{-2أ}{1} \Leftarrow أ = 12$ ج

• 2021 دور أول / إذا كان الاقتران ق(س) = س لوهـ س ، ما قيمة $\int_{\frac12}^{\frac{هـ}{2}} ق''(س)\, دس$

أ/ 1 ب/ -2 ج/ 2 د/ 8

الحل/

$* ق(س) = س لو_هـ س$

$ق'(س) = \frac{س}{س} + لو_هـ س \times 1$

$\Leftarrow ق'(س) = 1 + لو_هـ س$

$\int_{\frac12}^{\frac{هـ}{2}} ق''(س)\, دس = ق'(س)\Big|_{\frac12}^{\frac{هـ}{2}} = ق'(\frac{هـ}{2}) - ق'(\frac12)$

$= 1 + لو_هـ \frac{هـ}{2} - (1 + لو_هـ \frac12) = \cancel{1} + لو_هـ(\frac{هـ}{2}) - \cancel{1} - لو_هـ(\frac12)$

$= لو_هـ(\frac{هـ}{2} \div \frac12) = لو_هـ(هـ) = 1$ أ

• 2021 دور أول / إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في [2، 3] وكانت كل تجزئة نونية منتظمة للفترة [2، 3] بحيث $م_ن(ق، ح) = \frac1ن (7ن + 2)$ ، ما قيمة $\int_2^3 \left(\frac{س ق(س) + 2ق(س)}{س+2} - 3\right) دس$

أ/ 4 ب/ 7 ج/ 9 د/ 10

الحل/

$\int_2^3 ق(س)\, دس = \lim_{ن \to \infty} م_ن(ق، ح) = \lim_{ن \to \infty} \frac1ن (7ن+2) = \lim_{ن \to \infty} (7 + \frac2ن) = 7 + 0 = 7$

$* \int_2^3 \left(\frac{س ق(س) + 2ق(س)}{س+2} - 3\right) دس = \int_2^3 \frac{ق(س)\cancel{(س+2)}}{\cancel{(س+2)}} دس - \int_2^3 3\, دس$

$= \int_2^3 ق(س)\, دس - 3(3-2) = 7 - 3 = 4$ أ

• 2021 دور أول / إذا كان $\int_0^{لو_هـ ب} (هـ^{2س})\, دس = \frac32$ ما قيمة الثابت ب

أ/ 2 ب/ -2، 2 ج/ 1 د/ هـ

الحل/

$\int_0^{لو_هـ ب} هـ^{2س}\, دس = \frac{هـ^{2س}}{2}\Big|_0^{لو_هـ ب} = \frac32 \Leftarrow \frac{1}{\cancel{2}}\left(هـ^{2 لو_هـ ب} - هـ^{2\times 0}\right) = \frac{3}{\cancel{2}}$

$\Leftarrow هـ^{لو_هـ ب^2} - 1 = 3 \Leftarrow ب^2 = 4$ ← ب = 2 ✓

ب = -2 ✗ مجال اللوغاريتم ب > 0.

$\Leftarrow$ ب = 2 أ

• 2021 دور ثاني / إذا كان الاقترانان م(س)، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س) وكان $\int \frac{س}{م(س) - هـ(س)} دس = 2$ ، ما قيمة م(1) - هـ(1) :

أ/ ٦-   ب/ ٢-   جـ/ ٢   د/ ٦

الحل/ نفرض م(س) − هـ(س) = جـ

$\Leftarrow \int_{1}^{5} \frac{س}{م(س) - هـ(س)}\, دس = \int_{1}^{5} \frac{س}{جـ}\, دس = ٢ \Leftarrow \frac{1}{جـ} \times \frac{س^2}{2} \Big|_{1}^{5} = ٢$

$\Leftarrow \frac{1}{2جـ}(5^2 - 1^2) = ٢ \Leftarrow \frac{1}{\cancel{2}جـ} \times \cancel{24}^{12} = ٢ \Leftarrow \frac{\cancel{12}^{6}}{جـ} = \cancel{2}^{1} \Leftarrow جـ = ٦$

$\Leftarrow$ م(س) − هـ(س) = ٦

م(١) − هـ(١) = ٦   د

• 2021 دورثاني/ إذا كان الاقتران ق(س) اقتراناً متصلاً على ح ويمر بالنقطة (-٢، -٥) وكان

$\int_{-2}^{3}$ ق(س) + س ق'(س) دس = ١٧، فما قيمة ق(٣) -

أ/ $\frac{1}{4}$ ب/ ١   جـ/ ٢   د/ ٩

الحل/ $\int_{-2}^{3}$ ق(س) + س ق'(س) دس = $\int_{-2}^{3}$ (س ق(س))' دس = ١٧ $\Leftarrow$ س ق(س) $\Big|_{-2}^{3}$ = ١٧

$\Leftarrow$ ٣ق(٣) − −٢ق(−٢) = ١٧ .   ق(−٢) = −٥ لأن ق يمر بـ (−٢، −٥)

