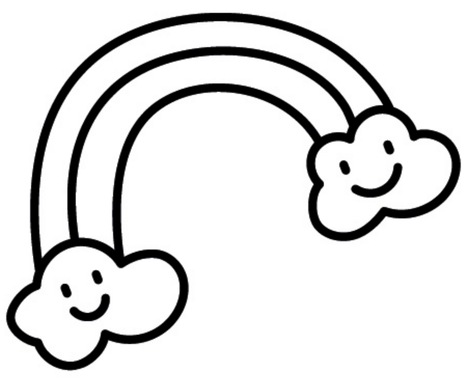

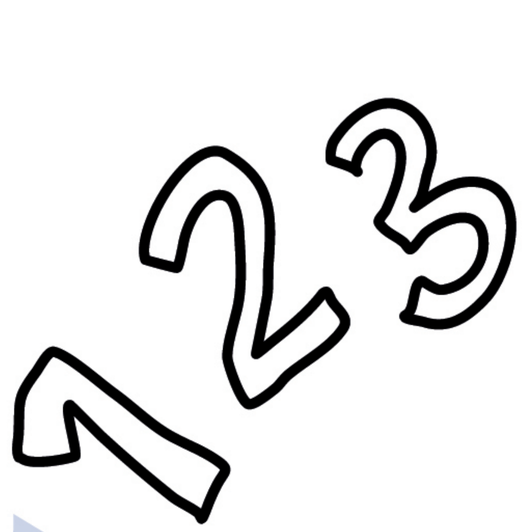

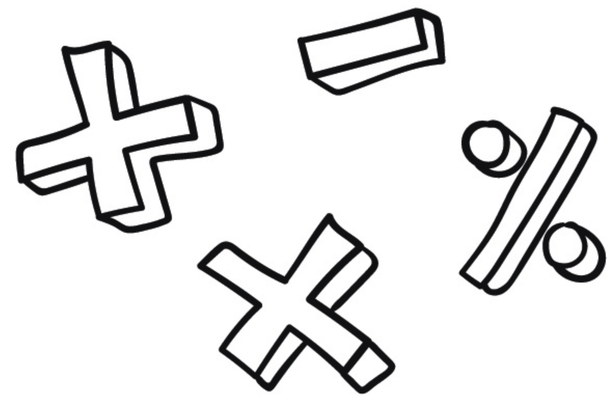

2025
2026
الفصل الأول

حلـــــول الكـــامـــل

الوحدة الثانية

توجيهي أدبي أو شرعي



إعداد: ميّ عمار حوّاري



موقع قطرة التعليمي

Qatraedu.com



+972 59-276-7085

مـقــدمـــــــة

إيماناً منا بضــرورة توفير أفضــل المصــادر التعليمية لطلبتنا في مرحلة الثانوية العامة، يسّــر فريق موقع قطرة التعليمي تقديم الإجابات النموذجية لـ "كراسة الكامل" (تصنيف أسئلة السنوات السابقة).

تأتي هذه الحلول ضمن إطار جهودنا المستمرة في موقع قطرة التعليمي، الذي تأسس برؤية طموحة تهدف إلى تزويد طلاب التوجيهي بتعليم عالي الجودة، لا سيما في مادة الرياضيات، مستخدمين أحدث الأساليب والوسائل التعليمية العالمية.

وقد تم إعداد هذه الكراسة خصيصاً لطلاب الفرع الأدبي والشرعي، لتتضمن حلولاً مفصلة وشرحاً وافياً لكل الأسـئلة، انطلاقاً من إيماننا بأن التعلم الرقمي يمنح الطالب مرونة الوصـول إلى المعرفة في أي وقت ومن أي مكان.

وإننا في موقع قطرة التعليمي، نؤمن بأن وراء كل إنجاز عظيم جنوداً مجهولين؛ لذا نتقدم بأســمى آيات الشــكر والتقدير للمعلّمة الفاضــلة **ميّ عمار حوّاري**، عضــو فريقنا المتميز، التي ســخرت وقتها وجهدها وخبرتها العميقة في إعداد هذه الحلول بدقة وإتقان. إن خبرتها الواسـعة تجلت في أسـلوب الشـرح المبسـط والواضـح الذي يضــع مصــلحة الطالب وتفوقه الأكاديمي في المقام الأول؛ فجزيل الشــكر لها، ونســأل الله أن يجعل هذا العمل في ميزان حسناتها.

أتمنى أن تكون هذه الكراســة عونًا لكم في رحلتكم نحو النجاح، وأن تســاهم في تحقيق التفوق والتميز الذي تسعون إليه.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح الدائم.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

إهـــــداء

إلى صاحبةُ القلبِ الأحنّ،

والأثر الأعمق،

إلى من كان حضورها فرقًا،

وكلماتها أثرًا لا يزول،

من غرست بداخلي حلمًا لا يزال يكبر،

ملهمتي وقدوتي... نجمتي اللامعة،

معلمتي الغالية **رولا بطة**، حفظكِ الله ورعاكِ دائمًا

أ. ميّ عمار حوّاري

روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/adabi-kamel2

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath

نصائح مهمة لكيفية دراسة الرياضيات؟

عزيزي الطالب/ عزيزتي الطالبة، إليك بعض النصائح التي ستساعدك على التفوق في دراستك لهذه المادة وتحقيق أفضل النتائج:

1. **إخلاص النية لله.**
2. **التوكل على الله** بالأخذ بجميع أسباب التفوق، والدعاء والالحاح فيه فهو من أعظم أسلحة المسلم.
3. **فهم الأساسيات أولًا:** تأكد من أنك تفهم الأساسيات بشكل جيد. ولضمان التمكن من الأساسيات فقد وفرنا دورة مجانية عبر موقع قطرة التعليمي.
4. **التدريب المستمر باستخدام الورقة والقلم:** الحل المتكرر هو الطريق إلى الإتقان، حل المسائل بانتظام وبشكل يومي سيعزز من فهمك ويساعدك على استيعاب المفاهيم بشكل أعمق.
5. **افهم المسألة قبل الحل:** لا تتسرع في حل المسألة دون فهم كامل لمتطلباتها، خذ وقتك في قراءة السؤال جيدًا، وفهم المطلوب قبل الشروع في الحل، التسرع قد يؤدي إلى أخطاء غير ضرورية.
6. **حل المسائل بطريقة منظمة:** نظم خطوات الحل بطريقة واضحة ومنهجية، تدوين الخطوات بتسلسل منطقي يساعدك على متابعة الحل والتعرف على أي خطأ قد يحدث بسهولة، هذا الأسلوب يعزز أيضًا من فرصك في الحصول على درجات كاملة.
7. **راجع بانتظام:** خصص وقتًا لمراجعة ما تعلمته بانتظام، ولا تترك الأمور تتراكم حتى اقتراب موعد الامتحانات، المراجعة المستمرة تسهل تذكر المعلومات وتجعلك أكثر استعدادًا للامتحان.
8. **لا تخجل من طلب المساعدة:** إذا واجهت صعوبة في فهم مفهوم معين أو في حل مسألة ما، لا تتردد في طلب المساعدة من معلمك أو زملائك، الحوار والتفاعل مع الآخرين قد يفتح لك آفاقًا جديدة لفهم المادة.
9. **حافظ على هدوئك وثقتك بنفسك:** التوتر قد يؤثر سلبًا على أدائك، حافظ على هدوءك وثقتك بنفسك أثناء الدراسة وفي الامتحانات، تذكر أن النجاح في الرياضيات يعتمد على الاستمرارية والعمل الجاد، وليس على الحفظ فقط.

10. **استعد للامتحانات بالتحضير المبكر:** لا تنتظر حتى اللحظة الأخيرة، ابدأ في التحضير للامتحانات قبل وقت كافٍ، وضع خطة دراسية تغطي جميع الوحدات بشكل متوازن، قم بحل أسئلة الامتحانات السابقة المرفقة في هذه الكراسة، وتأكد من مراجعة الحلول بعد الانتهاء.

11. **قم بتحليل الأخطاء:** عند ارتكاب خطأ في حل مسألة، لا تتجاهله. بدلاً من ذلك، عد إليه وحاول فهم سبب الخطأ وكيف يمكنك تجنبه في المستقبل، التعلم من الأخطاء يُعد أحد أفضل الطرق لتطوير مهاراتك الرياضية.

12. **اجعل لك دفتراً خاصاً لتدوين كل ما يتم دراسته واحرص على تدوين الملاحظات المهمة:** أثناء حل المسائل أو مشاهدة الفيديوهات، احرص على تدوين كل شيء لأنه سيكون من الصعب مشاهدة الفيديوهات في يوم واحد مثل يوم الامتحان، وكتابة الملاحظات المهمة تساعدك على تنظيم أفكارك وتذكر النقاط المهمة عند المراجعة لاحقًا.

نتمنى لك التوفيق والنجاح في رحلتك الدراسية، ونتطلع لأن تكون هذه الكراسة عونًا لك في تحقيق أهدافك في مادة الرياضيات. تذكر أن كل مجهود تبذله اليوم سيثمر في المستقبل.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

الدرس الأول | المصفوفة

القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2019 دور أول / إذا كان $\begin{bmatrix} س^2 & ص+2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ س+2 & 4 \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س ، ص

على الترتيب :

أ/ 1 ، 2 ب/ 2 ، 1 ج/ -2 ، 1 د/ -1 ، -2

الحل/ من تساوي المصفوفات :

$س^2 = 4$ "بأخذ الجذر التربيعي للطرفين"

$\sqrt{س^2} = \pm\sqrt{4} \Leftarrow س = +2 ، -2$

وأيضاً

$4 = س + 2 \Leftarrow 4 - 2 = س$

$\Leftarrow 2 = س$

نأخذ قيمة س المشتركة $\Leftarrow س = \{2 ، -2\} \cap \{2\} = \{2\}$

$ص + 2 = 3 \Leftarrow ص = 3 - 2 \Leftarrow ص = 1 \Leftarrow (س ، ص) = (2 ، 1)$

• 2019 دور ثاني / لتكن $س = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $س_{22} - 3ص_{21}$

أ/ -2 ب/ -1 ج/ -11 د/ -10

الحل/ $س_{22}$: المدخلة التي تقع في الصف الثاني والعمود الثاني في س $\Leftarrow س_{22} = 4$

$ص_{21}$ = المدخلة التي تقع في الصف الأول والعمود الثاني في ص $\Leftarrow ص_{21} = 5$

المطلوب/ $س_{22} - 3ص_{21} = 4 - 3 \times 5 = 4 - 15 = -11$

• 2019 دور ثاني / إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -5 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $3أ_{32} \times أ_{13}$

أ/ 12 ب/ -10 ج/ -6 د/ -15

الحل/ $أ_{32}$: تقع في الصف الثاني ، العمود الثالث $\Leftarrow أ_{32} = -2$

$أ_{13}$: تقع في الصف الثالث ، العمود الأول $\Leftarrow أ_{13} = 1$

أ.ميّ حواري

$\Leftarrow$ المطلوب/ $3أ_{32} \times أ_{13} = 3 \times -2 \times 1 = -6$

• 2020 دور أول / إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $أ_{32} - 2أ_{21}$

أ/ 7 ب/ 6 ج/ 2 د/ 1

الحل/ $أ_{32}$ تقع في الصف الثاني ، العمود الثالث $\Leftarrow أ_{32} = 4$

$أ_{21}$ تقع في الصف الأول ، العمود الثاني $\Leftarrow أ_{21} = -1$

$أ_{32} - 2أ_{21} = 4 - 2 \times -1 = 4 \overset{+}{-} 2 = 6$

• 2020 دور ثاني / إذا كانت المصفوفة $P = \begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ١- & ٥ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $P_{١١} + P_{١٢}$

أ/ ٣- ب/ ٣- ج/ ٥ د/ ٤-

الحل/ $P_{١١}$ تقع في الصف الأول والعمود الأول $\leftarrow P_{١١} = ٤$

$P_{١٢}$ تقع في الصف الثاني والعمود الأول $\leftarrow P_{١٢} = ١-$

المطلوب/ $P_{١١} + P_{١٢} = ٤ + ١- = ٣$

• 2020 دور ثالث / إذا كانت المصفوفة $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ث & ٥ \end{bmatrix}$ ، ما هي قيمة $ب_{٢٢}$

أ/ ١ ب/ ٢- ج/ صفر د/ ٥

الحل/ $ب_{٢٢}$ تقع في الصف الثاني والعمود الثاني $\leftarrow ب_{٢٢} = ٥$

• 2020 دور ثالث / إذا كانت $\begin{bmatrix} ١+س & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١+ص & ٣- \end{bmatrix}$ ، ما قيمتي س ، ص

على الترتيب :

أ/ ٢ ، ٤ ب/ ١ ، ٢ ج/ ٣ ، ٤ د/ ٢ ، ٤

الحل/ من تساوي المصفوفات :

$١+س = ٣ \leftarrow س = ٣-١ = ٢$

$١+ص = ٢ \leftarrow ص = ٢-١ \leftarrow ص = ١$

(س ، ص) على الترتيب = (٢ ، ١)

أ.مي

• 2021 دور أول / إذا كانت المصفوفة $P = \begin{bmatrix} ٩- & ٣ & ٦- \\ ٢ & ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، ما هي قيمة $(P_{١٢})^{ج} - ٢$

أ/ ٢ ب/ ٧ ج/ ١٠ د/ ٣٤

الحل/ $P_{١٢}$ تقع في الصف الثاني والعمود الأول $\leftarrow P_{١٢} = ٢$

المطلوب/ $(P_{١٢})^{٢} - ٢ = (٢)^{ج} - ٢ = ٤ - ٢ = ٢$

• 2022 دور أول / إذا كانت $P = \begin{bmatrix} ٤ & ث \\ ٥ & ١- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $P_{٢١} + ب_{١٢}$

أ/ صفر ب/ ٢ ج/ ٣ د/ ٤

الحل/ $P_{٢١}$ تقع في الصف الأول العمود الثاني $\leftarrow P_{٢١} = ث$

$ب_{١٢}$ تقع في الصف الثاني والعمود الأول في ب $\leftarrow ب_{١٢} = ٤$

المطلوب/ $P_{٢١} + ب_{١٢} = ث + ٤ = ٤$

" نحن مشاريع آخرة ، وإنّما الدنيا عبور "

• 2023 دور أول/ إذا كان $\begin{bmatrix} -١ & -٢ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ص-س & ٥ \end{bmatrix}$ ما قيمة س، ص على الترتيب:

أ/ ٥، ٧ ب/ ٧، ٥ ج/ -٧، ٥ د/ -٧، -٥

الحل/ من تساوي المصفوفات ص = ٥

ص - س = -٢ ⇐ ٥ - س = -٢ ⇐ ٥ + ٢ = س ⇐ ٧ = س

⇐ (س، ص) = (٧، ٥)

• 2024 دور ثاني/ إذا كانت $\begin{bmatrix} س \\ -ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص+٨ \\ س \end{bmatrix}$ ، ما قيمة ص

أ/ -٤ ب/ ٤ ج/ ٨ د/ صفر

الحل/ -ص = س ـــ (١)

س = ص + ٨ نعوض (س = -ص)

⇐ -ص = ص + ٨ ⇐ -٢ص = ٨ ⇐ ص = -٤

أ.ميّ

• 2025 دور أول/ إذا كانت $س = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $\sqrt{س_{١٢} + س_{٢١}} + -٥ص_{٢١}$

أ/ $١+\sqrt{٣}$ ب/ ٢ ج/ ١٧ د/ -١٨

الحل/ $س_{٢١}$ = تقع في الصف الأول العمود الثاني في س ⇐ $س_{٢١} = ١$

$س_{١٢}$ تقع في الصف الثاني العمود الأول في س ⇐ $س_{١٢} = ٣$

$ص_{٢١}$ تقع في الصف الأول والعمود الثاني في ص ⇐ $ص_{٢١} = -٣$

المطلوب/ $\sqrt{س_{٢١} + س_{١٢}} - ٥ص_{٢١} = \sqrt{١+٣} - ٥ \times -٣ = \sqrt{٤} - ١٥ = ٢ + ١٥ = ١٧$

• 2025 دور أول/ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & س+ص & ١ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س - ص

أ/ -٢ ب/ ١ ج/ ٢ د/ ٣

الحل/ ص = ١ / س + ص = ٤ ⇐ س + ١ = ٤ ⇐ س = ٤ - ١ = ٣

س - ص = ٣ - ١ = ٢

• 2025 دور ثاني/ إذا كان $\begin{bmatrix} -١ & ٣ & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & س+ص & ١ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س، ص على الترتيب:

أ/ ١، ٢ ب/ ٢، ١ ج/ ٥، ٢ د/ -١، ١

الحل/ س = ١ / س + ص = ٣ ⇐ ١ + ص = ٣ ⇐ ص = ٣ - ١ = ٢

(س، ص) = (١، ٢)

قف على ثغرك .. وقاتل!

