On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1) a) Vérifier que f est une fonction paire.
   b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant f comme densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

2) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

3) On pose $Y = \ln(|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.
   a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $F_Y(x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x)$.
   b) Montrer, sans expliciter la fonction F_Y, que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y et vérifier que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

4) a) Montrer que, si x est positif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ appartient à $[0, 1[$ et montrer que, si x est strictement négatif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ est strictement négatif.
   b) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = -\ln(1 - U)$ et reconnaître la loi de Z.