$\Leftarrow$ ٣ق(٣) + ٢ × −٥ = ١٧ $\Leftarrow$ ٣ق(٣) = ١٧ + ١٠ $\Leftarrow$ ٣ق(٣) = ٢٧ $\Leftarrow$ ق(٣) = ٩   د

طريقة(٢)/ $\int_{-2}^{3}$ ق(س) + س ق'(س) دس = $\int_{-2}^{3}$ ق(س) دس + $\int_{-2}^{3}$ س ق'(س) دس = ١٧

أجزاء

ق(س) = ق   دس = دع

ق'(س) دس = دق   س = ع

$\Leftarrow$ ق(س) × س $\Big|_{-2}^{3}$ + $\cancel{-\int_{-2}^{3} س ق'(س) دس}$ + $\cancel{\int_{-2}^{3} ق'(س) \times س دس}$ = ١٧

$\Leftarrow$ س ق(س) $\Big|_{-2}^{3}$ = ١٧ $\Leftarrow$ ثم نكمل بنفس الطريقة ...

• 2022 دورأول/ إذا كان الاقتران م(س) اقتران أصلياً للاقتران المتصل ق(س)، م(١) = ٥

$\int_{1}^{3}$ ق(س) + ٢س دس = ٦ ما قيمة م(٣) =

أ/ ١١ ب/ ٣ ج/ ١ د/ -٣

الحل/

$\int_{1}^{3} (\text{ق}(س) + ٢س)\, دس = ٦ \Leftarrow \int_{1}^{3} \text{ق}(س)\, دس + \int_{1}^{3} ٢س\, دس = ٦$

$\Leftarrow \text{م}(س)\Big|_{1}^{3} + س^{٢}\Big|_{1}^{3} = ٦ \Leftarrow \text{م}(٣) - \text{م}(١) + (٣^{٢} - ١) = ٦ \Leftarrow \text{م}(٣) - ٥ + ٨ = ٦$

$\Leftarrow \text{م}(٣) + ٣ = ٦ \Leftarrow \text{م}(٣) = ٣$ ب

• 2022 دور أول/ إذا كان $\int_{3}^{-1} \text{ق}(س)\, دس = أ$ وكانت $\sigma_ن$ تجزئة منتظمة للفترة [-١، ٣] بحيث كان $\text{م}(\sigma_ن، \text{ق}) = أ + \frac{٤ - ٨ن^{٢}}{٢ن^{٢}}$ ، ما قيمة الثابت أ

أ/ -٢ ب/ -١ ج/ ٢ د/ ٤

الحل/

$\int_{-1}^{3} \text{ق}(س)\, دس = \lim_{ن \to \infty} \text{م}(\sigma_ن، \text{ق}) \Leftarrow -أ = \lim_{ن \to \infty} \left(أ + \frac{٤ - ٨ن^{٢}}{٢ن^{٢}}\right) \Leftarrow -أ = أ + \frac{-٨}{٢}$

$\Leftarrow ٢أ = ٤ \Leftarrow أ = ٢$ ج

• 2022 دور أول/ ما قيمة $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{ظاس}{ظتاس} + ١\right) دس$

أ/ $\sqrt{3} - ١$ ب/ $١ + \sqrt{3}$ ج/ صفر د/ $\frac{٢}{\sqrt{3}}$

الحل/

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(ظاس \times \frac{١}{ظتاس} + ١\right) دس = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ظاس \times ظاس + ١\, دس = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (ظا^{٢}س + ١)\, دس$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} قا^{٢}س\, دس = ظاس\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = ظا(\frac{\pi}{3}) - ظا(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} - ١$ أ

• 2021 دور ثالث/ إذا كانت $\sigma_ن$ تجزئة منتظمة للفترة [٢، ٦] وكانت $\lim_{ن \to \infty} \text{م}(\sigma_ن، \text{ق}) = ٦$ ، ما قيمة

$\int_{3}^{1} ٣\text{ق}(٢س)\, دس =$

أ/ -١٨ ب/ -٩ ج/ -٦ د/ -٣

الحل/

$\int_{2}^{6} \text{ق}(س)\, دس = \lim_{ن \to \infty} \text{م}(\sigma_ن، \text{ق}) = ٦$

* المطلوب/ $\int_{3}^{1} ٣\text{ق}(٢س)\, دس$

نفرض ٢س = ص ← ٢دس = دص ← دس = $\frac{دص}{٢}$

• عندما س = ٣ ← ٢×٣ = ٦ = ص

• عندما س = ١ ← ٢×١ = ٢ = ص

⇐ $\int_{١}^{٣} ٣ق(٢س)\, دس = \int_{٢}^{٦} ٣ق(ص) \times \frac{دص}{٢} = \frac{٣}{٢}\int_{٢}^{٦} ق(ص)\, دص = \frac{٣}{٢} \times -٦ = -٩$ ب

• 2024 دورة ثاني / إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً في [٠، ٣] وكانت ح_ن تجزئة منتظمة للفترة [٠، ٣] بحيث م(ح_ن، ق) = $-٣ - \frac{١٨}{ن}$ ما قيمة $\int_{٠}^{٣} ٢ق(س)\, دس$ =