• 2024 طولكرم / إذا كان $\begin{bmatrix} ٢٧ \\ -ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٣)^{٥-س} \\ \log_{١٠}(١٠٠٠٠) \end{bmatrix}$ ما قيمتي س، ص على الترتيب.

ج/ ٤، ٦٢ هـ/ ٤، ٦٢ د/ -٤، ٦٢ ب/ ٤-، ٦٢ أ/ ٤-، ٦٢

الحل/ $٣^{٣-س} = ٢٧ \Leftarrow ٣^{٣-س} = ٣^{٣}$ "إذا تساوت الأساسات فإن الأسس متساوية"

$\Leftarrow ٣ = ٥-س \Leftarrow س = ٥-٣ \Leftarrow س = -٢$

$\Leftarrow -ص = -٤ \log_{١٠}١٠ \Leftarrow -ص = \log_{١٠}(١٠)^{-٤} \Leftarrow -ص = \log_{١٠}(٠,٠٠٠١)$ *

$\Leftarrow ص = \frac{-٤}{-١} \times ١ \Leftarrow ص = ٤$

$(س، ص) = (-٢، ٤)$

تذكر: $\log_{ب} ب^{ن} = ن$ ، $\log_{ا} ا = ١$

أ.مي حواري

• 2025 رام الله/ لتكن $\begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ ٩ & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & س-٢ \\ ص & ٩ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة المقدار $\log_{٣}(ص) - ٢^{(س)}$

ج/ ٦- د/ ١٣- ب/ ٤- أ/ ١٤- P

الحل/ $س-٢ = ٢ \Leftarrow س = ٢+٢ = ٤$ / $ص = ٩$

المطلوب/ $\log_{٣}ص - ٢^{س} = \log_{٣}٩ - ٢^{٤} = ٢\log_{٣}٣ - ١٦ = ٢ \times ١ - ١٦$

$= -١٤$

• خارجي/ ما قيمة/ قيم الثابت س التي تجعل $P = \begin{bmatrix} ١-س & ن \\ ن & ١-س^{٤} \end{bmatrix}$ مصفوفة صفرية.

ج/ صفر د/ ٥/ ١- ب/ ١± أ/ ١ P

الحل/ $P = ٩ \Leftarrow \begin{bmatrix} ١-س & ن \\ ن & ١-س^{٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ن & ن \\ ن & ن \end{bmatrix}$

$\Leftarrow س-١ = ن \Leftarrow س = ١$

و $١-س^{٤} = ن \Leftarrow س^{٤} = ١ \Leftarrow \sqrt[٤]{س^{٤}} = \pm\sqrt[٤]{١} \Leftarrow س = ١-، ١$

$س = \{١\} \cap \{١-، ١\} = \{١\}$

• خارجي تفوق/ ما قيمة/ قيم الثابت س التي تجعل $P = \begin{bmatrix} ١ & ٣-س \\ ١٦-س^{٤} & ١ \end{bmatrix}$ مصفوفة الوحدة

ج/ صفر د/ ∅ ب/ ١± أ/ ٥ P

الحل/ $P = م \Leftarrow \begin{bmatrix} ن & ١ \\ ١ & ن \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣-س & ١ \\ ١ & ١٦-س^{٤} \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ن = ٣-س \Leftarrow س = ٣$

$\Leftarrow ن = ١٦-س^{٤} \Leftarrow س^{٤} = ١٦ \Leftarrow س = \pm\sqrt[٤]{١٦} \Leftarrow س = -٤، ٤$

$س = \{٣\} \cap \{-٤، ٤\} = \emptyset$ "لا يوجد قيم مشتركة".

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية

. 2007 / أوجد قيمة كل من (س، ص) في المعادلة المصفوفية التالية

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 9 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1-س \\ 2ص & 7+س \end{bmatrix}$$

الحل/ $5 = 1-س \Leftarrow 1+5 = س \Leftarrow 6 = س$

و $13 = 7+س \Leftarrow 13-7 = س \Leftarrow 6 = س$

$\{6\} = \{6\} \cap \{6\} = س \Leftarrow$

$ص^2 = 9 \Leftarrow |ص^2| = \sqrt{9} \Leftarrow ص = \pm 3$

$\Leftarrow (س، ص) = (6، \pm 3)$

• 2021 دور أول / إذا كان $\begin{bmatrix} -4-ب & 6 \\ ب & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 2ل+1 & 2 \end{bmatrix}$ جد قيمة كل من الثابتين ب، ل

الحل/ $-4-ب = 6 \Leftarrow -4-6 = ب \Leftarrow -2 = ب$

$ب = 2ل+1 \Leftarrow -2 = 2ل+1 \Leftarrow -2-1 = 2ل \Leftarrow -3 = ل$

• 2022 دور ثاني / إذا كان $\begin{bmatrix} 8^{س} - 1 \\ 1-ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 3^{\frac{3}{4}س} \end{bmatrix}$ جد قيمة س، ص.

الحل/ * $8^{س} - 1 = 15 \Leftarrow 8^{س} = 15+1 \Leftarrow 8^{س} = 16 \Leftarrow (2^3)^{س} = (2)^4$

تذكر $(ب^{ن})^{ن} = ب^{ن \times ن}$

$\begin{array}{|c|c|} \hline 3س & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \Leftarrow 3س = 4 \Leftarrow س = \frac{4}{3}$

* $ص - 1 = \frac{3}{4}س \Leftarrow ص - 1 = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{4}{\cancel{3}} \Leftarrow 1-ص = -1 \Leftarrow ص = 1+1$

$\Leftarrow ص = 2$

• 2019 الوسطى / إذا كانت $\begin{bmatrix} 7+ص & 9 \\ 5 & \sqrt{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4ص \\ 5 & س \end{bmatrix}$ ما قيمة $(س+ص)^2$

الحل/ $ص^4 = 9 \Leftarrow ص = \pm\sqrt{9} \Leftarrow ص = \pm 3$

و $7+ص = 10 \Leftarrow ص = 10-7 \Leftarrow ص = 3$

$\{3\} = \{3\} \cap \{3, -3\} \Leftarrow ص = 3$

* $س = \sqrt{16} \Leftarrow س = 4$

المطلوب/ $(س+ص)^2 = (4+3)^2 = 7^2 = 49$

أ.مي حواري

واغتنم صفو الليالي إنما العيش اختلاس

• 2021 غرب غزة / إذا كان

$$\begin{bmatrix} ص & ٢^{س} \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} لو_{٧}\left(\frac{١}{٤٩}\right)^{س} & ١٢٨ \\ \frac{٦}{ل+٥} & \sqrt{ع} \end{bmatrix}$$

ما قيمة كل من الثوابت س، ص، ع، ل .

الحل/ $١٢٨ = ٢^{س} \Leftarrow ٢^{٧} = ٢^{س} \Leftarrow س = ٧$

تذكر/ $\frac{١}{أ^{ن}} = أ^{-ن}$

* $لو_{٧}\left(\frac{١}{٤٩}\right)^{س} = ص \Leftarrow لو_{٧}\left(\left(\frac{١}{٧}\right)^{٢}\right)^{س} = ص \Leftarrow لو_{٧}\left(٧^{-١}\right)^{٢}^{س} = ص$

$\Leftarrow لو_{٧}\, ٧^{-١\times٢\times س} = ص \Leftarrow -٢س\, لو_{٧}\, ٧ = ص \Leftarrow -٢\times٧\times١ = ص \Leftarrow -١٤ = ص$

* $\left(\sqrt{ع} = ٤\right)^{٢} \Leftarrow ع = ١٦$

* $\frac{٦}{ل+٥} = ٣ \Leftarrow \frac{٣}{٣}(ل+٥) = \frac{٦}{٣} \Leftarrow ل+٥ = ٢ \Leftarrow ل = ٢-٥ \Leftarrow ل = -٣$

أ.ميّ حواري

مَن أخبرك..

أنّ حَمل هموم الأُمّـة يُقعِدُك عن العمل؛ بحُجّة أنّك يضيق صدرك، أو أنّك مُتألِّمٌ حزين! من أخبرك أنّ حفظ القرآن أو متابعة البرامج -المحددة- يُزاحم دراستك وجهدك وعلاماتك؟ مَن أخبرك أنّك تائه ضائع لمجرّد شعور لحظيّ بالفتور، أو حالة من التّكاسل عابرة! من أخبرك أنّك تجد نفسك في متابعة حياة غيرك دون الالتفات قليلًا إليك، لِمَ تنظر لنفسك على أنّك متأخر، مسبوق، وتألف أحيانًا دور الضَّحيّة!

لِمَ نحمل هذا الكَمّ من الهموم والأسئلة، لِمَ صارَ العجز سهلًا، والشّتات عاديًّا، والمزاجيّة رأس المسألة! لِمَ نبحث عنّا في يوميات غيرنا، ونتمنّىٰ تفاصيلًا ليست لنا، لِمَ صرنا نتثاقل من أيّ مهمّة، نهرب من أيّ مسؤوليّة، نخاف من موعد التّسليم، وخطوة التّقديم، ونرتجف إن كُنّا وحدنا، لِمَ نحمل سؤالًا مُلِحًّا ولا نحمل صِدقَ العمل بإجابته!

انتبه يا فَتىٰ، ركّز عليك، علىٰ الّذي تُحبّه وإن قَلّ، على المشكلة وخطوة الحَلّ، ركّز علىٰ الخَفاء حينَ لا تُرىٰ، ولا تهتَمّ بماذا نَرىٰ، انشَغِل بإخلاصٍ يَنفَعُك، وسَعيٍ يَدفَعُك، وعملٍ يَرفَعُك، حتّىٰ وإنّ قَلّ، الصِّدقُ يُثقِلُه.

هَوِّن عليك، لا تظلم قلبك، ولا تأكل نفسك، ولا تُحرق صدرك، ليس مطلوبًا منك كُلّ شيء، أنت بالأصل شيء، ورحمته وسعت كلّ شيء، فارحُم، تُرحَم، واستَعِن تُعان، وكُن بخير.

الدرس الثاني | العمليات على المصفوفات

القسم الأول | أختر الإجابة الصحيحة

• 2019 دورثاني/ ما المصفوفة س صيغة $3س - \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \left(3س - \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)3$

أ/ $\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

الحل/ $3س - 2س + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}$

$\Leftarrow س5 = \begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9+1\\3+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$

$\Leftarrow س\frac{5}{5} = \frac{1}{5} \times \begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix} = س \Leftarrow \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{10}{5}\\\frac{5}{5}\end{bmatrix}$

• 2020 دورأول/ إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة 2×2 و ما قيمة $أ + أ(-)$

أ/ $م_{2\times2}$ ب/ $أ_{2\times2}$ ج/ $و_{2\times2}$ د/ $-أ_{2\times2}$

الحل/ $أ + أ- = -أ + أ = و_{2\times2}$ «خاصية النظير الجمعي للمصفوفة»

• 2020 دورأول/ إذا كانت المصفوفة $2أ = \begin{bmatrix}-4 & ب\\1 & 8\end{bmatrix}$ و ما هي المصفوفة $(أ-)$

أ/ $\begin{bmatrix}2 & ب\\-\frac{1}{2} & -4\end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix}-8 & ب\\2 & 16\end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix}8 & ب\\-2 & -16\end{bmatrix}$

د/ $\begin{bmatrix}-2 & ب\\\frac{1}{2} & 4\end{bmatrix}$

أ.مي حواري

الحل/ $\frac{2أ}{-2} = -أ \Leftarrow \frac{-1}{2} \times \begin{bmatrix}-4 & ب\\1 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-4}{-2} & ب\\\frac{-1}{2} & \frac{8}{-2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & ب\\-\frac{1}{2} & -4\end{bmatrix}$

• 2020 دورثاني/ لتكن المصفوفة $أ = \begin{bmatrix}1 & ب\\-1 & 4\end{bmatrix}$ و ما قيمة $2أ_{2\times2} + أ2$

أ/ $\begin{bmatrix}ب & 3\\3 & -8\end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix}ب & 3\\-1 & 8\end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & -7\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ؟ & ١ \\ ١ & ؟ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ؟ & ١ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix} ٢ = م_{ج} + ٢ر$$ الحل/ $\begin{bmatrix} ؟ & ٢ \\ ٢- & ٨- \end{bmatrix}$ ل/س

$$\begin{bmatrix} ؟ & ٣ \\ ١- & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ؟ & ١ \\ ١ & ؟ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ؟ & ٢ \\ ٢- & ٨ \end{bmatrix} =$$

. 2021 دورثاني/ إذا كان $P = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ؟ & ١ \end{bmatrix} + ٥ \begin{bmatrix} ؟ & ١- \\ ٢ & ؟ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $P_{٢١}$

ب/ ٦-/٢ ، ج/ ٥/٢- ، د/ ١/٥ ، هـ/ ١٠/س

الحل/ $P_{٢١} = ١- + ٥ \times ١- = ١- + ٥- = ٦-$

أو نجد أولاً $P = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ؟ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ؟ & ٥- \\ ١٠ & ؟ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٦- \\ ١٠ & ١ \end{bmatrix}$

$P_{٢١}$ تقع في الصف الأول و العمود الثاني $\Leftarrow P_{٢١} = ٦-$

. 2021 دورثالث/ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} ١- & ٨ \\ ٩ & ٤- \end{bmatrix} + م_{ج}$ حيث $م_{ج}$ هي مصفوفة الوحدة

ما قيمة $(P_{٢٢} - ١)$

ب/ ٤- ، ج/ ٣-/٥ ، د/ ٢-/٥ ، هـ/ ٦/س

الحل/ $P = \begin{bmatrix} ١- & ٨ \\ ٤- & ٩ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ؟ \\ ١ & ؟ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ؟ & ٨ \\ ؟ & ٩ \end{bmatrix}$

$P_{٢٢}$ تقع في الصف الثاني و العمود الثاني $\Leftarrow P_{٢٢} = ٣-$

المطلوب/ $P_{٢٢} - ١ = ٣- - ١ = ٤-$

أ.مي حواري

. 2024 دورثالث/ إذا كانت المصفوفة $٣س = \begin{bmatrix} ؟ & ٦- \\ ٣- & ٣ \end{bmatrix}$ ما المصفوفة س

ب/ $\begin{bmatrix} ؟ & ٤- \\ ٢- & ٢ \end{bmatrix}$ ، ج/ $\begin{bmatrix} ؟ & ١٨- \\ ٩- & ٩ \end{bmatrix}$ ، د/ $\begin{bmatrix} ؟ & ١٢- \\ ٦- & ٦ \end{bmatrix}$ ، هـ/ $\begin{bmatrix} ؟ & ٢- \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

الحل/ $\frac{١}{٣} \times ٣س = \frac{١}{٣} \times \begin{bmatrix} ؟ & ٦- \\ ٣- & ٣ \end{bmatrix}$

$س = \begin{bmatrix} ؟ & ٢- \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

• 2025 دور أول / ما المعكوس الجمعي للمصفوفة $P = \begin{bmatrix} 1- & 1 \\ ث & 1- \end{bmatrix}$

أ/ $\begin{bmatrix} ث & 1 \\ 1 & ث \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} 1 & 1- \\ ث & 1 \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} 1- & ث \\ ث & 1- \end{bmatrix}$

د/ $\begin{bmatrix} 1- & 1 \\ ث & 1 \end{bmatrix}$

الحل/ المعكوس الجمعي لـ $P = -P = \ominus \begin{bmatrix} 1- & 1 \\ ث & 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1- \\ ث & 1 \end{bmatrix}$

• 2025 دور ثاني / إذا كانت $(م_ح)$ مطيدة ضربية لـ و المصفوفة الصفرية لـ حـ المصفوفة (س) التي تحقق المعادلة $س - م_ح = و_٢ - \begin{bmatrix} 1 & ث \\ ث & 1 \end{bmatrix}$

مصفوفة محايدة للجمع

أ/ $\begin{bmatrix} 1 & 1- \\ 1- & 1 \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ث & ٢ \\ ٢ & ث \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ث & ث \\ ث & ث \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} 1- & 1 \\ 1 & 1- \end{bmatrix}$

الحل/ $س - م_ح = \ominus \begin{bmatrix} 1 & ث \\ ث & 1 \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

$\Leftarrow س = \begin{bmatrix} ث & 1 \\ 1 & ث \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1- & ث \\ ث & 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1- & 1 \\ 1 & 1- \end{bmatrix}$

• طولكرم 2024 / إذا كان $P = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣- \end{bmatrix}$ و $ب = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ما قيمة $٣P - ٢(P-ب) - ١٨ب$

