## Exercice 3

On désigne par $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $p$ un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.

On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p$ et "Face" avec la probabilité $q$.

On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Soit si l'on a obtenu "Pile".
- Soit si l'on a obtenu $n$ fois "Face".

Pour tout entier naturel $k$ non nul, on note $P_k$ (respectivement $F_k$) l'événement « on obtient "Pile" (respectivement "Face") au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

On note $T_n$ le nombre de lancers effectués, $X_n$ le nombre de "Pile" obtenus et enfin $Y_n$ le nombre de "Face" obtenus. On admet que $T_n$, $X_n$ et $Y_n$ sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1) Loi de $T_n$.

  a) Pour tout $k$ de $[\![1, n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $P(T_n = k)$.

  b) Déterminer $P(T_n = n)$.

  c) Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.

  d) Établir que $T_n$ possède une espérance et vérifier que $E(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

2) Loi de $X_n$.

  a) Donner la loi de $X_n$.

  b) Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.

3) Loi de $Y_n$.

  a) Déterminer, pour tout $k$ de $[\![0, n-1]\!]$, la probabilité $P(Y_n = k)$.

  b) Déterminer $P(Y_n = n)$.

  c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires $T_n$, $X_n$ et $Y_n$, puis en déduire $E(Y_n)$.

4) Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire $T$ dont on donnera la loi.