أ/ -٦ ب/ -٣ جـ/ ٣ د/ ٦

الحل/ $\int_{٠}^{٣} ق(س)\, دس = \lim_{ن \to \infty} م(ح_ن، ق) = \lim_{ن \to \infty} \left(-٣ - \frac{١٨}{ن}\right) = -٣ - ٠ = -٣$

المطلوب/ $\int_{٠}^{٣} ٢ق(س)\, دس = ٢\int_{٠}^{٣} ق(س)\, دس = ٢ \times -٣ = -٦$ أ

• 2025 دورة ثاني / إذا كان ق(س) = ٢س اقتران معرف على [١، ب] وكانت ح_ن تجزئة نونية منتظمة على الفترة نفسها حيث م(ح_ن، ق) = $٣٥ + \frac{٢٥}{ن}$ ما قيمة الثابت ب

أ/ -٦ ب/ ٦ جـ/ ١٨ د/ ±٦

الحل/ $\int_{١}^{ب} ق(س)\, دس = \lim_{ن \to \infty} م(ح_ن، ق) ⇐ \int_{١}^{ب} ٢س\, دس = \lim_{ن \to \infty} \left(٣٥ + \frac{٢٥}{ن}\right)$

⇐ $س^٢ \Big|_{١}^{ب} = ٣٥ + ٠$ ⇐ $ب^٢ - ١ = ٣٥$ ← $ب^٢ = ٣٦$ ← ب = ٦ ✓ ، ب = -٦ ✗

⇐ ب = ٦ ب

• شهر غزة 2023 / إذا كان $\int_{٢}^{٠} ق(س+١)\, دس = -٢٤$ و ح_ن تجزئة نونية منتظمة على الفترة [١، ٣] حيث م(ح_ن، ق) = $\frac{٤ن - ٢ب ن^٢}{ن^٢}$ ، ما قيمة الثابت ب

أ/ -١٢ ب/ ١٠ جـ/ ١٢ د/ ١٤

الحل/ $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = \lim_{ن \to \infty} م(ح_ن، ق) = \lim_{ن \to \infty} \left(\frac{٤ن - ٢ب ن^٢}{ن^٢}\right) = \frac{-٢ب}{١} = -٢ب$

* $\int_{٢}^{٠} ق(س+١)\, دس = -٢٤$

نفرض س+١ = ص ← دس = دص

• عندما س = ٠ ⟸ ص = ١

• عندما س = ٢ ⟸ ٢ + ١ = ٣ = ص

⟸ $\int_{٢}^{٠}$ ق(س+١) دس = -٤ج ⟸ $\int_{٣}^{١}$ ق(ص) دص = -٤ج ⟸ -(-٢ب) = -٤ج

⟸ ٢ب = -٤ج ⟸ ب = -٢ج   أ

• خارجي/ اذا علمت أن $\int_{-١}^{٤}$ ق(س) دس = ٩ ، وكانت قيمة الثابت أ إذا كان م(ح_ن، ق) = $\frac{(ن+١)(٢أن+١)}{ن^٢}$ حيث ح_ن تجزئة نونية منتظمة لـ [-١، ٤] هي أ

أ/ ٩   ب/ $\frac{٢}{٩}$ جـ/ $\frac{-٩}{٢}$ د/ $\frac{٩}{٢}$

الحل/

$\int_{-١}^{٤}$ ق(س) دس = $\lim_{ن \to \infty}$ م(ح_ن، ق) = $\lim_{ن \to \infty} \left(\frac{(ن+١)(٢أن+١)}{ن^٢}\right)$

⟸ ٩ = $\lim_{ن \to \infty} \left(\frac{٢أن^٢ + ن + ٢أن + ١}{ن^٢}\right)$ ⟸ ٩ = $\frac{٢أ}{١}$ ⟸ $\frac{٩}{٢}$ = أ   د

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية :

• 2019/ استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد قيمة $\int_{٢}^{٤}$ (٨س - ٣) دس

الحل/ ق(س) = ٨س - ٣ ، س ∈ [٢، ٤] ، س*_ر = س_ر

* ل = $\frac{ب - أ}{ن}$ = $\frac{٤ - ٢}{ن}$ = $\frac{٢}{ن}$

* س*_ر = س_ر = أ + ل ر = ٢ + $\frac{٢}{ن}$ ر

* ق(س*_ر) = ق(٢ + $\frac{٢}{ن}$ ر) = ٨(٢ + $\frac{٢}{ن}$ ر) - ٣ = ١٦ + $\frac{١٦}{ن}$ ر - ٣ = ١٣ + $\frac{١٦}{ن}$ ر

* م(ح_ن، ق) = ل $\sum_{ر=١}^{ن}$ ق(س*_ر) = $\frac{٢}{ن} \sum_{ر=١}^{ن}$ (١٣ + $\frac{١٦}{ن}$ ر) = $\frac{٢}{ن}$ ($\sum_{ر=١}^{ن}$ ١٣ + $\sum_{ر=١}^{ن} \frac{١٦}{ن}$ ر)