أ/ $\begin{bmatrix} 10- \\ 16 \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} 10- \\ 17- \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} 10 \\ 17- \end{bmatrix}$

الحل/ $٣P - ٢(P-ب) - ١٨ب = ٣P - ٢P + ٢ب - ١٨ب = P + ٢ب$

$= ٢ \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ \\ 1 \end{bmatrix}$

• 2025 صيفي الخليل / إذا كان $\frac{1}{٢}ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ و ما ناتج $٣-ب$ =

أ/ $\begin{bmatrix} ٦ & ٣- \\ ٩- & ١٢- \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ١٢ & ٦- \\ ١٨- & ٢٤- \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ٣ & \frac{٣}{٢}- \\ \frac{٩}{٢}- & ٦- \end{bmatrix}$

$$\text{ls} \quad \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$$

الحل/ $\text{ن}^{-١} = \frac{١}{\text{ب}} \times \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \times -٦ \Leftarrow -\text{ن}^{-١} = \begin{bmatrix} -٢٤ & ٦ \\ -١٨ & ١٢ \end{bmatrix}$

• خارجي/ اذا كانت $\text{ن}^{-١}$ ، ن^{T} ، ن^{*} مصفوفات وكانت $\text{ب} = ٤\text{جـ} - \text{P}$ حيث $\text{ص}_{٢٢} = -٢$

ما قيمة المنطة $\text{P}_{٢٢}$ $\quad \text{ن}_{٢٢} = ٨$

أ/ -٨ $\quad$ ب/ -١٦ $\quad$ جـ/ -٢٤ $\quad$ د/ -٤٨

الحل/ $\text{ب} = ٤\text{جـ} - \text{P} \Leftarrow \text{ن}_{٢٢} = \text{ن}^{جـ}_{جـ} - \text{P}^{جـ}_{جـ} \Leftarrow ٨ \times ٤ - ٢ - \text{P}^{جـ}_{جـ}$

$\Leftarrow \text{P}^{جـ}_{جـ} = -٨ - ١٦ = -٢٤ \Leftarrow \text{P}^{جـ}_{جـ} - ٨ - = ١٦$

• القسم الثاني/ أجب عن الأسئلة الآتية :

• 2019 دور أول/ إذا كانت $\text{P} = \begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ ٤ & ١ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$ و $\text{ن} = \begin{bmatrix} ٤ & ب \\ ٨ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix}$

أجد المصفوفة س حيث $\text{س}٢ = \text{ن}٣ - \text{P}$

الحل/ $(\text{ن}٣ - \text{P}) \frac{١}{٢} = \text{س} \Leftarrow \frac{١}{٢} \times (\text{ن}٣ - \text{P} = \text{س}٢)$

$$\Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٢} \left(٣ \begin{bmatrix} ٤ & ب \\ ٨ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ ٤ & ١ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} \right)$$

$$\Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٢} \left(\begin{bmatrix} ١٢ & ب \\ ٢٤ & ٣ \\ ٢١ & -٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ ٤ & ١ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} \right) \frac{١}{٢}$$

$$\Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} -١٠ & -٧ \\ -٢٠ & -٣ \\ ٤ & -٢٢ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} -٥ & -\frac{٧}{٢} \\ -١٠ & -١ \\ ٢ & -١١ \end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

• 2019 دور ثاني/ إذا كان $\text{P} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix}$ و $\text{ن} = \begin{bmatrix} ب & -٦ \\ ٥ & ب \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$

أجد المصفوفة س حيث $\text{س}٢ - \text{P} = \text{ن}$

الحل/ $\text{P} - \text{ن} = \text{س}٢ \Leftarrow \frac{١}{٢} \times [\text{س}٢ = \text{ن} - \text{P}] \Leftarrow \text{ن} = \text{س}٢ - \text{P}$

$$\text{ومنه } س = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -6 & ن \\ ن & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{ومنه } س = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & -4 \\ 2 & ن \end{bmatrix}$$

$$\text{ومنه } س = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & ن \end{bmatrix}$$

• 2020 دور أول / حل المعادلة المصفوفية التالية :

$$2\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + س\right) = 3 - س \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ ن & 5 \end{bmatrix}$$

الحل /

$$2س + \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = س \cdot س \ominus \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ ن & 15 \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ ن & -15 \end{bmatrix}$$

$$\text{ومنه } س = \begin{bmatrix} -7 & 12 \\ -2 & -19 \end{bmatrix}$$

• 2020 دور ثاني / حل المعادلة المصفوفية الآتية :

$$3 - س \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 6 & ن \\ 12 & ن \end{bmatrix} - 3س$$

الحل /

$$-3س + \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 12 & ن \\ 24 & ن \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 9 \\ 18 & 15 \end{bmatrix} - س + 3س$$

$$3س = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 9 \\ 18 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 12 & ن \\ 24 & ن \end{bmatrix}$$

$$\frac{3س}{3} = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 24 & 9 \\ 42 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\text{ومنه } س = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 3 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

لا تنتظر الفرصة المناسبة !
لمَ تنتظر أمرًا موجعًا حتّى تتغير، لِمَ تنتظر مُصابًا حتى تتأثر، لِمَ لا تغرس حُبًّا و تحيي قلبًا دون انتظار، لِمَ تنتظر فرصة وأنت تملك المساحة ...

• 2020 دور أول/ أثبت أنه $P - \frac{1}{3}ب = س$ و $س^2$ إذا كانت

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \quad س = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل/ $P - \frac{1}{3}ب = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \frac{1}{3} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ *

$P - \frac{1}{3}ب = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$ الطرف الأيمن

الطرف الأيسر $= س^2 = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$

لاحظ أن $P - \frac{1}{3}(ب) = س^2$ ≠≠

• 2020 دور ثالث/ حل المعادلة المصفوفية الآتية:

$$3س - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ ث & -1 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - س^2$$

الحل/ $3س - \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ ث & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - س^2$

$+ س^2$ $+ س^2$

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ ث & -2 \end{bmatrix} = س^5 \leftarrow \frac{س^5}{5} = \frac{1}{5} \times \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -4 & ث \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -\frac{4}{5} & ث \end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

• 2021 دور ثاني/ إذا كانت

$$\begin{bmatrix} س & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص & -2 \\ -1 & ث \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & س \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

جد قيمة كل من س، ص

الحل/ $\begin{bmatrix} س & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص - 2 & 2 + س \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$س + 2 = 4 \Leftarrow س = 4 - 2 \Leftarrow س = 2$

$2 = ص - 2 \Leftarrow س = ص - 2 \Leftarrow ص = 2 + 2 = 4 \Leftarrow ث = ص$

$(س، ص) = (2، 4)$

• 2021 دور ثالث / ليكن $P = \begin{bmatrix} ٢ & ٦- \\ ٤ & ب \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$ ، أجد المصفوفة س

صيغة $٢س - و_{٢×٢} = P - ٢ب$

الحل / • $س - و_{٢×٢} = س$ ، و المصفوفة المحايدة في الجمع والطرح ".

$\frac{١}{٢}(P - ٢ب) = س \Leftarrow \frac{١}{٢}(٢س) = P - ٢ب$

$\left(\begin{bmatrix} ٤ & ب \\ ٦- & ٢ \end{bmatrix} - ٢ \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix} \right) \frac{١}{٢} = س \Leftarrow$

$\left(\begin{bmatrix} ٤ & ب \\ ٦- & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٦- \\ ب & ٤ \end{bmatrix} \right) \frac{١}{٢} = س$

$\begin{bmatrix} ب- & ١٠- \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix} \frac{١}{٢} = س$

$\begin{bmatrix} ب & ٥- \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = س \Leftarrow$

• 2022 دور ثاني / حل المعادلة المصفوفية $س = ٢(و - س) + ٣ \begin{bmatrix} ١- \\ ٢ \end{bmatrix}$

$و - س = ٩ + س$ ←

$س = -$

الحل /

$\underset{-س}{س} = \underset{-س}{٢س} - \begin{bmatrix} ٣- \\ ٦ \end{bmatrix}$

$\frac{-١}{٣} \times \begin{bmatrix} ٣- \\ ٦ \end{bmatrix} = \frac{-٣س}{٣-} \Leftarrow س = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢- \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

• 2023 دور ثالث / حل المعادلة المصفوفية :

$\begin{bmatrix} ٢ \\ ١- \end{bmatrix} + س = ٣ \begin{bmatrix} ١- \\ ب \end{bmatrix} - ٢س$

الحل /

$\underset{-س}{س} = \begin{bmatrix} ٣- \\ ب \end{bmatrix} - \underset{-س}{٢س} \Leftarrow \begin{bmatrix} ٢ \\ ١- \end{bmatrix} + س$

$\begin{bmatrix} ٣- \\ ب \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ \\ ١- \end{bmatrix} = س \Leftarrow$

$\begin{bmatrix} ١- \\ ١- \end{bmatrix} = س \Leftarrow$

• 2024 دور ثالث / حل المعادلة المصفوفية :

$\left(\begin{bmatrix} ب & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} + س \right) ٢ = م_{٢} + س٣$

الحل/ $\begin{bmatrix} ب & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + ٣س_{-٣س} = م_{٢} + ٣س_{-٣س}$

$\Leftarrow س = \begin{bmatrix} ب & ١ \\ ١ & ب \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ب & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \Leftarrow س = \begin{bmatrix} ب & ١ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$

• 2025 دور أول/ حل المعادلة المصفوفية :

$\begin{bmatrix} ٢ & ٢- \\ ٥ & ٨- \end{bmatrix} \ominus ٣س = (\begin{bmatrix} ب & ٢- \\ ١- & ٢- \end{bmatrix} + ٤س)٢$

الحل/

$\begin{bmatrix} ٢- & ٢+ \\ ٥- & ٨+ \end{bmatrix} + ٣س_{-٢س} = \begin{bmatrix} ب & ٤- \\ ٢- & ٤- \end{bmatrix} + ٨س_{-٣س}$

$\Leftarrow ٦س = \begin{bmatrix} ب & ٤- \\ ٢- & ٤- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢- & ٢ \\ ٥- & ٨ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \frac{٦}{٦}س = \frac{١}{٦} \times \begin{bmatrix} ٢- & ٦ \\ ٣- & ١٢ \end{bmatrix} \Leftarrow س = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & \frac{١}{٣}- \end{bmatrix}$

• 2024 قباطية/ حل المعادلة المصفوفية :

$\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix} ٣ + ٤س = س - \begin{bmatrix} ٩ & ٦ \\ ١٥ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل/

$\begin{bmatrix} ٢٤ & ١٢ \\ ٦ & ١٨ \end{bmatrix} + ٤س_{+س} = س_{+س} - \begin{bmatrix} ٩ & ٦ \\ ١٥ & ٣ \end{bmatrix}$

$٥س = \begin{bmatrix} ٢٤ & ١٢ \\ ٦ & ١٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٩ & ٦ \\ ١٥ & ٣ \end{bmatrix}$

أ.ميّ حواري

$\Leftarrow \frac{٥س}{٥} = \begin{bmatrix} ١٥- & ٦- \\ ٩ & ١٥- \end{bmatrix} \times \frac{١}{٥} \Leftarrow س = \begin{bmatrix} ٣- & \frac{٦}{٥}- \\ \frac{٩}{٥} & ٣- \end{bmatrix}$

• القدس الشريف 2025/ حل المعادلة المصفوفية التالية :

$-٤م_{٢} - \frac{٩}{٢}س + ٣س_{-} = (\begin{bmatrix} ١- & ٤ \\ ٦ & ٥- \end{bmatrix}٢ + ٣س_{-} - \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٧ & ٩- \end{bmatrix})٢$

مصفوفة محايدة للجمع

الحل/ $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} 4 + 3س4 - \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 14 & -18 \end{bmatrix} + 3س4 = \begin{bmatrix} -4 & 3س - \\ 4ص & \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 24 & -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 14 & -18 \end{bmatrix} = 3س - 4ص$

$\begin{bmatrix} 1 & ب \\ ب & 1 \end{bmatrix} 4 + \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 38 & -38 \end{bmatrix} 4 + 4ص = 3س \Leftarrow$

$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 42 & -38 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = 2س \Leftarrow \begin{bmatrix} 4 & ب \\ ب & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 38 & -38 \end{bmatrix} = 3س \Leftarrow$

$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 21 & -19 \end{bmatrix} = س \Leftarrow$

• خارجي تفوق/ حل المعادلة المصفوفية $3س + 3ب = 2ب + ص$ حيث :

$\bar{P} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\frac{1}{2}ج = \begin{bmatrix} ب & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $ج = ب - ص$

الحل/ $ب + ص = 3ب + 3س$

$ب - ب$ $ب - ب$

$ص = 2ب + 3س \Leftarrow$

$ص = 2(ج + ص) + 3س$

$ص = 2ج + 2ص + 3س$

$ص = -2ج - ص + 3س$

$3س = \frac{1}{2} \times (-2ج - ص) \times \frac{1}{2}$

$س = \frac{1}{2}(-2ج - ص)$ اخراج (-1) عامل مشترك.

$س = -\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$س = -\frac{1}{2}(ص + 2ج)$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \frac{1}{2} - = س$

$\begin{bmatrix} -1 & \frac{-5}{2} \\ \frac{-9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} = س$

$ص = ص + 2ج$

$ب = ب - ص$

$2ج = \begin{bmatrix} 4 & ب \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times 4$

$2ج = \begin{bmatrix} 8 & ب \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$

أ.ميّ حواري

الدرس الثالث | ضرب المصفوفات

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة |

• 2020 دور ثاني / إذا كانت أ، ب، جـ ثلاث مصفوفات حيث أ$_{٢×٣}$ ، ب$_{م×ن}$ ، جـ$_{٢×٤}$ وكان أ×ب = جـ ما قيمة كل من م، ن على الترتيب:

أ/ ٢، ٣ ب/ ٢، ٤ جـ/ ٣، ٤ د/ ٤، ٣

الحل/ أ$_{٢×٣}$ × ب$_{م×ن}$ = جـ$_{٢×٤}$ ⇐ عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب "لتكون عملية الضرب معرفة"

⇐ م = ٣

ناتج أ×ب من الرتبة ٢×ن = ٢×٤ ⇐ ن = ٤

⇐ م، ن = ٣، ٤

• 2020 دور ثاني / إذا كان $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & س \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ما قيمة س

أ/ صفر ب/ ٤ جـ/ ٢ د/ ١

الحل/ بضرب المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٢×س)+(١×ص) \\ (٢×٢)+(٣×ص) \end{bmatrix}$$

أ.ميّ حواري

$\cancel{٤}+٣ص = \cancel{٤}$ ⇐ ٣ص = ٠ ⇐ ص = ٠

٢س + ص = ٢ ⇐ $\frac{٢س}{٢}$ + ٠ = $\frac{٢}{٢}$ ⇐ س = $\frac{٢}{٢}$ = ١

• 2020 دور ثالث / إذا كانت أ، ب، جـ ثلاث مصفوفات وكانت المصفوفة أ من الرتبة ٣×٢ المصفوفة ب من الرتبة ٢×٣ وكانت جـ = ب×أ ما رتبة المصفوفة جـ

أ/ ٢×٢ ب/ ٣×٣ جـ/ ٢×٣ د/ ٣×٢

الحل/ ب$_{٣×٢}$ × أ$_{٢×٣}$ = جـ$_{٢×٢}$

• 2020 دور ثالث / إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ما قيمة أ×أ

أ/ $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ جـ/ $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

الحل/ أ×أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{(١×٠)}^{٠}+\cancel{(٠×١)}^{٠} & \cancel{(-٢×٠)}^{٠}+(١×١)^{١} \\ (١×١)^{١}+\cancel{(٠×-٢)}^{٠} & (-٢×١)^{-٢}+(١×-٢)^{-٢} \end{bmatrix} = أ^{٢}$$

• 2021 دور أول/ إذا كانت أ، ب، س مصفوفات حيث أ = $\begin{bmatrix} ٧ & -١ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

جد المصفوفة س = $\frac{١}{٣}$(أ − أب)

أ/ $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

الحل/ لاحظ أن ب = م٢ "مصفوفة الوحدة المحايدة في ضرب المصفوفات"

⇐ أ × ب = أ × م = أ

⇐ س = $\frac{١}{٣}$(أ − أب) = $\frac{١}{٣}$(أ − أ) = $\frac{١}{٣}$ × و٢ = و٢

• 2021 دور ثاني/ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ × $\left(\begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ \\ -٢ \end{bmatrix}\right)$ ما رتبة المصفوفة س

أ/ ١×١ ب/ ٢×٢ ج/ ١×٢ د/ ٢×١

الحل/ س = م × ص
٢×٢ ، ١×٢

⇐ س ٢×١

م

طرح مصفوفتين من نفس الرتبة يعطي مصفوفة من نفس الرتبة ولنفرض أنها ص ١×٢

• 2021 دور ثالث/ إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -٧ \\ ٤ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، وكانت ب مصفوفة

وكان أ × ب = ج ، ما قيمة ن
٥×٢ ، ن×هـ

أ/ ٢ ب/ ٣ ج/ ٤ د/ ٥

الحل/ أ من الرتبة ٢×٣

⇐ أ × ب = ج ⇐ لتكون عملية الضرب معرفة يجب أن
٣×٢ ، ن×هـ ، ٥×٢

يكون عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب ⇐ ٣ = ن .

