Exercice 2

1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
b) Déterminer une base (a) de $\operatorname{Ker} f$ ainsi qu'une base (b, c) de $\operatorname{Im} f$.
c) Montrer que $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.

En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$M^2 \neq 0 \text{ et } M^3 = 0$$

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\operatorname{Im} g^2 = \operatorname{Ker} g$.

2) a) Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g.
b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de g.
c) En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que g n'est pas diagonalisable.

3) a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.
b) Montrer que $(u, g(u), g^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.
d) Déterminer $\operatorname{Im} g$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\operatorname{Ker} g$. Pour finir, déterminer $\operatorname{Im} g^2$ puis conclure.