= $\frac{٢}{ن}$ (١٣ن + $\sum_{ر=١}^{ن} \frac{١٦}{ن}$ ر) = $\frac{٢}{ن}$ (١٣ن + $\frac{\cancel{١٦}^{٨}}{\cancel{ن}} \times \frac{\cancel{ن}(ن+١)}{\cancel{٢}}$)

= $\frac{٢}{ن}$ (١٣ن + ٨ن + ٨) = $\frac{٢}{ن}$ (٢١ن + ٨) = ٤٢ + $\frac{١٦}{ن}$

* $\int_{٢}^{٤}$ ق(س) دس = $\lim_{ن \to \infty}$ م(ح_ن، ق) = $\lim_{ن \to \infty}$ (٤٢ + $\frac{١٦}{ن}$) = ٤٢ + ٠ = ٤٢

" أنهكه المسير .. وإن توقف هلك ! "

• 2020 دور ثاني/ إذا كان الاقتران $ق(س) = ٢ - ٣س$ ، $س \in [١، ٣]$ معتبراً $س_ر^* = س_ر$ ، احسب $\int_{1}^{3} ق(س)\, دس$ باستخدام تعريف التكامل المحدود.

الحل/

$* \; ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٣ - ١}{ن} = \frac{٢}{ن}$ $\qquad * \; س_ر^* = س_ر = أ + ل ر = ١ + \frac{٢}{ن} ر$

$* \; ق(س_ر^*) = ق(١ + \frac{٢}{ن} ر) = ٢ - ٣(١ + \frac{٢}{ن} ر) = ٢ - ٣ - \frac{٦}{ن} ر = -١ - \frac{٦}{ن} ر$

$* \; م(ن، ح) = ل \sum_{ر=1}^{ن} ق(س_ر^*) = \frac{٢}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} (-١ - \frac{٦}{ن} ر) = \frac{٢}{ن} \left(\sum_{ر=1}^{ن} -١ - \frac{٦}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ر \right)$

$= \frac{٢}{ن} \left(-ن - \frac{٦}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢} \right) = \frac{٢}{ن}(-ن - ٣ن - ٣) = \frac{٢}{ن}(-٤ن - ٣)$

$= -٨ - \frac{٦}{ن}$

$* \; \int_{1}^{3} ق(س)\, دس = \lim_{ن \to \infty} م(ن، ح) = \lim_{ن \to \infty} (-٨ - \frac{٦}{ن}) = -٨ - ٠ = -٨$

• 2021 دور أول/ استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد قيمة $\int_{-1}^{4} (٢س - ٥)\, دس$

الحل/ $ق(س) = ٢س - ٥$ ، $س \in [-١، ٤]$ ، $س_ر^* = س_ر$

$* \; ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٤ - -١}{ن} = \frac{٥}{ن}$ $\qquad * \; س_ر^* = س_ر = أ + ل ر = -١ + \frac{٥}{ن} ر$

$* \; ق(س_ر^*) = ق(س_ر) = ق(-١ + \frac{٥}{ن} ر) = ٢(-١ + \frac{٥}{ن} ر) - ٥ = -٢ + \frac{١٠}{ن} ر - ٥$

$= -٧ + \frac{١٠}{ن} ر$

$* \; م(ن، ح) = ل \sum_{ر=1}^{ن} ق(س_ر^*) = \frac{٥}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} (-٧ + \frac{١٠}{ن} ر) = \frac{٥}{ن} \left(\sum_{ر=1}^{ن} -٧ + \frac{١٠}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ر \right)$

$= \frac{٥}{ن} \left(-٧ن + \frac{١٠}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢} \right) = \frac{٥}{ن}(-٧ن + ٥ن + ٥) = \frac{٥}{ن}(-٢ن + ٥)$

$= -١٠ + \frac{٢٥}{ن}$

$* \; \int_{-1}^{4} ق(س)\, دس = \lim_{ن \to \infty} م(ن، ح) = \lim_{ن \to \infty} (-١٠ + \frac{٢٥}{ن}) = -١٠ + ٠ = -١٠$

• 2021 دور أول/ استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد قيمة $\int_{-3}^{5} (٢س + ٤)\, دس$

الحل/ $ق(س) = ٢س + ٤$ ، $س_ر^* = س_ر$ ، $س \in [-٣، ٥]$

$* \; ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٥ - -٣}{ن} = \frac{٨}{ن}$ $\qquad * \; س_ر^* = س_ر = أ + ل ر = -٣ + \frac{٨}{ن} ر$

$* \; ق(س_ر^*) = ق(-٣ + \frac{٨}{ن} ر) = ٢(-٣ + \frac{٨}{ن} ر) + ٤ = -٦ + \frac{١٦}{ن} ر + ٤ = \frac{١٦}{ن} ر - ٢$