• 2021 دور ثالث/ إذا كانت $\begin{bmatrix} -٢ \\ ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ × [ك] = $\begin{bmatrix} -٢ \\ ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة الثابت ك

أ/ −٢ ب/ −١ ج/ صفر د/ ١

الحل/ بضرب المصفوفتان : $\begin{bmatrix} (-٢ \times ك) \\ (٣ \times ك) \\ (ك) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ \\ ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

⇐ $\frac{-٢ك}{-٢} = \frac{-٢}{-٢}$ ⇐ ك = ١ / $\frac{٣ك}{٣} = \frac{٣}{٣}$ ⇐ ك = ١ / ك = ١

⇐ ك = {١}

أو بما أن [ك] لم تؤثر على الضرب ⇐ [ك] محايدة ضربية ⇐ [ك] = [١]

أ.ميّ حواري

• 2022 دور أول/ إذا علمت أن P و ب مصفوفتان حيث P.ب معرفة فأي العبارات الآتية دائماً صحيحة:

أ/ P/P = ب ب/ عدد أعمدة P = عدد صفوف ب ج/ عدد أعمدة ب = عدد صفوف P

د/ عدد أعمدة P = عدد أعمدة ب

• 2022 دور أول/ إذا كانت P و ب و جـ ثلاث مصفوفات حيث P.(ب+جـ) = $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

P.جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$ و ما المصفوفة P.ب

أ/ P/P $\begin{bmatrix} ١ & ∴ \\ ∴ & ١ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ١ & ∴ \\ ∴ & ١ \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٨ & ١ \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} -١ & -٤ \\ -٨ & -١ \end{bmatrix}$

الحل/ P.(ب+جـ) = P.ب + P.جـ

P.(ب+جـ) − P.جـ = P.ب

P.ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$ − $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٨ & ١ \end{bmatrix}$ ← P.ب

• 2023 دور أول/ إذا كانت المصفوفة P = $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٤ & ٥ \\ ∴ & ٣ \end{bmatrix}$ و كانت ب $_{س×ص}$ و جـ $_{٣×١}$ مصفوفتان حيث P $_{٣×٢}$ X ب $_{س×ص}$ = جـ $_{٣×١}$ فما قيمة ص

أ/ ٤ ب/ ٢ ج/ ١ د/ ٣

الحل/ P من الرتبة ٣×٢

P $_{٣×٢}$ X ب $_{س×ص}$ = جـ $_{٣×١}$ ← ص = ١

• 2023 دور ثاني/ إذا كان P = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{bmatrix}$ و كان P $_{٢×٣}$ X ب $_{٣×ن}$ = جـ $_{٢×ن}$ فما قيمة ن

أ/ ٩ ب/ ٥ ج/ ٣ د/ ٦

الحل/ P من الرتبة ٢×٣

جـ $_{٣×٢}$ = ب $_{ن×٣}$ X P $_{٣×٢}$

عدد أعمدة P = عدد صفوف ب ⇐ م = ٣

رتبة ناتج P.ب = ٣×٢ = ن×٢ ⇐ ن = ٣

المطلوب/ م + ن = ٣ + ٣ = ٦

• 2023 دور ثالث/ إذا كانت المصفوفة س = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ و المصفوفة ص = $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

و المصفوفة ع = س × ص ما رتبة المصفوفة ع :

ب/ ١×١ ج/ ١×٣ د/ ٣×٣ أ/ ٣×١

الحل/ رتبة س = ٣×١ ، رتبة ص = ١×٣

ع = س ٣×١ × ص ١×٣ ← ع من الرتبة ١×١

• 2023 دور ثالث/ إذا كانت المصفوفة س = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ما المصفوفة $س^2$

أ/ $\begin{bmatrix} ث & ث \\ ث & ث \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

الحل/

$س^2 = س \times س = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ «لاحظ: لا يوجد تربيع للصفوفات»

$س^2 = \begin{bmatrix} (1\times1)+(-1\times-1) & (1\times-1)+(-1\times1) \\ (-1\times1)+(1\times-1) & (-1\times-1)+(1\times1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

• 2023 دور ثالث/ إذا كانت أ، ب، ج مصفوفات ع عدد حقيقي بحيث أن عمليتي الضرب والجمع معرفة وما العبارة الصحيحة دائمًا من العبارات الآتية :

أ/ أ.ب.ج) = أ.(ب.ج) ب/ أ.(ب+ج) = أ.ب + أ.ج

ج/ ع(أ.ب) = أ(ع.ب) د/ أ - أ = أ - أ

الحل/ ✗ أ/ أ.(ب.ج) = (ج.ب).أ عملية ضرب المصفوفات غير تبديلية .

✗ ب/ أ.(ب+ج) = (ب+ج).أ عملية ضرب المصفوفات غير تبديلية .

✓ ج/ ع(أ.ب) = أ(ع.ب) = (ع أ).ب

✗ د/ أ - أ = أ - أ طرح المصفوفات غير تبديلي

• 2024 دور أول/ لتكن أ = [٢ -١] ، ب = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، جـ = أ×ب ما قيمة $جـ_{١٢}$

أ/ ٤ ب/ ٣ ج/ ١ د/ صفر

الحل/ جـ = أ×ب

$جـ_{١٢}$ = (حاصل ضرب مدخلات الصف الثاني في (ب)) × (مدخلات العمود الأول في أ)

$جـ_{١٢}$ = ٢×٢ = ٤

• 2024 دور ثاني/ إذا كانت م مصفوفة مربعة من الرتبة ٣×٣ ، م محايدة ضربية وما العبارة الصحيحة دائمًا فيما يلي :

أ/ م+أ معرفة ب/ م.أ = أ.م = أ ج/ م.أ معرفة د/ أ.أ معرفة

الحل/ أ/ $م_{٢\times٢} + أ_{٣\times٢}$ معرفة ✗ "غير معرفة لأن رتبة م ≠ رتبة أ"

ب/ م.أ = أ.م = أ ✗ ($أ.م_{٣\times٢}$ غير معرفة لأن عدد أعمدة أ ≠ عدد صفوف م)

جـ/ $م_{٢\times٢}.أ_{٣\times٢}$ معرفة ✓ (عدد أعمدة م = عدد صفوف أ)

د/ أ.أ معرفة ✗ (عدد أعمدة أ ≠ عدد صفوف أ)

• 2024 دور ثالث/ ما رتبة المصفوفة س في المعادلة $س \times أ_{(٤\times١)} = جـ_{٤\times٢}$

أ/ ٢×١ ب/ ٤×١ جـ/ ٤×٤ د/ ١×٢

الحل/ $س_{م\times ن} \times أ_{٤\times١} = جـ_{٤\times٢}$

عدد أعمدة س = عدد صفوف أ ⇐ ن = ١

رتبة (س×أ) = م×٤ = ٢×٤ ⇐ م = ٢

رتبة س = م×ن = ٢×١

أ.ميّ حواري

• 2025 دور ثاني/ ما ناتج العملية $\begin{bmatrix} ٢ \\ -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

أ/ $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ -٢ & -٢ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ جـ/ $\begin{bmatrix} ٤ \\ ٧ \end{bmatrix}$ د/ غير معرفة

الحل/ رتبة المصفوفة الأولى = ٢×١ ≠

رتبة المصفوفة الثانية = ٢×٢

⇐ عملية الضرب غير معرفة لأن عدد أعمدة الأولى ≠ عدد صفوف الثانية

• 2024 أردني/ إذا كان س = [١ ٤] ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$ وكانت ع = ص×س فإن قيمة $ع_{٢٢}$

أ/ ٢٠ ب/ ٢٢ جـ/ ٥ د/ [٢ ٢٠]

الحل/ ع = ص×س

$ع_{٢٢}$ = ضرب مدخلات الصف الثاني في ص × العمود الثاني في س

= ٥×٤ = ٢٠

• 2025 شمال الخليل/ إذا كانت $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ن & ن \\ ص & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & س \\ ٤ & ٣ & ١ \end{bmatrix} = و_{٣}$ ، ما قيمة المقدار

= (س + ص)

٧/س ٥/ص ٣-/ن ١-/٩

الحل/ بضرب المصفوفتين :

$$\begin{bmatrix} هـ & د & ج \\ ب & ه & و \\ ح & ز & ط \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٤\times١)+(-١\times٣) & (٣\times١)+(-١\times٣) & (١\times٣)+(-١\times١) \\ (٤\times ب)+(٤\times ٠) & (٣\times ٠)+(٣\times ٠) & (ب\times٣)+(٠\times١) \\ (٤\times ص)+(-٢\times٤) & (٣\times ص)+(-٢\times٣) & (ص\times١)+(-٢\times١) \end{bmatrix}$$

الحل/ $س - ١ = ب \in ٠ = س$

$ن = ٧ + ص٤ \in \frac{-٨}{٤} = ص٤ \in ص = -٢$

$(س + ص) = ١ + -٢ = -١$

• خارجي/ إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ب & ١ \\ ١- & -٣ \end{bmatrix}$ و ما قيمة $أ^{٢}$

٩/٩ $أ^{٢}\times٢$ ٥/٩ ٩/ و ٢×٢ ٤/٩

الحل/

$$أ^{٢} = أ \times أ = \begin{bmatrix} ب & ١ \\ ١- & -٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ب & ١ \\ ١- & -٣ \end{bmatrix}$$

$$أ^{٢} = \begin{bmatrix} (ب\times ب)+(١\times-١) & (ب\times١)+(١\times-٣) \\ (-١\times ب)+(-٣\times-١) & (-١\times١)+(-٣\times-٣) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٨ \end{bmatrix}$$

• خارجي/ إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -٧ \\ ب & ١ & ٤ \end{bmatrix}$ و كانت ب مصفوفة و كانت $ن = ٥$ و ما قيمة $ج_{٥\times٢}$

٢/٩ ٢/ و ٣/ه ٣-/ز

الحل/ $أ \times ب = ج$

$٥\times٢ \quad ٢\times٣ \quad ٥\times٣$

عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب $\Leftarrow ن = ٣$

رتبة ناتج $أ \times ب = ٢\times٥ = ٥\times٢$ $\Leftarrow ه = ٥$

الحدود/ $ن - ه = ٣ - ٥ = -٢$

• خارجي/ إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ب & ١ \\ ١ & ب \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ و ما رتبة المصفوفة س

١/٢ ١/ص ٢/و ١/٩

الحل/ $س = أ \times ب$

$٢\times١ \quad ٢\times٢ \quad ٢\times١$

س من الرتبة $٢\times١ \Leftarrow$

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية

• 2021 دور أول / إذا كانت $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ن & ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ج = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣- \\ ن & ن \end{bmatrix}$ ، جد $ب \cdot ج$

الحل / $ب_{٢\times٣} \times ج_{٣\times٢} = ف_{٢\times٢}$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣- & ١ \\ ن & ن \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ & ن \end{bmatrix} = ب \times ج = ف$$

$$ف = \begin{bmatrix} (٥\times٥)+(٣\times١)+(٠\times١) & (٥\times٢)+(٣-\times٣)+(٠\times١) \\ (٤\times١)+(٤\times٣)+(٠\times٢) & (٤\times٢)+(١٢-\times٣)+(٠\times٢) \end{bmatrix}$$

$$ف = \begin{bmatrix} ٢٨ & ١ \\ ٤ & ١٢- \end{bmatrix}$$

أ.ميّ حواري

• 2021 دور ثالث / إذا كانت $ف = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٤- & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ن & ٢- \end{bmatrix}$ جد $ب \cdot ف$

الحل / $ب_{٢\times٢} \times ف_{٢\times٢} = ص_{٢\times٢}$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ن & ٢- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٤- & ١ \end{bmatrix} = ص$$

$$ص = \begin{bmatrix} (٣\times١)+(٢\times٢-) & (٣\times٢-)+(٢\times١) \\ (ن\times١)+(٢-\times٤-) & (ن\times٢-)+(٢-\times١) \end{bmatrix} \Leftarrow ص = \begin{bmatrix} ٥ & ٤- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix}$$

• 2022 دور أول / جد قيمة كل من س ، ص في المعادلة

$$\begin{bmatrix} ٠ & س \\ ن & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ن & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = ٣ف - \begin{bmatrix} ن & ١+س \\ ٨ & ص \end{bmatrix}$$

الحل /

$$\begin{bmatrix} (ن\times١)+(٥\times ن) & (١\times١)+(س\times ن) \\ (ن\times٢)+(٥\times١) & (١\times٢)+(س\times١) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ن & ١ \\ ١ & ن \end{bmatrix} ٣ - \begin{bmatrix} ن & ١+س \\ ٨ & ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ن & ١ \\ ٥ & ٢+س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ن & ٣ \\ ٣ & ن \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ن & ١+س \\ ٨ & ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ل & 1 \\ 0 & ٢+س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣-1+س \\ ٣-1 & س٥ \end{bmatrix}$$

$$س=٣ \Leftarrow ٢+1=س \Leftarrow 1=٢-س$$
$$٥-=س٥ \Leftarrow ٢+٣=س٥ \Leftarrow ٢+س=س٥$$

• 2023 دور أول / حل المعادلة المصفوفية الآتية :

$$\begin{bmatrix} 1 & ÷ \\ ÷ & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢٠- & ٨ \\ ١٦ & ٧- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ٢ \\ ٤ & ١٠- \end{bmatrix} ٥ + س٣$$

الحل /

$$\begin{bmatrix} (÷\times ٢٠-)+(1\times ٨) & (1\times ٢٠-)+(÷\times ٨) \\ (÷\times ١٦)+(1\times ٧-) & (1\times ١٦)+(÷\times ٧-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥- & ١٠ \\ ٢٠ & ٥- \end{bmatrix} + س٣$$

$$\begin{bmatrix} ٢٥- & ١٠ \\ ٢٠ & ٥- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ٢٠- \\ ٧- & ١٦ \end{bmatrix} = س٣$$

$$\begin{bmatrix} ١١ & ١٠- \\ ٩- & ٧ \end{bmatrix} = س \Leftarrow \begin{bmatrix} ٣٣ & ٣٠- \\ ٢٧- & ٢١ \end{bmatrix} = س٣$$

• 2023 دور ثاني / حل المعادلة المصفوفية التالية :

أ.مي حواري

$$[٥] \begin{bmatrix} 1 \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص \\ س٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} س- \\ 1 \end{bmatrix} ٣$$

الحل /

$$\begin{bmatrix} ٠ \\ ١٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص٥-س٣- \\ ص٥-٣ \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} (٥\times 1) \\ (٥\times ٣) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص \\ ص \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} س٣- \\ ٣ \end{bmatrix}$$

$$ص٥=١٢- \Leftarrow ص٥=١٥-٣ \Leftarrow ١٥=ص٥-٣$$
$$\frac{٧}{٣}=س \Leftarrow \frac{٧-}{٣-}=\frac{س٣-}{٣-} \Leftarrow ١٢-٠=س٣- \Leftarrow ٠=١٢+س٣- \Leftarrow ٠=ص٥-س٣-$$

• 2024 دور أول / أوجد قيم س، ص حيث

$$\begin{bmatrix} 1 \\ ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & ٢- \\ ٢- & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص \\ ٣ \end{bmatrix} ٢ + \begin{bmatrix} س \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل /

$$\begin{bmatrix} (٣\times 1)+(1\times ٢-) \\ (٣\times ٢-)+(1\times س) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص٢ \\ ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+ \\ ٦-س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص٢+س \\ ٧ \end{bmatrix} \Leftarrow س=٦+٧ \Leftarrow ٦-س=٧ \Leftarrow س=١٣$$
$$\frac{١٢-}{٢}=\frac{ص٢}{٢} \Leftarrow ١+=ص٢+١٣ \Leftarrow ١+=ص٢+س \Leftarrow ٦-=ص$$

• 2024 دورياي / حل المعادلة المصفوفية التالية :

$$\begin{bmatrix}٣ & ٢\\ ١- & ١\end{bmatrix}\begin{bmatrix}أ & ١\\ ١ & أ\end{bmatrix} + ٣س- = \left(\begin{bmatrix}١ & أ\\ ١- & ١\end{bmatrix} + س\right) ٤-$$

الحل /

$$\begin{bmatrix}٣ & ٢\\ ١- & ١\end{bmatrix} ٢ص + ٣س- = \begin{bmatrix}٤- & أ\\ ٤ & ٤-\end{bmatrix} + ٤س-$$

$$+٤س$$

$$س = \begin{bmatrix}٣ & ٢\\ ١- & ١\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}٤- & أ\\ ٤ & ٤-\end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix}٣ & ٢\\ ١- & ١\end{bmatrix} + س = \begin{bmatrix}٤- & أ\\ ٤ & ٤-\end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow س = \begin{bmatrix}٧- & ٢-\\ ٥ & ٥-\end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

• 2024 شمال الخليل / حل المعادلة المصفوفية :

$$\left(\begin{bmatrix}١ & ٢\\ أ & ١\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١ & أ\\ أ & ١\end{bmatrix}\right) + ٣س = \begin{bmatrix}٣ & ٢\\ ٢ & ١\end{bmatrix} ٣- ٢س-$$

الحل /

$$\begin{bmatrix}(أ\times١)+(١\times أ) & (١\times١)+(٢\times أ)\\ (أ\times أ)+(١\times أ) & (١\times أ)+(٢\times١)\end{bmatrix} + ٣س = \begin{bmatrix}٩ & ٦\\ ٦ & ٣\end{bmatrix} - ٢س$$

$$\begin{bmatrix}أ & ١\\ ١ & ٢\end{bmatrix} + ٣س = \begin{bmatrix}٩ & ٦\\ ٦ & ٣\end{bmatrix} - ٢س$$

$$-٢س$$

$$\begin{bmatrix}٩- & ٧-\\ ٧- & ٥-\end{bmatrix} = س \Leftarrow س = \begin{bmatrix}أ & ١\\ ١ & ٢\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}٩- & ٦-\\ ٦- & ٣-\end{bmatrix}$$

• قباطية 2025 / جد قيمة كل من س ، ص حيث :

$$\begin{bmatrix}١\\ ٣\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}١ & ٢-\\ ٢- & س\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ص\\ ٣\end{bmatrix} ٢ + \begin{bmatrix}س\\ ١\end{bmatrix} ٣$$

الحل /

$$\begin{bmatrix}(٣\times١)+(١\times ٢-)\\ (٣\times ٢-)+(١\times س)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ص٢\\ ٦\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}س٣\\ ٣\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}١\\ ٦-س\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ص٢+س٣\\ ٩\end{bmatrix} \Leftarrow$$

$$٦+٩=س \Leftarrow ٩=٦-س \Leftarrow$$

$$١٥=س$$

$$٤٥-١=ص٢ \Leftarrow ١=ص٢+١٥\times٣ \Leftarrow ١=ص٢+س٣$$

$$\Leftarrow ص٢=-٤٤ \Leftarrow ص=-٢٢$$

• 2025 رام الله والبيرة / حل المعادلة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix}٣ & ٦\\ ١ & ٢\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}١ & ٥-\\ ٢ & ٨\end{bmatrix} = ٣س٢ - \begin{bmatrix}٥ & ٤\\ ٩ & ٦-\end{bmatrix}^{٣}$$

الحل /

$$\begin{bmatrix}(١\times٣)+(٥-\times١) & (٢\times٥-)+(٦\times١)\\ (٢\times٨)+(٦\times٢) & (٢\times٥-)+(٦\times٢)\end{bmatrix} = ٣س٢ - \begin{bmatrix}١٥ & ١٢\\ ٢٧ & ١٨-\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}٢- & ٤-\\ ٢٨ & ١٤\end{bmatrix} = ٣س٢ - \begin{bmatrix}١٥ & ١٢\\ ٢٧ & ١٨-\end{bmatrix}$$

$$٣س٢ = \begin{bmatrix}٢- & ٤-\\ ٢٨ & ١٤\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}١٥ & ١٢\\ ٢٧ & ١٨-\end{bmatrix} \Leftarrow س٣ = \begin{bmatrix}١- & ٢\\ ٣٤- & ١٩\end{bmatrix} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}س$$

$$س = \begin{bmatrix}\frac{١}{٢}- & \frac{١٩}{٢}\\ ١٧- & ٧\end{bmatrix} \Leftarrow$$

أ.مي حواري

• خارجي / ليكن $\begin{bmatrix}٨ & ٦\\ ٤ & ٠\end{bmatrix}\begin{bmatrix}أ & ب\\ ١ & ٠\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ج & ٦\\ ٨- & ٠\end{bmatrix}$ ، ما قيمة أ+ب

الحل /

$$\begin{bmatrix}(٤\times٨)+(٠\times٦) & (١\times٦)+(٠\times٨)\\ (٤\times ب)+(٠\times ٠) & (١\times ب)+(٠\times ٠)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٦ & ١٦-\\ ٨- & ٠\end{bmatrix}$$

$$ب = ٠ \Leftarrow \frac{٨}{٨} = \frac{٨-}{٨} \Leftarrow ٦ = ٦+٠ \Leftarrow ٨ب = ٨-$$

$$أ+ب = ٢- + ٠ = ٢-$$

• خارجي / ليكن $٣س \times ٣ = ٣ \times (ص-٤)س$ ، أجد ناتج $(ص-٤)س \times$

$$\begin{bmatrix}١-\\ ب\end{bmatrix} = (ص-٤)س \quad ، \quad \begin{bmatrix}٨\\ ٢-\end{bmatrix} = (٤\times٣)٢- \times \frac{١}{٢}-$$

الحل /

$$٤\times٣ - ص\times٣ = (ص-٤)\times٣$$

$$\begin{bmatrix}٤-\\ ١\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}١-\\ ب\end{bmatrix} = (ص-٤)س$$

$$\begin{bmatrix}٣\\ ١-\end{bmatrix} = (ص-٤)س \Leftarrow$$

$$\begin{bmatrix}٤-\\ ١\end{bmatrix} = ٤س$$

• خارجي/ إذا كانت $P+ب = \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ج = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$

ما المصفوفة التي تمثل $Pج+بج$

الحل/

$Pج+بج = ج(P+ب)$ «اخراج ج كعامل مشترك من اليسار»

$Pج+بج = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

$$\Leftarrow Pج+بج = \begin{bmatrix} (٢\times٥)+(١\times١) & (٢\times-١)+(١\times٢) \\ (١\times٥)+(-٣\times١) & (١\times-١)+(-٣\times٢) \end{bmatrix}$$

$$Pج+بج = \begin{bmatrix} ١١ & ٠ \\ ٢ & -٧ \end{bmatrix}$$

لَمَ الشّعور دائمًا أنّك متأخّر؟

لِمَ تشعر أنّ الجميع سابقك، والرّكب مُتقدّم عنك، ومَن هم حولك أفضل منك! لِمَ الشّعور أنّك لن تُدرك، ولن تَلحَق، ولن تصنع جبلًا ولو تعبت بجَمع الحَصى؟ لِمَ الخوف من فَوات الدّنيا وما فيها، والقلق مِن تَفَلُّت ما بين يديك! لِمَ المقارَنة التي تُعميك عنك، لِمَ لا تلتفت إليك! تعال قليلًا أهمس لك..

من حقّك التَّعَب، والانطفاء قليلًا على حافّة الطّريق، من حقّك البكاء كطفلٍ يبحث أمانَ قلبه، من حقّك الذّبول قليلًا كوردةٍ تنتظر ماء السّقاء، من حقّك الالتفات لك بكُلّ ما تحمل من اهتمام، دون شعورٍ أنّك قصّرت مع أحد، كَفاكَ التّقصير مع نفسك..

أعطِ كُلّ لحظةٍ حَقّها، وقتَ الحُزن احزَن وتألَّم وتَعَلّم، ووقت الفرح افرَح وشارِك وبارِك، ووقت التّيه تُه عنك قليلًا وعُد إليك، ووقت المحنة ابحث عن منحةٍ لك، ويُسرٍ في قلب العُسر، خُذ نفسك ساعةً دون أحد، امشِ كأنّ أقدامك لا تعرف التَّعَب، استمرّ كأنّك لا تعرف التّوَقُّف، تَنَفَّس كأنّ هواء الكون كلّه لك! ابكِ، ابتسم، اصرُخ، قف تحرّك، اركض، ألقِ نفسك، تَذَكّر، تَفَكّر، اسجد طويلًا، أعطِ كُلّ شيء حقّه.

تأخَّر قليلًا في إنجازك، مَن يَلحَقُك؟ راكِم قليلًا في متابعتك، مَن يضربك؟ دَع البعض يسبقك، والآخر يخطو الخطوة قبلك، لا ترى في نفسك أنّك أحَقّ بكلّ شيء! أنتَ أحَقّ بما هو لك، من تميُّز وتقصير ومحاولة وتفوّق وتراكم وتعثُّر وإنجاز، أرأيت؟ أنت بشر، تتداخل في قلبك المشاعر، تختلف عليك الأحوال، المهم أن تكون صادقًا، وفي الصِّدق تَسبق.

يا فَتىٰ، يا قلبًا لا يهدأ، انتبه عليك، إنّما تُبنىٰ الأُمّة بالمُخلِص الصّادق، والصّادق سابق، فلا تَخَف،

الدرس الرابع/ المحددات

• القسم الأول/ اختر الإجابة الصحيحة

• 2015/ إذا كانت P مصفوفة من الرتبة 6 فأيه إحدى العبارات صحيحة دائمًا :

أ/ $|P|4 = |P|2$ ب/ $|P|4 = |P|16$

ج/ $|P|3 = |P|6$ د/ $|P|2 = |P|2$

الحل/ أ/ $|P|4 = |P|^2 2 = |P|2$ ✓

ب/ $|P|4 = |P|^2 16 = |P|16$ ✗

ج/ $|P|3 = |P|^2 6 = |P|36 \neq |P|3$ ✗

د/ $|P|2 = |P|^2 2 \neq |P|2$ ✗

أ.مي حواري

• 2019 دور أول/ إذا كانت P مصفوفة مربعة وثنائية وكانت $|P|-1 = -12$ ما قيمة $|P\frac{1}{2}+|$

أ/ 6 ب/ -3 ج/ -6 د/ 3

الحل/ $|P|-1 = (-1)^2 |P| = -12 \Leftarrow |P| = -12$

$|P\frac{1}{2}| = (\frac{1}{2})^2 |P| = \frac{1}{4} \times -12 = -3$

• 2019 دور ثاني/ إذا كانت P مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكانت $|P2| = 8$ وما قيمة $|P\frac{1}{2}|$

أ/ $\frac{1}{2}$ ب/ 1 ج/ 2 د/ 4

الحل/ $|P2| = 2^2 |P| = 8 \Leftarrow |P| = \frac{8}{4} \Leftarrow |P| = 2$

$|P\frac{1}{2}| = (\frac{1}{2})^2 |P| = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$

• 2020 دور أول/ إذا كانت $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & (w-1) \end{vmatrix} = -11$ ما قيمة الثابت w

أ/ 8 ب/ 3 ج/ 2 د/ 1

الحل/ $(w-1) \times 1 - 3 \times 6 = -11$

$w - 1 - 18 = -11 \Leftarrow w - 19 = -11$

$w = -11 + 19 \Leftarrow w = 8$

• 2020 دور ثاني/ إذا كانت المصفوفة $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ وما قيمة $|P2|$

أ/ 12 ب/ 6 ج/ -6 د/ -12

الحل/ $|P| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \times 4) - (0 \times 1) = 8 - 0 = 3$

$|P2| = 2^2 |P| = 4 \times 3 = 12$

• 2021 دورثالث/ إذا كانت $\begin{vmatrix} ١٠- & ٣ \\ ٣س & ٣- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ ، ما قيمة الثابت س

د/ ٦ ، ج/ ٤٫٥ ، ب/ ٤- ، أ/ ٦-

الحل/ $(-١٠ \times ٣-) - (٣ \times ٣س) = (٤ \times ٣) - (١ \times ٦)$

$٣٠ - ٣٠ = ٣س \Leftarrow ٦ - ١٢ = ٣٠ - ٣س \Leftarrow ٦ = ٣٠ - ٣س$

$\frac{٢٤}{٦} = \frac{٦س}{٦} \Leftarrow س = ٤$

• 2022 دورأول/ إذا كانت المصفوفة $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ \frac{١}{٢} & س \end{bmatrix}$ وكانت $|ب| = ٢$ ما قيمة س

د/ ٣٫٥ ، ج/ ٢٫٥ ، ب/ ١ ، أ/ ٢-

الحل/ $|ب| = (١ \times س) - (\frac{١}{٢} \times ٣)$

$س = ٣٫٥ \Leftarrow س = ١٫٥ + ٢ \Leftarrow ٢ = س - \frac{٣}{٢} \Leftarrow ٢ = \frac{٣}{٢} + س$

$+\frac{٣}{٢}$ $+\frac{٣}{٢}$

• 2020 دورثالث/ إذا كانت المصفوفة $P = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ن \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $|P|$

د/ ٣ ، ج/ ٤- ، ب/ ١ ، أ/ ٤

الحل/ $|P| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ن \end{vmatrix} = (١ \times ٤) - (٣ \times ن) = ٤ - ٣ن = ٤$

• 2021 دورثالث/ إذا كانت P مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكانت $|٢P| = ٢٤$ ما قيمة $\frac{١}{٣}|P| - |-٣P|$

د/ ١٨ ، ج/ ١٥- ، ب/ ١٥- ، أ/ ٥٧-

الحل/ $|٢P| = ٢^{٢}|P| = ٢٤ \Leftarrow \frac{٤|P|}{٤} = \frac{٢٤}{٤} \Leftarrow |P| = ٦$

المطلوب/ $\frac{١}{٣}|P| - |-٣P| = \frac{١}{٣} \times ٦ - (-٣)^{٣}|P| = ٢ - ٢٧ \times ٦ = ٢ - ١٦٢ = ١٥-$

• 2023 دورثاني/ ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ ٢ & ١-س \end{bmatrix}$ منفردة

د/ صفر ، ج/ ٣- ، ب/ ٥ ، أ/ ٦

الحل/ المصفوفة منفردة تعني محددها = صفر $\Leftarrow \begin{vmatrix} ٤ & ٨ \\ ٢ & ١-س \end{vmatrix} = ٠$

$\Leftarrow ٤(١-س) - ٨ \times ٢ = ٠ \Leftarrow \frac{٤(١-س)}{٤} = \frac{١٦}{٤}$

$١-س = ٤ \Leftarrow س = ٤+١ \Leftarrow س = ٥$

أ.مي حواري

• 2024 دور أول/ إذا كانت $\begin{vmatrix} س & ٢ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & س \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$ ، ما قيمة س

أ/ ٢ ب/ -٢ ج/ صفر د/ -١

الحل/ $(س \times ١) - (-١ \times ٢) = (٢ \times -١) - (١ \times س)$

$س - ٢ = -٢ - س$ ، $س + س$ ، $س + س$ ⇐ $٢س + ٢ = -٢$ ⇐ $٢س = -٢ - ٢$

$\frac{٢س}{٢} = \frac{-٤}{٢}$ ⇐ $س = -٢$

• 2024 دور ثاني/ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} س & ١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، أ+ب مصفوفة منفردة

ما قيمة الثابت س

أ/ ٢ ب/ ١ ج/ صفر د/ -١

الحل/ $أ + ب = \begin{bmatrix} ١+س & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ⇐ أ+ب منفردة ⇐ $|أ+ب| = ٠$

أ.مي حواري

$|أ+ب| = \begin{vmatrix} ١+س & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٢(١+س) - (٢ \times ٣) = ٠$

$\frac{٢}{٢}(١+س) = \frac{٦}{٢}$ ⇐ $١+س = ٣$ ⇐ $س = ٣ - ١$

$س = ٢$

• 2024 دور ثالث/ إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} س & -٢ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $|أ| = ٤$ ما قيمة س

أ/ ٣ ب/ -٣ ج/ ٤ د/ -٤

الحل/ $|أ| = (٢ \times س) - (٥ \times -٢)$ ⇐ $٤ = ٢س - ١٠$ ⇐ $٤ = ٢س + ١٠$

$٤ - ١٠ = ٢س$ ⇐ $\frac{-٦}{٢} = \frac{٢س}{٢}$ ⇐ $-٣ = س$

• 2025 القدس الشريف/ إذا كانت $|أ \times ب| = ١٢$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $|أ|$