$* \; م(ن، ح) = ل \sum_{ر=1}^{ن} ق(س_ر^*) = \frac{٨}{ن} \left(\sum_{ر=1}^{ن} (\frac{١٦}{ن} ر - ٢) \right) = \frac{٨}{ن} \left(\frac{١٦}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ر - \sum_{ر=1}^{ن} ٢ \right)$

$$\Leftarrow م(ن،ط) = \frac{8}{ن}\left(\frac{16}{ن} \times \frac{ن(ن+1)}{2} - 2ن\right) = \frac{8}{ن}\left(8ن + 8 - 2ن\right) = \frac{8}{ن}\left(6ن + 8\right)$$

$$= 48 + \frac{64}{ن}$$

$$* \int_{-3}^{?} ق(س)\,دس = \lim_{ن \to \infty} م(ن،ط) = \lim_{ن \to \infty}\left(48 + \frac{64}{ن}\right) = 48 + 0 = 48$$

• 2021 دور أول/ إذا كان $م(ن،ط) = 6 + \frac{4 + 8 + 12 + --- + 4ن}{ن^2}$ حيث $ط_ن$ تجزئة نونية منتظمة في $[1،4]$ ما قيمة $\int_1^4 2ق(س)\,دس$

الحل/

$$م(ن،ط) = 6 + \frac{4 + 8 + 12 + --- + 4ن}{ن^2} = 6 + \frac{4(1 + 2 + 3 + --- + ن)}{ن^2} \qquad \sum_{ر=1}^{ن} ر$$

$$= 6 + \frac{\frac{4ن(ن+1)}{2}}{ن^2} = 6 + \frac{2ن(ن+1)}{ن^2} = 6 + \frac{2ن^2 + 2ن}{ن^2}$$

$$* \int_1^4 ق(س)\,دس = \lim_{ن \to \infty} م(ن،ط) = \lim_{ن \to \infty}\left(6 + \frac{2ن^2 + 2ن}{ن^2}\right) = 6 + \frac{2}{1} = 8$$

المطلوب/ $\int_1^4 2ق(س)\,دس = 2\int_1^4 ق(س)\,دس = 2 \times 8 = 16$

• 2023 دور أول/ استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد قيمة $\int_1^3 (2 - 6س)\,دس$

الحل/ $ق(س) = 2 - 6س$ ، $س \in [1،3]$ ، $س^*_ر = س_ر$

$$* ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{3 - 1}{ن} = \frac{2}{ن}$$

$$* س^*_ر = س_ر = أ + ر ل = 1 + \frac{2}{ن}ر$$

$$* ق(س^*_ر) = ق\left(1 + \frac{2}{ن}ر\right) = 2 - 6\left(1 + \frac{2}{ن}ر\right) = 2 - 6 - \frac{12}{ن}ر$$

$$= -4 - \frac{12}{ن}ر$$

$$* م(ن،ط) = ل \sum_{ر=1}^{ن} ق(س^*_ر) = \frac{2}{ن} \sum_{ر=1}^{ن}\left(-4 - \frac{12}{ن}ر\right) = \frac{2}{ن}\left(\sum_{ر=1}^{ن} -4 - \frac{12}{ن}\sum_{ر=1}^{ن} ر\right)$$

$$= \frac{2}{ن}\left(-4ن - \frac{12}{ن} \times \frac{ن(ن+1)}{2}\right) = \frac{2}{ن}\left(-4ن - 6ن - 6\right) = \frac{2}{ن}\left(-10ن - 6\right)$$

$$= -20 - \frac{12}{ن}$$

$$* \int_1^3 ق(س)\,دس = \lim_{ن \to \infty} م(ن،ط) = \lim_{ن \to \infty}\left(-20 - \frac{12}{ن}\right) = -20 - صفر = -20$$

• 2023 دور ثاني / إذا كانت $ح_ن$ تجزئة منتظمة للفترة [أ، ب] وكان الاقتران $ق(س) = ٢س$ ، $س \in [١، ب]$
$م(ح_ن ، ق) = ٣٥ + \frac{٢٥}{ن}$ ما قيمة / قيم الثابت ب

الحل /

$$\lim_{ن \to \infty} م(ح_ن ، ق) = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس \Leftarrow \lim_{ن \to \infty}\left(٣٥ + \frac{٢٥}{ن}\right) = \int_{١}^{ب} ٢س\, دس$$

$$\Leftarrow ٣٥ + ٠ = س^٢ \Big|_{١}^{ب} \Leftarrow ٣٥ = ب^٢ - ١ \Leftarrow ب^٢ = ٣٦ \Leftarrow ب = \pm\sqrt{٣٦}$$

$$\Leftarrow \boxed{ب = ٦} \checkmark \quad \text{أو} \quad ب = -٦ \times$$

• 2024 دور أول / استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد قيمة $\int_{١}^{٣} (٣ - س)\, دس$

الحل /

$ق(س) = ٣ - س$ ، $س^*_ر = س_ر$ ، $س \in [١، ٣]$

* $ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٣ - ١}{ن} = \frac{٢}{ن}$ ، $س^*_ر = س_ر = أ + لر = ١ + \frac{٢}{ن}ر$

* $ق(س^*_ر) = ق\left(١ + \frac{٢}{ن}ر\right) = ٣ - \left(١ + \frac{٢}{ن}ر\right) = ٣ - ١ - \frac{٢}{ن}ر = ٢ - \frac{٢}{ن}ر$