أ/ ٢ ب/ ٩ ج/ ٦ د/ ٣

الحل/

مهم/ يجب أن يحدد السؤال أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

ملاحظة/ اذا كانت أ، ب مصفوفتان مربعتان من نفس الرتبة فإن $|أ \times ب| = |أ||ب|$

$|ب| = (٣ \times ٢) - (١ \times ٤) = ٦ - ٤ = ٢$

$|أ \times ب| = |أ||ب| = ١٢$ ⇐ $|أ| \times \frac{٢}{٢} = \frac{١٢}{٢}$ ⇐ $|أ| = ٦$

• 2025 بيرزيت/ إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكانت $|٣أ| = ١٨$

ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ |أ| & (س-١) \end{bmatrix}$ منفردة

٥/P

الحل/

$|P3| = |P|^2 3 = |P3| \leftarrow 18 = |P|\frac{9}{9} \leftarrow \frac{18}{9} = |P| \leftarrow 2 = |P|$

$= \therefore$ "لأنها منفردة"

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1-w & |P| \end{vmatrix}$$

$\leftarrow 4(w-1) - |P|8 = \therefore \leftarrow 4(w-1) - 2X8 = \therefore \leftarrow \frac{4}{4}(w-1) = \frac{16}{4}$

$\leftarrow w-1=4 \leftarrow w=4+1=5$

٥/٦ ٥/ب ٣/ز

• القسم الثاني| أجب عن الأسئلة التالية:

• 2020 دور أول/ لتكن $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ \therefore & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \therefore & -1 \\ 4 & \therefore \end{bmatrix}$ ، جد قيمة $|ب P|$

الحل/ أولاً: نجد $ب P$

$$ب P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ \therefore & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \therefore & -1 \\ 4 & \therefore \end{bmatrix}$$

$$ب P \leftarrow \begin{bmatrix} (-1X2)+(2X\therefore)+(3X4) & (-1X1)+(2X-1)+(3X\therefore) \\ (\therefore X2)+(-2X\therefore)+(1X4) & (\therefore X1)+(-2X-1)+(1X\therefore) \end{bmatrix}$$

$$ب P = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$|ب P| = (10X2) - (4X-3) \leftarrow |ب P| = 32$

$= 20 + 12$

• 2021 دور أول/ حل المعادلة المصفوفية $\begin{vmatrix} 4 & \therefore \\ \therefore & 1 \end{vmatrix} w + 2p^2 = 2\left(w + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \right)$

الحل/ $(4X1) - (\therefore X\therefore)w + 2 = \begin{bmatrix} 1 & \therefore \\ \therefore & 1 \end{bmatrix} 2 + 2w$

$$2w + \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -10 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \therefore \\ \therefore & 2 \end{bmatrix} + 4w$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -10 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \therefore \\ \therefore & 2 \end{bmatrix} - 2w$$

$$2w = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -10 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & \therefore \\ \therefore & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} X \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} = w \leftarrow \frac{2w}{2} = w$$

$$\leftarrow w = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

• 2021 دورثاني / أجد قيمة س التي تحقق $\begin{vmatrix} -٣ & ٥ \\ س & -٣ \end{vmatrix} = س$

الحل /

$(-٣ \times -٣) - (٥ \times س) = س \Leftarrow ٦ - ٥س = س \Leftarrow ٦ = س + ٥س$

$٦ = ٦س \Leftarrow س = ١$

• 2021 دورثاني / حل المعادلة المصفوفية : $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} + س = \left(س + \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & ؟ \end{bmatrix} \right) \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$

الحل /

$((١ \times ٥) - (١ \times ٣)) = ٥ - ٣ = ٢$

$\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} + س = \left(س + \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & ؟ \end{bmatrix} \right)$

$\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} + س = ٢س + \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٨ & ؟ \end{bmatrix}$

$س - س \quad س - س$

$س = \begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -٩ & ١ \end{bmatrix} \Leftarrow س = \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٨ & ؟ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

• 2021 دورثالث / إذا كان $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -١٠ & س+ص \\ ٢ & -ع \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٠ & ٣ \\ س & ٦ \end{bmatrix}$

أجد قيمة ص

الحل /

$\begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \cdot ((١ \times ٤) - (٢ \times ٢)) = \begin{bmatrix} ؟ & ٣+س+ص \\ ؟ & ٢+س \end{bmatrix}$

$٤ - ٣ = ؟$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ؟ & ٣+س+ص \\ ؟ & ٢+س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ؟ & ؟ \\ ؟ & ؟ \end{bmatrix}$

$٢+س = ؟ \Leftarrow س = -٢ \quad ٩ \quad ٣+س+ص = ؟ \Leftarrow ٣-٢+ص = ؟ \in ١+ص = :$

$\Leftarrow ص = -١$

• 2023 دورأول / إذا كان $ب = ٤ب$ مصفوفتين عناصر منفردتين من الرتبة الثانية صفر

$|ب| = -٣٢$ ، $|أ ب| = -٨$ أجد قيمة كل مما يلي :

$|أ|$ / $|أ + ٣ب|$ / ١-٩

الحل /

$|ب| = ٤^٢ |أ| = -٣٢ \Leftarrow \frac{١٦}{١٦} |أ| = \frac{-٣٢}{١٦} \Leftarrow |أ| = -٢$

$|أ + ٣ب| = -٢ + ٣^٢ |أ| = -٢ + ٩ \times -٢ = -٢ + -١٨ = -٢٠$

٢/ $|أ \times ب| = -٨ \Leftarrow |أ| \times |ب| = -٨ \Leftarrow |أ| \times \frac{-٢}{-٢} = \frac{-٨}{-٢} \Leftarrow |أ| = ٤$

$|-أ| = (-١)^{٢}|أ| = ١ \times ٤ = ٤$

• 2023 دور ثالث/ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٢س \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، س > ٠ ما قيمة س التي تجعل المصفوفة أ منفردة

الحل/ $|أ| = ٠ \Leftarrow |أ| = س \times س - ٢ \times ٢س$

$٠ = س^{٢} - ٤س$ "اخراج س عامل مشترك"

$٠ = س(س - ٤)$

إما س = ٠ مرفوض ، س > ٠ أو $س - ٤ = ٠ \Leftarrow س = ٤$

• 2024 دور ثاني/ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٠ & س \end{bmatrix}$ ما قيمة/قيم س التي تحقق المعادلة $|أ - ب| = ٠$

الحل/ $أ - ب = \begin{bmatrix} س - ٢ & -٣ \\ ١ & -س \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

$|أ - ب| = -س \times (س - ٢) - (١ \times -٣)$

$٠ = -س^{٢} - س \times -٢ - -٣ \Leftarrow [٠ = -س^{٢} + ٢س + ٣] \times -١$

$\Leftarrow ٠ = س^{٢} - ٢س - ٣$

$٠ = (س + ١)(س - ٣)$

إما $س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$ / أو $س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = ٣$

$\Leftarrow س = \{-١ ، ٣\}$

• 2024 القدس الشريف/ إذا كانت $ب = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -١ & ٣ \end{bmatrix}$ بين أن $ب^{٢}$ مصفوفة منفردة.

الحل/

$ب = \begin{bmatrix} ٢ \times -١ & ٢ \times ٣ \\ ١ \times -١ & ١ \times ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

$ب^{٢}$ منفردة $\Leftarrow |ب^{٢}| = ٠ \Leftarrow |ب \times ب| = ٠ \Leftarrow |ب| \times |ب| = ٠ \Leftarrow |ب|^{٢} = ٠$ المطلوب إثباته

$|ب| = (-٢ \times ٣) - (-١ \times ٦)$

$٠ = ٦ - -٦$

$|ب|^{٢} = (٠)^{٢} = ٠ \Leftarrow ب^{٢}$ منفردة #

• 2024 جنوب نابلس/ حل المعادلة المصفوفية الآتية :

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}_{ص} + س٥ = \left(\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix}^{٢} + ٣س٢ \right)^{٣}$$

$$(١\times٣)-(٤\times٢) = ٣-٨ = ٥$$

الحل/

$$\begin{matrix} س٥ + ص٥ \\ س٥ - ص٥ \end{matrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix}^{٦} + ٦س$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ١٢- & ٣٠ \end{bmatrix} + ٥س = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} ٥$$

$$س٥ = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ١٢- & ٣٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} \Leftarrow س٥ = \begin{bmatrix} ٤- & ١- \\ ١٧ & ٣٠- \end{bmatrix}$$

• 2024 ضواحي القدس/ أوجد قيمة/ قيم الثابت س التي تحقق المعادلة الآتية :

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}^{٣} + س٤ = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٦ & س \end{vmatrix}$$

الحل/ $٣\times(٩-٢)+س٤ = (٣\times٤)-(٦\times١)$

$$س٤ + ٢١ = ١٢ - ٦$$

$$س٤ + ٣- = ٦$$

$$س٤ = ٦ + ٣$$

$$س = \{٣، ٣-\}$$

أ.مي حواري

• 2025 جنوب نابلس/ حد قيمة/ قيم س التي تحقق المعادلة :

$$\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}\times س٣ = ٤ا_{ص}١ - \begin{vmatrix} س & ٠ \\ ٣- & ٤ \end{vmatrix} + س٤$$

الحل/ ملاحظة/ $ا_{ص}١ = ١$ و $٠ = ن$

$$س٤ + (٠ - ٣)(٤س) - ٤ = (٣\times١)-(٥\times٢)\times س٣$$

$$س٤ + (٠ - ٤س) = ٤ - (١٠-٣)س$$

$$س٤ - ٤س = ٤ - ٧س \Leftarrow س٤ + ٣س٣ - ٤ = ٠$$

$$+٧س \quad +٧س$$

$$(س - ١)(س + ٤) = ٠$$

إما $س - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$ / أو $س + ٤ = ٠ \Leftarrow س = ٤-$

$$س = \{١، ٤-\}$$

• خارجي تفوق/ ما حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} \left(\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & ن \end{bmatrix} + ٢س \right) = ٣ \begin{vmatrix} ١ & ن \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} (م_٢ - س)$$

الحل/

$$(٢\times٥ - ٣\times٤) \left(\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & ن \end{bmatrix} + ٢س \right) = ٣ (١\times١ - ن\times٢) (م_٢ - س)$$

$$١٠ - ١٢ = -٢$$

$$\begin{bmatrix} -٢ & -١٠ \\ ٤ & ن \end{bmatrix} - ٤س = ٣م_٢ - ٣س$$

$$+٤س \qquad +٤س$$

$$\begin{bmatrix} -٢ & -١٠ \\ ٤ & ن \end{bmatrix} = ٣ \begin{bmatrix} ١ & ن \\ ن & ١ \end{bmatrix} + س$$

$$\begin{bmatrix} -٢ & -١٠ \\ ٤ & ن \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ن \\ ن & ٣ \end{bmatrix} + س \Leftarrow \begin{bmatrix} -٢ & -١٠ \\ ٤ & ن \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ن \\ ن & ٣ \end{bmatrix} = س$$

$$\Leftarrow س = \begin{bmatrix} -٥ & -١٠ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

لأكون صريحًا معك..

لن يَحمِلَ أحد حِملَك كما أنت، لن يأخذ بِيَدِك مثل يَدَك، لن تُكمل الطّريق وأنت تنتظر، لن يُنجز قائمة مهامك غيرك، قد تجد في المسير مُربّيًا، شيخًا، مُعلّمًا، رفيق درب، لكنّ الغرس الخَفِيّ عليك، والمسؤوليّة لديك، والجهد مطلوب منك،

الدرس الخامس | النظير الضربي للمصفوفة المربعة

القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2008 + 2014 / واحدة فقط من العبارات صحيحة :

أ/ عملية ضرب المصفوفات عملية تبديلية .

ب/ إذا كان أ ، ب مصفوفتين غير صفريتين فإن أ×ب مصفوفة غير صفرية .

ج/ إذا كانت أ مصفوفة منفردة فإن ٢أ مصفوفة منفردة أيضاً

د/ إذا كان أب = ب أ ، فإن أ هي النظير الضربي للمصفوفة ب

الحل/ أ/ ✗ لأن عملية ضرب المصفوفات غير تبديلية

ب/ ✗ ليس شرطاً : إليكم مثال توضيحي

$$\text{أ}\times\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \text{و}$$

لاحظ أن أ ≠ و ، ب ≠ و لكن أ×ب = و

أ.ميّ حواري

ج/ ✓ أ منفردة ⇐ |أ| = ٠ ← رتبة المصفوفة

|٢أ| = ٢^ن |أ| = ٢^ن × ٠ = ٠ ⇐ |٢أ| = ٠ إذن ٢أ منفردة

د/ ✗ لأن اذا كان أب = ب أ = م فإن أ = ب^-١

• 2009 / إذا كانت أ ، ب مصفوفتان ثنائيتان فإن إحدى العبارات التالية صحيحة :

أ/ |أ+ب| = |أ| + |ب|

ب/ عملية ضرب المصفوفات تبديلية

ج/ |أب| = |أ||ب|

د/ إذا كان أ×ب = ب×أ فإن أ هي نظير ب الضربي

الحل/ أ/ ✗ |أ+ب| ≠ |أ| + |ب| "المحددات لا توزع على الجمع والطرح"

ب/ ✗ عملية ضرب المصفوفات غير تبديلية .

ج/ ✓ |أب| = |أ| × |ب|

د/ ✗ لأن أب = ب أ = م ⇐ أ = ب^-١

• 2011 / أ مصفوفة من الرتبة م×ن ، إحدى العبارات الآتية صحيحة دائماً :

أ/ للمصفوفة أ نظير ضربي

ب/ يمكن ايجاد المصفوفة أ×أ

ج/ يمكن تنفيذ العملية ٤+أ

د/ للمصفوفة أ نظير جمعي

الحل/

أ/ ✗ ليكون لـ أ نظير ضربي يجب أن ← |أ| ≠ ٠ ، و ← أ مربعة ⇐ "م = ن"

ب/ ✗ يمكن ايجاد أ×أ اذا كانت أ مربعة ⇐ م = ن

ج/ ✗ ٤+أ "لا يمكن جمع عدد و مصفوفة" .

س/ النظير الجمعي لـ P = -P "أي نضرب المدخلات بسالب فقط" .

• 2017 دورثاني/ إذا كانت P مصفوفة ثنائية ونظيرها $\bar{P}^1$ النظير الضربي للمصفوفة P فإن $P\bar{P}^1$ =

أ/ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} 1 & \text{ش} \\ \text{ش} & 1 \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} 1 & \text{ش} \\ 1 & \text{ش} \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

الحل/ $P \times \bar{P}^1 = \bar{P}^1 \times P = م_2$

• 2019 دورأول/ إذا كانت $\bar{P}^1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ما المصفوفة P

أ/ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 4- \\ 1- & 2 \end{bmatrix}$ ب/ $2\begin{bmatrix} 3 & 4- \\ 1- & 2 \end{bmatrix}$ ج/ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4- \\ 1- & 3 \end{bmatrix}$

د/ $2-\begin{bmatrix} 2 & 1- \\ 4- & 3 \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

الحل/ $|\bar{P}^1| = (3\times2) - (1\times4) = 6-4 = 2$

$P = (\bar{P}^1)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4- \\ 1- & 3 \end{bmatrix}$

• 2019 دورثاني/ ما قيمة الثابت س التي تجعل $\begin{bmatrix} 3-س & 1 \\ 2 & س \end{bmatrix}$ مفردة

أ/ صفر ب/ -2 ج/ 2 د/ 6

الحل/ $\begin{vmatrix} 3-س & 1 \\ 2 & س \end{vmatrix} = \text{ش}$ "لأنها مفردة"

$\text{ش} = (س\times1) - (2\times3-س) \Leftarrow \text{ش} = 6-2س+3س \Leftarrow \text{ش} = 6-3س$

$6 = 3س \Leftarrow س = 2$

• 2019 دورثاني/ إذا كان $م_2 = P \times \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ حيث $م_2$ هي المصفوفة المعايدة

ما المصفوفة P

أ/ $\begin{bmatrix} 7 & 4- \\ 9- & 5 \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} 7- & 4 \\ 9 & 5- \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} 7- & 4- \\ 9- & 5 \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} 5 & 4- \\ 7 & 9- \end{bmatrix}$

س

الحل/ $م_2 = P \times س$ بضرب في سن من اليسار $\Leftarrow P \times س \times س^{-1} = م_2 \times س^{-1}$

$P = م_2 \times س^{-1} \Leftarrow$

"م/ ب × م = ب"

$|P| = (7)(5) - (9)(4) = 35 - 36 = -1$

$P = \frac{1}{|P|} \times \text{adj}\, P = -1 \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

• 2020 دور أول / إذا كانت $ب = 3P^{-1}$ ، ما المصفوفة التي تمثل $P \times ب$

أ/ $\begin{bmatrix} 1 & ث \\ ث & 1 \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} 1 & ث \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ث & 3 \\ 3 & ث \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ ث & 3- \end{bmatrix}$