* $م(ح_ن ، ق) = ل \sum_{ر=١}^{ن} ق(س^*_ر) = \frac{٢}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} \left(٢ - \frac{٢}{ن}ر\right) = \frac{٢}{ن}\left(\sum_{ر=١}^{ن} ٢ - \frac{٢}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} ر\right)$

$= \frac{٢}{ن}\left(٢ن - \cancel{\frac{٢}{ن}} \times \frac{\cancel{ن}(ن+١)}{\cancel{٢}}\right) = \frac{٢}{ن}(٢ن - ن - ١) = \frac{٢}{ن}(ن - ١)$

$= ٢ - \frac{٢}{ن}$

* $\int_{١}^{٣} (٣ - س)\, دس = \lim_{ن \to \infty} م(ح_ن ، ق) = \lim_{ن \to \infty}\left(٢ - \frac{٢}{ن}\right) = ٢ - ٠ = \boxed{٢}$

• 2024 دور ثاني / استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد قيمة $\int_{-١}^{٣} (٢ - ٥س)\, دس$

الحل /

* $ق(س) = ٢ - ٥س$ ، $س^*_ر = س_ر$ ، $س \in [-١، ٣]$

* $ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٣ - -١}{ن} = \frac{٤}{ن}$ ، $س^*_ر = س_ر = أ + لر = -١ + \frac{٤}{ن}ر$

* $ق(س^*_ر) = ق(س_ر) = ق\left(-١ + \frac{٤}{ن}ر\right) = ٢ - ٥\left(-١ + \frac{٤}{ن}ر\right) = ٢ + ٥ - \frac{٢٠}{ن}ر = ٧ - \frac{٢٠}{ن}ر$

* $م(ح_ن ، ق) = ل \sum_{ر=١}^{ن} ق(س^*_ر) = \frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} \left(٧ - \frac{٢٠}{ن}ر\right)$

$= \frac{٤}{ن}\left(\sum_{ر=١}^{ن} ٧ - \frac{٢٠}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} ر\right) = \frac{٤}{ن}\left(٧ن - \cancel{\frac{٢٠}{ن}}^{١٠} \times \frac{\cancel{ن}(ن+١)}{\cancel{٢}}\right)$

$= \frac{٤}{ن}(٧ن - ١٠ن - ١٠) = \frac{٤}{ن}(-٣ن - ١٠) = -١٢ - \frac{٤٠}{ن}$

* $\int_{-1}^{3} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \text{م(ن، ح)} = \lim_{\text{ن}\to\infty} -١٢ - \frac{٤٠}{\text{ن}} = -١٢ - ٠ = -١٢$

• 2025 دور أول + 2025 دور ثالث / جد $\int_{-1}^{2} (٤ - ٢\text{س})\,\text{دس}$ مستخدمًا تعريف التكامل المحدود.

الحل/

$\text{ق(س)} = ٤ - ٢\text{س}$ ، $\text{س}^*_\text{ر} = \text{س}_\text{ر}$ ، $\text{س} \in [-١، ٢]$

* $\text{ل} = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٢ - -١}{\text{ن}} = \frac{٣}{\text{ن}}$ ، $\text{س}^*_\text{ر} = \text{س}_\text{ر} = \text{أ} + \text{ل ر} = -١ + \frac{٣}{\text{ن}}\text{ر}$

* $\text{ق}(\text{س}^*_\text{ر}) = \text{ق}(-١ + \frac{٣}{\text{ن}}\text{ر}) = ٤ - ٢(-١ + \frac{٣}{\text{ن}}\text{ر}) = (٤ + ٢ - \frac{٦}{\text{ن}}\text{ر}) = ٦ - \frac{٦}{\text{ن}}\text{ر}$

* $\text{م(ن، ح)} = \text{ل} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^*_\text{ر}) = \frac{٣}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (٦ - \frac{٦}{\text{ن}}\text{ر}) = \frac{٣}{\text{ن}} \left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} ٦ - \frac{٦}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر}\right)$

$= \frac{٣}{\text{ن}}\left(٦\text{ن} - \frac{\cancel{٦}^{\,٣}}{\cancel{\text{ن}}} \times \frac{\cancel{\text{ن}}(\text{ن}+١)}{\cancel{٢}}\right) = \frac{٣}{\text{ن}}(٦\text{ن} - ٣\text{ن} - ٣) = \frac{٣}{\text{ن}}(٣\text{ن} - ٣) = ٩ - \frac{٩}{\text{ن}}$

* $\int_{-1}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \text{م(ن، ح)} = \lim_{\text{ن}\to\infty} (٩ - \frac{٩}{\text{ن}}) = ٩ - ٠ = ٩$

• تكميلية 2023/ إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{١ - \text{جاس}}{\text{جتاس}} & ،\ \text{س} \neq \frac{\pi}{٢} \\ ٣ & ،\ \text{س} = \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ ، ابحث قابلية التكامل للاقتران ق(س) في $[٠، \pi]$