الحل/ $P \times ب = P \times 3P^{-1}$ نعوض $(ب = 3P^{-1})$

$= 3 \times (P \times P^{-1})$

$= 3 \times م_{ج}$

$= 3 \begin{bmatrix} ث & 1 \\ 1 & ث \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & ث \\ ث & 3 \end{bmatrix}$

• 2020 دور ثاني/ إذا كان $ص = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ وكانت $صتا = \begin{bmatrix} 1 & 4- \\ ج & 1- \end{bmatrix}$ فما قيمة الثابت ج

أ/ 5- ب/ 5 ج/ 1- د/ 1

الحل/ $ص \times صتا = م_{ج} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4- \\ ج & 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ث \\ ث & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} (5 \times 1) + (4 \times ج) & (5 \times 4-) + (4 \times 1-) \\ (1 \times 1) + (1 \times ج) & (1 \times 4-) + (1 \times 1-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ث \\ ث & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} 1 + ج & 5 + 4- \end{matrix}$ $\quad$ $\begin{matrix} 4- + ج & 1- + 4- \end{matrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1- + 4ج \\ ث & 4- + ج \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ث \\ ث & 1 \end{bmatrix}$

$1- + 4ج = ث \Rightarrow \frac{4}{4}ج = \frac{1}{4} \Rightarrow ج = 0$ / $4- + ج = ث \Rightarrow ج = 1 + 4 = 5$

أ.ميّ حواري

• 2021 دور أول/ إذا كانت $ب = \begin{bmatrix} 1 & 1+س2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وما قيمة س التي تجعل المصفوفة ب منفردة

أ/ 2- ب/ $\frac{1}{2}$- ج/ $\frac{1}{2}$ د/ 2

الحل/ $|ب| = 0$ لأنها منفردة

$|ب| = 1 \times 1 - (1+س2) 0 = 0 \Leftarrow \frac{0}{0} = \frac{1}{0} (1+س2) \Leftarrow 1 = 1+س2$

$س2 = 1- \Leftarrow \frac{س2}{2} = \frac{1-}{2} \Leftarrow س = \frac{1-}{2}$

• 2023 دور ثاني / إذا كان $ص = \begin{bmatrix} ج & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ص^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ وكانت المصفوفة الثابتة ج $= م_{ج}$

ب/ ٢- ا/ ١

الحل/ $ص \times ص^{-١} = م \Leftarrow \begin{bmatrix} ج & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ب \\ ج & د \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} (ج \times ٢) + (١ \times ١-) & (ج \times ١-) + (١ \times ١-) \\ (٢ \times ١) + (١ \times ٢-) & (٢ \times ١-) + (١ \times ١-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ب \\ ج & د \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ٢ج - ١ & ١ - ب \\ ج & ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ب \\ ج & د \end{bmatrix}$

$٢ج - ١ = ١ \Leftarrow ٢ج = ١ + ١ \Leftarrow \frac{٢ج}{٢} = \frac{٢}{٢} \Leftarrow ج = ١$

$١ - ب = د \Leftarrow ١ = ب + د \Leftarrow ب = ١$

• 2024 دور أول/ إذا كانت P مصفوفة من أي رتبة فأيد العملية المعرفة دائماً :

ا/ $P^{-١}$ ب/ $P + P^{م}$ ج/ $P + P$ د/ $P \times P$

الحل/ ج $P \times P$ معرفة إذا وفقط إذا كانت P مربعة ← عدد صفوف P = عدد أعمدتها "

ب/ $P + P^{م}$ تكون معرفة إذا كان رتبة P = رتبة م فقط .

ج/ ✓ $P + P$ معرفة دائماً لأنها متشابهة في الرتب.

د/ ✗ $P^{-١}$ معرفة عندما P مربعة ← و $|P| \neq ٠$

أ.مي حواري

• 2025 دور أول/ ما المصفوفة التي ليس لها نظير ضربي :

ا/ $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ ب/ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$ ج/ $\begin{bmatrix} ٨ & ٢- \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$ د/ $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

الحل/ ليس لها نظير ضربي ← منفردة ← محددها = صفر

ا/ المحدد = $٣ \times ٤ - ٦ \times ٢ = ١٢ - ١٢ = ٠$ ✓ ليس لها نظير ضربي

ب/ المحدد = $(١ \times ٢) - (١- \times ٢) = ٢ - ٢- = ٤$ ✗ لها نظير ضربي .

ج/ المحدد = $(٨ \times ٢-) - (٤ \times ٢-) = ١٦- - ٨- = ٨$ ✗ لها نظير ضربي

د/ المحدد = $(٤ \times ١) - (٢ \times ٥) = ٤ - ١٠ = ٦-$ ✗ لها نظير ضربي

• 2025 دور أول/ إذا كانت P مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكانت $|P^{-١} \times P|$

ا/ ١ ب/ $\frac{١}{٢}$ ج/ ١- د/ ٤

الحل/ $|P^{-١} \times P| = |ص| = ١$

" لا تبحث عن الراحة وأنت بعمر السعي "

• 2025 دورتان/ إذا كانت P، Q مصفوفتان من نفس الرتبة ومدخلاتها المتناظرة متساوية
ما العبارة الصحيحة دائماً مما يلي
أ/ $P^{-1} = Q^{-1}$ ب/ $P = Q^{-1}$ ج/ $P = -Q$ د/ $P = Q$
الحل/ بما أن P و Q من نفس الرتبة ومدخلاتها المتناظرة متساوية إذن $P = Q$

• 2024 رام الله/ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times (M_2)^{-1}$ ، ما قيمة P_{12}
أ/ صفر ب/ 2 ج/ -3 د/ 3
الحل/ $(M_2)^{-1} = M_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ (3) & -1 \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = P \Leftarrow$$

∴ M مصفوفة جزئية

P_{12} تقع في الصف الثاني والعمود الأول $\Leftarrow P_{12} = 3$

• القسم الثاني/ أجب عن الأسئلة الآتية

• 2009/ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ جد المصفوفة $(2P)^{-1}$

الحل/ $(kP)^{-1} = \frac{1}{k}(P^{-1})$ حيث $k \neq 0$ و P مصفوفة جزئية مفردة ومربعة.

$$|P| = (2 \times 3) - (-1 \times 1) = 6 + 1 = 7$$

$$P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(2P)^{-1} = \frac{1}{2} P^{-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Leftarrow (2P)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

• 2016/ اذا كان $P = \begin{bmatrix} 1 & ن \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ و $Q = \begin{bmatrix} 2 & ن \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ و جد PQ^{-1}

أ.مي حواري

الحل/

$$|P| = (6 \times ن) - (-3 \times ن) = 3 ن$$

$$3 ن = 3 \Leftarrow ن = 1$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$PQ^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (6 \times 2) + (-1 \times -2) & (6 \times 1) + (-1 \times -1) \\ (1 \times 2) + (3 \times -2) & (1 \times 1) + (3 \times -1) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}12 & 12\\ 4 & 3\end{bmatrix}\Leftarrow \bar{P}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -4\\ \frac{2}{3} & -4\end{bmatrix}$$

• 2016 الكمال/ إذا كان $P=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -4 & 3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4 & -6\\ -4 & 1\end{bmatrix}$ جد:

الحل/ $P-3B$ $\quad$ $P-3B=P-B-2B$

$$\begin{bmatrix}5 & -4\\ -4 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -6\\ -4 & 1\end{bmatrix}-2B$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}-2B$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4 & -6\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & -12\\ -8 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-7 & 10\\ 8 & 0\end{bmatrix}$$

أ.مي حواري

$$|B|=(4\times -6)-(-4\times 1)=-24+4=-20$$

$$B^{-1}=\frac{1}{-20}\begin{bmatrix}1 & 6\\ 4 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow C^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{20} & -\frac{3}{10}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

• 2020 دور ثالث/ إذا كانت المصفوفة ص من الرتبة 2×2 بحيث

$$ص-\begin{bmatrix}أ & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=2م_2$$ و جد $ص^{-1}$

الحل/ $\quad ص-2ص=\begin{bmatrix}أ & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}أ & 1\\ 1 & أ\end{bmatrix}2=\begin{bmatrix}أ & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}-ص$$

$$ص=\begin{bmatrix}أ & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}أ & 2\\ 2 & أ\end{bmatrix}\Leftarrow ص=\begin{bmatrix}أ & 3\\ 7 & -2\end{bmatrix}$$

$$|ص|=(أ\times -2)-(7\times 3)=-2أ-21$$

$$ص^{-1}=\frac{1}{-2أ-21}\begin{bmatrix}أ & 7\\ 3 & 2\end{bmatrix}\Leftarrow ص^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{أ}{2أ+21} & -\frac{7}{2أ+21}\\ -\frac{3}{2أ+21} & -\frac{2}{2أ+21}\end{bmatrix}$$

• 2021 دور أول/ إذا كانت المصفوفتان P، ب مصفوفتان مربعتان من الرتبة الثانية حيث $P^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ ، جـ $= ب + 2P$

الحل/

$|P^{-1}| = (-4 \times 2) - (-3 \times 4) = -8 + 12 = 4$

$P = (P^{-1})^{-1} = \frac{1}{|P^{-1}|} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

$2P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

المطلوب/ $ب + 2P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \end{bmatrix}$

• 2021 دور ثاني/ إذا كان $P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & جـ \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ وكان $|P| = -1$ ، فما قيمة الثابت جـ

الحل/ ملاحظة/ $|P| \times |P^{-1}| = 1$

$|P^{-1}| = (3 \times 3) - (-5 \times جـ) = 9 + 5جـ$

$|P| \times |P^{-1}| = 1 \Leftarrow -1 \times (9 + 5جـ) = 1 \Leftarrow -9 - 5جـ = 1$

$-5جـ = 10 \Leftarrow -9 - 1 = 5جـ \Leftarrow جـ = -2$

• 2021 دور ثاني/ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & ن \end{bmatrix}$ حيث

أ/ $P \cdot ب$ ب/ (P^{-1}) إن أمكن

الحل/ أ/ $P \times ب = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & ن \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

$P \times ب = \begin{bmatrix} (3 \times 2) + (4 \times -1) & (3 \times 5) + (4 \times ن) \\ (2 \times 2) + (1 \times -1) & (2 \times 5) + (1 \times ن) \end{bmatrix}$

$P \times ب = \begin{bmatrix} 2 & 15 + 4ن \\ 3 & 10 + ن \end{bmatrix}$

ب/ $|P| = (3 \times 1) - (2 \times 4) = 3 - 8 = -5$

$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Leftarrow (P^{-1}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$ إن أمكنه

• 2022 دور أول/ إذا كانت $P=\begin{bmatrix} س & -٣ \\ ٦- & ١-س \end{bmatrix}$ ، $ب=\begin{bmatrix} -٣ & -١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد :

١/ قيمة/ قيم س التي تجعل المصفوفة P مصفوفة منفردة

٢/ المصفوفة $ب^{-١}$

الحل/ ١/ P منفردة $\Leftarrow$ $|P|=٠$ $\Leftarrow$ $س(١-س)-(-٦\times-٣)=٠$

$س^{٢}-س-١٢=٠$ $\Leftarrow$ $(س+٣)(س-٤)=٠$

إما $س+٣=٠$ $\Leftarrow$ $س=-٣$

أو $س-٤=٠$ $\Leftarrow$ $س=٤$ $\Leftarrow$ $س=\{-٣، ٤\}$

٢/ $ب^{-١}=\frac{١}{|ب|}\times$ مصفوفة المرافقات

$|ب|=(-٢\times٥)-(-١\times٣)=-١٠+٣=-٧$

مصفوفة المرافقات $=\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ب^{-١}=-\frac{١}{٧}\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

• 2022 دور أول/ إذا كانت $س=\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكانت $ص=\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد

١/ $س-س ص$

٢/ $ص^{-١}$

الحل/ ١/ $س ص \times س$

$=\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow س ص \times س=\begin{bmatrix} (١\times-١)+(-١\times٣) & (٢\times-١)+(-١\times-١) \\ (٣\times-١)+(٤\times٣) & (٣\times-١)+(٤\times-١) \\ (٢\times-١)+(٥\times٣) & (٢\times-١)+(٥\times-١) \end{bmatrix}$

$\Leftarrow س ص \times س=\begin{bmatrix} -٤ & -١ \\ ٩ & -٧ \\ ١٣ & -٧ \end{bmatrix}$

$س-س ص=\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٧ & ١٥ \\ -٧ & ١٧ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١١ & -١٢ \\ ١٢ & -١٥ \end{bmatrix}$

٣/ |أ| = (١×١-) - (٣-×١-) = -١-٣ = -٤

$أ^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow أ^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

• 2022 دورثاني/ $P = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$ ، $ج = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 30 & 7 \end{bmatrix}$

جد/ ١/ (P ب) ج

٢/ $(P^{-1})^{-1}$ إن أمكن

الحل/

١/ $P ب ج = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times2)+(10\times-5) & (1\times-2)+(10\times10) \\ (1\times2)+(5\times-5) & (1\times-2)+(5\times10) \end{bmatrix}$

$P ب ج = \begin{bmatrix} ن & ن \\ ن & ن \end{bmatrix} = د$

$د ج = \begin{bmatrix} ن & ن \\ ن & ن \end{bmatrix}_{2\times2} = (P ب ج) \times د$

٢/ $(P^{-1})^{-1}$ إن أمكن

$|P| = (1\times10) - (2\times5) = 10 - 10 = 0$ ← (صفر) منفردة ليس لها نظير ضربي

• 2023 دورأول/ إذا كان $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ ، جد:

١/ $|P+ب|$ ٢/ $3ب^{-1}$

الحل/ ١/ $P+ب = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$

$|P+ب| = (6\times10) - (10\times3) = 60 - 30$

$|P+ب| = 30 \leftarrow$

أ.مي حواري

٢/ $|ب| = (5\times7) - (8\times4) = 35 - 32 = 3+$

$3ب^{-1} = 3 \times \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \leftarrow 3ب^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

• 2023 دورثالث/ إذا كان $ب = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & ن \end{bmatrix}$ ، $P = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، أجد

١/ $8ب^{-1}$ ٢/ $P + (P\cdot ب) P$

الحل/ ١/ $|ب| = (ن\times-1) - (4\times3) = -ن - 12 = 8$

$$\text{ن}^{-1} = \frac{1}{\text{ن}^2 - 4} \begin{bmatrix} \text{ن} & -4 \\ -2 & \text{ن} \end{bmatrix} \Leftarrow \text{ن}^{-1} = \frac{1}{\text{ن}^2 - 4} \begin{bmatrix} \text{ن} & -4 \\ -2 & \text{ن} \end{bmatrix}$$

$$\text{ن}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & \text{ن} \end{bmatrix} \Leftarrow 8\text{ن}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & \text{ن} \end{bmatrix}$$

$$\text{ن}^{-1} = \frac{1}{\text{ن}^2 - 4} \begin{bmatrix} \text{ن} & -4 \\ -2 & \text{ن} \end{bmatrix} \Leftarrow \text{ن}^{-1} = \frac{1}{\text{ن}^2 - 4} \begin{bmatrix} \text{ن} & -4 \\ -2 & \text{ن} \end{bmatrix}$$

$$\text{ن}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & \text{ن} \end{bmatrix} \Leftarrow 8\text{ن}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\

الحل/ أ| P| = (٣×٢) - (٤-×١) = ٦ + ٤ = ١٠

ب| = (٢×١) - (٤-×١-) = ٢ - ٤ = ٢-

أ| ب| = |P| × |ب| = ١٠ × ٢- = ٢٠-

ب) P^{-1} = $\frac{1}{|P|}$ $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ = $\frac{1}{١٠}$ $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} \frac{٢}{٥} & \frac{٣}{١٠} \\ \frac{-١}{١٠} & \frac{١}{٥} \end{bmatrix}$

• 2024 دور ثاني/ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} ٢- \\ ١ \end{bmatrix}$ و $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}$ فأجد:

أ) $ب^{-1}$ ب) $ب^{-1} + P$

الحل/ أ) |ب| = (٣-×١) - (١-×٢) = ٣- + ٢ = ١-

$ب^{-1} = \frac{1}{-١}$ $\begin{bmatrix} ٢- & ٣- \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$ ← $ب^{-1} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$

ب) $ب^{-1} + P$ غير معرفة لأن رتبة P (٢×١) ≠ رتبة $ب^{-1}$ (٢×٢)

• 2025 دور أول/ اذا كانت المصفوفة $P = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ فأجد