الحل/ $\text{ق}(\frac{\pi}{٢}) = ٣$ ، $\lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}} \frac{١-\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{١ - \text{جا}\frac{\pi}{٢}}{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}} = \frac{١-١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}} \frac{-\text{جتاس}}{-\text{جاس}} = \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}}{\text{جا}\frac{\pi}{٢}} = \frac{٠}{١} = ٠$

$\text{ق}(\frac{\pi}{٢}) \neq \lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}} \text{ق(س)} \Leftarrow$ ق(س) غير متصل عند $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

نفرض $\text{هـ(س)} = \frac{(١-\text{جاس})}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}} = \frac{(١-\text{جاس})\,\text{جتاس}}{\text{جتا}^٢\text{س}} = \frac{(١-\text{جاس})\,\text{جتاس}}{١ - \text{جا}^٢\text{س}}$

$\text{هـ(س)} = \frac{\cancel{(١-\text{جاس})}\,\text{جتاس}}{\cancel{(١-\text{جاس})}(١+\text{جاس})} = \frac{\text{جتاس}}{١+\text{جاس}}$ متصل على $[٠، \pi]$ لأنه حاصل قسمة متصلين والمقام $\neq ٠$ ، اذاً قابل للتكامل على $[٠، \pi]$

وبما أن هـ(س) = ق(س) $\forall$ س $\in [٠، \pi] - \{\frac{\pi}{٢}\}$

اذاً ق(س) قابل للتكامل على $[٠، \pi]$ #

• سؤال الدليل 2025 / إذا كان ق(س) اقتران معرّف ومحدد في [١، ٥] وكانت ح٤٠ تجزئة منتظمة في [١، ٥] بحيث م(ح٤٠، ق) = ٥٠ ، عندما $س^*_ر = س_ر$ وكانت م(ح٤٠، ق) = ٢٠ عندما $س^*_ر = س_{ر-١}$

جد $\int_{١}^{٥} ق(١) - ق(٥)\ دس$

الحل / * عندما $س^*_ر = س_ر$

* $ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٥ - ١}{٤٠} = \frac{٤}{٤٠} = \frac{١}{١٠}$

* $م(ح_{٤٠}، ق) = ل \sum_{ر=١}^{٤٠} ق(س^*_ر) \Leftarrow ٥٠ = \frac{١}{١٠} \sum_{ر=١}^{٤٠} ق(س_ر)$

$\Leftarrow ٥٠٠ = ق(س_١) + ق(س_٢) + ق(س_٣) + - - - - - - + ق(س_{٣٩}) + ق(س_{٤٠})$ ← معادلة ١

* عندما $س^*_ر = س_{ر-١}$ ، $ل = \frac{١}{١٠}$

$م(ح_{٤٠}، ق) = ٢٠ \Leftarrow ٢٠ = \frac{١}{١٠} \sum_{ر=١}^{٤٠} ق(س_{ر-١}) \Leftarrow ٢٠٠ = \sum_{ر=١}^{٤٠} ق(س_{ر-١})$

$\Leftarrow ٢٠٠ = ق(س_٠) + ق(س_١) + ق(س_٢) + ق(س_٣) + - - - - + ق(س_{٣٩})$ ← معادلة ٢

نطرح (١) − (٢) / $٣٠٠ = ق(س_{٤٠}) - ق(س_٠) \Leftarrow ٣٠٠ = ق(٥) - ق(١)$

المطلوب / $\int_{١}^{٥} ق(١) - ق(٥)\ دس = \int_{١}^{٥} -(ق(٥) - ق(١))\ دس = \int_{١}^{٥} -٣٠٠\ دس = -٣٠٠(٥ - ١)$

$= -٣٠٠ \times ٤ = -١٢٠٠$

• خارجي / إذا كانت ح_ن تجزئة نونية منتظمة للفترة $[٠، \frac{\pi}{٢}]$ وكان الاقتران ق(س) = جتاس

ما قيمة $\lim_{ن \to \infty} \frac{٥\pi}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} جتا(\frac{\pi}{٢ن} ر)$

الحل / * $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ق(س)\ دس = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جتاس\ دس = جاس \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = جا(\frac{\pi}{٢}) - جا(٠) = ١ - ٠ = ١$

* $ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{\frac{\pi}{٢} - ٠}{ن} = \frac{\pi}{٢ن}$ ، $س^*_ر = س_ر = أ + ل ر = ٠ + \frac{\pi}{٢ن} ر$

* $ق(س^*_ر) = ق(\frac{\pi}{٢ن} ر) = جتا(\frac{\pi}{٢ن} ر)$

* $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ق(س)\ دس = \lim_{ن \to \infty} م(ح_ن، ق) \Leftarrow ١ = \lim_{ن \to \infty} ل \sum_{ر=١}^{ن} ق(س^*_ر) \Leftarrow ١ = \lim_{ن \to \infty} \frac{\pi}{٢ن} \sum_{ر=١}^{ن} جتا(\frac{\pi}{٢ن} ر)$

$\Leftarrow ٥\times | ١ \times ٢ = \frac{١}{٢} \lim_{ن \to \infty} \frac{\pi}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} جتا(\frac{\pi}{٢ن} ر) \times ١٠$

$\Leftarrow ١٠ = ٥ \lim_{ن \to \infty} \frac{\pi}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} جتا(\frac{\pi}{٢ن} ر) \Leftarrow ١٠ = \lim_{ن \to \infty} \frac{٥\pi}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} جتا(\frac{\pi}{٢ن} ر)$

أسئلة للمهتمين - الدرس الثاني -

١/ إذا كان ق(س) اقتران قابل للتكامل في الفترة [١،٠] وكان $\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢$ ، جد قيم كل من الثوابت أ ، ب حيث م(ن، ق، σ) $= \dfrac{\text{أ}\text{ن}^{٢}+١}{١-٣\text{ن}} + \text{ن} + \text{ب}$

الحل

$$\text{م}(\text{ن}،\text{ق}،\sigma) = \frac{\text{أ}\text{ن}^{٢}+١}{١-٣\text{ن}} + \text{ن} + \text{ب} = \frac{\text{أ}\text{ن}^{٢}+١}{١-٣\text{ن}} + \frac{\text{ن}(١-٣\text{ن})}{١-٣\text{ن}} + \text{ب}$$

$$= \frac{\text{أ}\text{ن}^{٢}+١+\text{ن}-٣\text{ن}^{٢}}{١-٣\text{ن}} + \text{ب} = \frac{\text{ن}^{٢}(\text{أ}-٣)+\text{ن}+١}{١-٣\text{ن}} + \text{ب}$$

$$* \int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \text{م}(\text{ن}،\text{ق}،\sigma) \Leftarrow ٢ = \lim_{\text{ن}\to\infty}\left(\frac{\text{ن}^{٢}(\text{أ}-٣)+\text{ن}+١}{١-٣\text{ن}} + \text{ب}\right)$$

$$\Leftarrow ٢ = \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ن}^{٢}(\text{أ}-٣)+\text{ن}+١}{١-٣\text{ن}} + \lim_{\text{ن}\to\infty} \text{ب}$$

سؤال (٣) نفس هذا السؤال بالضبط

بما أن النهاية موجودة $\neq ٠$ ⇐ درجة البسط = درجة المقام

$$\text{أ}-٣ = ٠ \Leftarrow \text{أ} = ٣$$

$$\Leftarrow ٢ = \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ن}+١}{١-٣\text{ن}} + \text{ب}$$

$$\Leftarrow ٢ = \frac{١}{-٣} + \text{ب} \Leftarrow ٢ + \frac{١}{٣} = \text{ب} \Leftarrow \frac{٦+١}{٣} = \frac{٧}{٣} = \text{ب}$$

٢/ باستخدام تعريف التكامل المحدود ، جد $\int_{-1}^{2} (٤-٢\text{س})\,\text{دس} - \int_{3}^{2} (٤-٢\text{س})\,\text{دس}$ ، معتبراً $\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$

الحل

$$\int_{-1}^{2} (٤-٢\text{س})\,\text{دس} - \int_{3}^{2} (٤-٢\text{س})\,\text{دس} = \cancel{\int_{-1}^{2} (٤-٢\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{3} (٤-٢\text{س})\,\text{دس}} = \int_{-1}^{3} (٤-٢\text{س})\,\text{دس}$$

ق(س) = ٤ − ٢س ، [−١ ، ٣] ، $\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$

$$* \ \text{ل} = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٣--١}{\text{ن}} = \frac{٤}{\text{ن}} ، \ \text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} = \text{أ}+\text{ر}\text{ل} = -١ + \frac{٤}{\text{ن}}\text{ر}$$

$$* \ \text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) = \text{ق}\left(-١+\frac{٤}{\text{ن}}\text{ر}\right) = ٤-٢\left(-١+\frac{٤}{\text{ن}}\text{ر}\right) = ٤+٢-\frac{٨}{\text{ن}}\text{ر} = ٦-\frac{٨}{\text{ن}}\text{ر}$$

$$* \ \text{م}(\text{ن}،\text{ق}،\sigma) = \text{ل}\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) = \frac{٤}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}\left(٦-\frac{٨}{\text{ن}}\text{ر}\right) = \frac{٤}{\text{ن}}\left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}٦ - \frac{٨}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}\text{ر}\right)$$

$$= \frac{٤}{\text{ن}}\left(٦\text{ن} - \frac{\cancel{٨}^{\,٤}}{\cancel{\text{ن}}} \times \frac{\cancel{\text{ن}}(\text{ن}+١)}{\cancel{٢}}\right) = \frac{٤}{\text{ن}}(٦\text{ن}-٤\text{ن}-٤) = \frac{٤}{\text{ن}}(٢\text{ن}-٤)$$

$$= ٨ - \frac{١٦}{\text{ن}}$$

$$* \int_{-1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \text{م}(\text{ن}،\text{ق}،\sigma) = \lim_{\text{ن}\to\infty}\left(٨-\frac{١٦}{\text{ن}}\right) = ٨ - ٠ = ٨$$