أ) |P^{-1}| ب) P^{-1}

الحل/ أ) |P| = (٣×١) - (٢×١) = ٣ - ٢ = ١

|P^{-1}| = $\frac{1}{|P|}$ = $\frac{1}{١}$ = ١

ب) P^{-1} = $\frac{1}{١}$ $\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ ← $P^{-1} = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

• 2025 شمال الخليل/ إذا كان $ست^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة $(س + ص)^{٢}$

الحل/ |ست^-١| = (٣×٢) - (١×٥) = ٦ - ٥ = ١

$(ست^{-1})^{-1} = س = \frac{1}{١}$ $\begin{bmatrix} ٢ & ٥- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$

$(س + ص) = \begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٥- & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ب & ١ \\ ١ & ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ب \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix}$

$(س + ص)^{٢} = (س + ص)(س + ص) = \begin{bmatrix} ٣ & ب \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ب \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix}$

$(س + ص)^{٢} = \begin{bmatrix} (٣ \times ٣) + (ب \times ٤-) & (٣ \times ب) + (ب \times ٢) \\ (٤- \times ٣) + (٢ \times ٤-) & (٤- \times ب) + (٢ \times ٢) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣- & ٦ \\ ٢٢ & ٨- \end{bmatrix}$

• القدس الشريف/ 2025

$\bar{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ ، $\bar{Q} = \begin{bmatrix} 3 & -3s+2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $|\bar{A}| = 11$

$\bar{P}^{-1} - 5\bar{P}^{c}$ / 2 صد مايلي s / 1

الحل / $|\bar{A}| = 1 \times (-3s+2) - 2 \times 3^{c} = 11$

$11 = -(-3s+2) - 6 \Leftarrow 17 = (-3s+2) \Leftarrow -1 \times$

$-3s+2 = -17 \Leftarrow -3s = -19 \Leftarrow \frac{-3s}{3} = \frac{-15}{3} \Leftarrow s = 5$

/ 2 $|\bar{P}^{-1}| = (3 \times 2) - (-5 \times -1) = 6 - 5 = 1$

$(\bar{P}^{-1})^{-1} = \bar{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$\bar{P}^{c} = \bar{P} \times \bar{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$\bar{P}^{c} = \begin{bmatrix} (1 \times 1) + (2 \times 3) & (1 \times 2) + (2 \times 5) \\ (3 \times 1) + (5 \times 3) & (3 \times 2) + (5 \times 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{bmatrix}$

$\bar{P}^{c} - 5\bar{P} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$

$\bar{P}^{c} - 5\bar{P} = 2\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7.5 & 13 \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7.5 & 13 \end{bmatrix} = \bar{P}^{c} - 5\bar{P}$

• أريحا/ 2025 إذا كانت $\bar{ص}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & ث \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ، أجد المصفوفة س ص

$3(س - ص) = س - م$

الحل/ $|\bar{ص}^{-1}| = (1 \times -2) - (ث \times 3) = -3 - 3ث = 3$

$(\bar{ص}^{-1})^{-1} = \bar{ص} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 3ث \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $3 \times$

$3\bar{ص} = \begin{bmatrix} 2 & 3ث \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftarrow$

$* \; 3(س - ص) = س - م \Leftarrow 3س - 3ص = س - م \Leftarrow م - س = 3ص - 3س$

$م - س = 3ص - 3س \Leftarrow س - ص = 3ص - 3س \Leftarrow$

$\frac{1}{2} \times \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2ث & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3ث \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2س \right) \Leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3ث \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2س \Leftarrow$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = س \Leftarrow$

• خارجي/ إذا كان $\bar{P}^{1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & ن \end{bmatrix}$ ، حل المعادلة المصفوفية التالية

$\bar{P}^{1}2س + ب = 3س + س$

الحل $\bar{P}^{1}2س - 3س = س - ب \Leftarrow \bar{P}^{1}2س + ب = 3س + س$

$س2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & ن \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \Leftarrow$

$س2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & ن \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \Leftarrow \frac{س2}{2} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} -1 & ن \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = س$

$س = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & ن \\ -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix} \Leftarrow$

• خارجي تفوق/ إذا كان $\bar{P}^{1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ، ما حل المعادلة المصفوفية

الحل $\bar{P}^{1} \times (م^{2} + 3س) = ب$

$ب = 3س \times \bar{P}^{1} \times م^{2} + \bar{P}^{1} \times م^{2} \Leftarrow ب = (3س + م^{2})\bar{P}^{1}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \bar{P}^{1} - ب = س \Leftarrow ب = س + \bar{P}^{1} \Leftarrow$

$س = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -7 & ن \end{bmatrix} \Leftarrow$

أ.ميّ حواري

يا فَتىٰ

جُرحك لا يُنسيك جراح أُمّتك، وآلامُ اليوم تصنع فُتوح الغد! وشِدّة اللّحظة تُولّد حركةً دائمة، فقُم لله، وابعَث في صدرك ألف أمَـلٍ وعمل، فما كانت جراح الفرد أشَدّ من جراح الجَمع، ولا الهَمّ يُطفئ الهِمّـة! ..

الدرس السادس | حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام كريمر

القسم الأول اختر الإجابة الصحيحة

• 2019 دور ثالث/ عند حل نظام من معادلتين خطيتين نتج أن: ص = ٣ ، |أس| = ٣ ، |أص| = -٦ ما قيمة س:

أ/ -٣ ب/ $\frac{-٢}{٣}$ جـ/ $\frac{-٣}{٢}$ د/ ٣

الحل/ ص = $\frac{|أص|}{|أ|}$ ⇐ ٣ = $\frac{-٦}{|أ|}$ ⇐ $\frac{٣|أ|}{٣}$ = $\frac{-٦}{٣}$ ⇐ |أ| = -٢

س = $\frac{|أس|}{|أ|}$ = $\frac{٣}{-٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$

• 2020 دور أول/ إذا كانت |أس| = $\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix}$ ، |أص| = $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ ، ما قيمة |أ|

أ/ -٣ ب/ -٥ جـ/ -١٢ د/ -١

الحل/ لكتابة |أ| نلغي العمود المشترك في أس ، أص .

⇐ |أ| = $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ = (٢×٧) - (٣×٥) = ١٤ - ١٥ = -١

• 2020 دور ثاني/ عند حل نظام من معادلتين خطيتين نتج أن: ص = ٢ ، |أس| = ٣ ، |أص| = -٦ ما قيمة س

أ/ -٣ ب/ ٣ جـ/ ١ د/ -١

الحل/ ص = $\frac{|أص|}{|أ|}$ ⇐ ٢ = $\frac{-٦}{|أ|}$ ⇐ $\frac{٢|أ|}{٢}$ = $\frac{-٦}{٢}$ ⇐ |أ| = -٣

س = $\frac{|أس|}{|أ|}$ = $\frac{٣}{-٣}$ = -١

• 2025 دور أول/ عند حل نظام من معادلتين خطيتين نتج أن: ص = ٢ ، |أس| = -٥ ، |أص| = ١٠ ما قيمة س

أ/ -٥ ب/ -٢ جـ/ ١ د/ -١

الحل/ ص = $\frac{|أص|}{|أ|}$ ⇐ ٢ = $\frac{١٠}{|أ|}$ ⇐ $\frac{٢|أ|}{٢}$ = $\frac{١٠}{٢}$ ⇐ |أ| = ٥

س = $\frac{|أس|}{|أ|}$ = $\frac{-٥}{٥}$ = -١

أ.مي حواري

• 2025 جنوب نابلس/ إذا كانت أ مصفوفة ثنائية غير منفردة وكانت |أس| + ٢|أ| = ٠ ما قيمة المتغير

أ/ ٢ ب/ -١ جـ/ ١ د/ -٢

الحل/ $\frac{|أس|}{|أ|}$ + $\frac{٢|أ|}{|أ|}$ = ٠ نقسم المعادلة على |أ| ، |أ| ≠ ٠

س + ٢ = ٠ ⇐ س = -٢

• القسم الثاني| أجب عن الأسئلة الآتية :

• 2013/ كند حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين بطريقة كريمر 6 وجد أن
س = -٣ |Δس| = ٤ |Δص| = -٦ ما قيمة المتغير ص

الحل $س = \frac{|\Delta س|}{|\Delta|} \Leftarrow -٣ = \frac{٤}{|\Delta|} \Leftarrow |\Delta| = \frac{٤}{-٣} \Leftarrow |\Delta| = -٣$

$ص = \frac{|\Delta ص|}{|\Delta|} = \frac{-٦}{-٣} = ٣ \Leftarrow ص = ٣$

• 2019 دور أول/ استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتية :
٢س - ١ص = ٦ ، س - ٢ص = -٤

الحل أولاً : نرتب المعادلات :
٢س - ١ص = ٦ ⇐ ٢س - ص = ١
س - ٢ص = -٤ نحولها لمعادلة مصفوفية

أ.مي حواري

$$\begin{bmatrix} ١ \\ -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}}_{P}$$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٢ & ١ \end{vmatrix} = (٢ \times ١) - (-٢ \times ٢) = ٢ - ٤ = -٢$$

$$|\Delta س| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ -٤ & ١ \end{vmatrix} = (١ \times ١) - (-٤ \times -١) = ١ - ٤ = -٣$$

$$|\Delta ص| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -٢ & -٤ \end{vmatrix} = (٢ \times -٤) - (-٢ \times ١) = -٨ + ٢ = -٦$$

$$س = \frac{|\Delta س|}{|\Delta|} = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢} \quad ، \quad ص = \frac{|\Delta ص|}{|\Delta|} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$$

حل النظام (س ، ص) = {(٣/٢ ، ٣)}

• 2019 دور ثاني/ استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي :
٥س + ص = ٨ ، ص = ٢س + ١

الحل ٥س + ص = ٨ ⇐ ص = ٨ - ٥س
٢س + ١ = ص ⇐ ٢س - ص = -١

$$\begin{bmatrix} ٨ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}}_{P}$$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = (١ \times -٢) - (١ \times ٥) = -٢ - ٥ = -٧$$

$|\Delta س| = \begin{vmatrix} ١ & ٨ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = (١\times١) - (١\times٨) = ١ - ٨ = -٧$

$|\Delta ص| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = (١\times-٢) - (١\times٥) = -٢ - ٥ = -٧$

$س = \frac{|\Delta س|}{|\Delta|} = \frac{-٧}{-٧} = ١$ ، $ص = \frac{|\Delta ص|}{|\Delta|} = \frac{-٧}{-٧} = ١$ ← $(س، ص) = \{(١،١)\}$

• 2020 دورثاني/ استخدم قاعدة كريمر في حل نظام المعادلات الآتية :

$٣س + ص = -٣$ ، $٢ص = ٤ - س$

الحل/ $٣س + ص = -٣$

$س + ٢ص = ٤$ ← $س = ٤ - ٢ص$

$\begin{bmatrix} -٣ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}}_{P}$

أ.مي حواري

$|\Delta| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = (١\times١) - (٢\times٣) = ١ - ٦ = -٥$

$|\Delta س| = \begin{vmatrix} -٣ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = (-٣\times١) - (٤\times٣) = -١٢ - ٣ = -١٥$

$|\Delta ص| = \begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = (١\times٤) - (٢\times-٣) = ٤ + ٦ = ١٠$

$س = \frac{|\Delta س|}{|\Delta|} = \frac{-١٥}{-٥} = ٣$ ، $ص = \frac{|\Delta ص|}{|\Delta|} = \frac{١٠}{-٥} = -٢$ ← $(س، ص) = (٣، -٢)$

• 2020 دورثالث/ استخدم طريقة كريمر في حل نظام المعادلات الآتية :

$س = ٣ص$ ، $س - ص = ٤$

الحل/ $س = ٣ص$ ← $س - ٣ص = ٠$

$س - ص = ٤$

$\begin{bmatrix} ٤ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}}_{P}$

$|\Delta| = \begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = (١\times-١) - (١\times-٣) = -١ + ٣ = ٢$

$|P_{س}| = \begin{vmatrix} ن & -٣ \\ ٤ & -١ \end{vmatrix} = (ن \times -١) - (٤ \times -٣) = -ن + ١٢ = ١٢ \Leftarrow ن = ٠$

$|P_{ص}| = \begin{vmatrix} ١ & ن \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = (٤ \times ١) - (ن \times ١) = ٤ - ن = ٤ \Leftarrow ن = ٠$

$س = \frac{|P_{س}|}{|P|} = \frac{١٢}{٢} = ٦$ ، $ص = \frac{|P_{ص}|}{|P|} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ← حل النظام $(س، ص) = \{(٦، ٢)\}$

- 2021 دور أول/ استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتية :

$س + ص = ١٢$ ، $٣س - ٤ص = ٨$

الحل/ $س + ص = ١٢ \Leftarrow ص = ١٢ - س$

$٣س - ٤ص = ٨$

$\begin{bmatrix} ١٢ \\ ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}}_{|P|}$

أ.مي حواري

$|P| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -٤ & ٣ \end{vmatrix} = (١ \times ٣) - (-٤ \times ١) = ٣ + ٤ = ٧$

$|P_{س}| = \begin{vmatrix} ١٢ & ١ \\ ٨ & ٣ \end{vmatrix} = (١٢ \times ٣) - (٨ \times ١) = ٣٦ - ٨ = ٢٨$

$|P_{ص}| = \begin{vmatrix} ١ & ١٢ \\ -٤ & ٨ \end{vmatrix} = (١ \times ٨) - (-٤ \times ١٢) = ٨ + ٤٨ = ٥٦$

$س = \frac{|P_{س}|}{|P|} = \frac{٢٨}{٧} = ٤$ ، $ص = \frac{|P_{ص}|}{|P|} = \frac{٥٦}{٧} = ٨$ ← حل النظام $(س، ص) = \{(٤، ٨)\}$

- 2021 دور ثاني/ كيف حل نظام باستخدام قاعدة كريمر من معادلتين خطيتين وُجد أن :

$|P_{س}| = \begin{bmatrix} ١٨ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $|P_{ص}| = \begin{bmatrix} -٤ & ١٨ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، وما قيمة كل من $س$ ، $ص$.

الحل/ P تنتج عند نفي العمود المشترك في $|P_{س}|$ و $|P_{ص}|$

$|P| = \begin{vmatrix} -٤ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = (-٤ \times ٢) - (١ \times ٣) = -٨ - ٣ = -١١$ ←

$|P_{س}| = \begin{vmatrix} -٤ & ١٨ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = (-٤ \times ١) - (١ \times ١٨) = -٤ - ١٨ = -٢٢$

$|P_{ص}| = \begin{vmatrix} ١٨ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = (١٨ \times ٢) - (١ \times ٣) = ٣٦ - ٣ = ٣٣$

$س = \frac{|P_{س}|}{|P|} = \frac{-٢٢}{-١١} = ٢$ ، $ص = \frac{|P_{ص}|}{|P|} = \frac{٣٣}{-١١} = -٣$ ← $(س، ص) = \{(٢، -٣)\}$

• 2021 دور ثالث/ كيف تحل نظام المعادلات م س - ص = ٧ ، ب س + ٢ ص = ١ باستخدام كريمر
وجد أن م ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة كل من س ، ص .

أ.مي حواري

الحل/ م س - ص = ٧
ب س + ٢ ص = ١

$$\begin{bmatrix} ٧ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} م & ١- \\ ب & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} د & ج \\ أ & ب \end{bmatrix} = ω د م \Leftarrow د = ٢ ، ج = ٢ ، أ = ١ ، ب = ١$$

$$|ω د م| = (٢ \times ١) - (١ \times ٢) = ٢ - ٢ = ٠$$

$$|ا| = \begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = (٢ \times ٢) - (١ \times ١-) = ٤ - ١- = ٥$$

$$|ا ω| = \begin{vmatrix} ١- & ٧ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = (٨ \times ٢) - (١ \times ١-) = ١٤ - ١- = ١٥$$

$$س = \frac{|ا|}{|ا|} = \frac{٥}{٠} = \text{غ م} \quad / \quad ص = \frac{|ا ω|}{|ا|} = \frac{١٥}{٠} = -١ \Leftarrow (٣ ، -١) = (ص ، س)$$

• 2022 دور أول/ استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتية :
٢ ص - ٣ س + ١ = ٧- ، ص = س $\frac{١}{٢}$ -

الحل/ [ص = س $\frac{١}{٢}$ -] × ٢- ، " للتخلص من الكسر "

(١) ← س = ٢ ص ← ب = س + ٢ ص

(٢) ← ٢ ص - ٣ س + ١ = ٧- ← ٢ ص - ٣ س + ٨- = ب

$$\begin{bmatrix} ب \\ ٨- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$$

م

$$|ا| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٣- \end{vmatrix} = (٢ \times ٣-) - (٢ \times ١) = ٨- \xrightarrow{+} ٨$$

$$|ا س| = \begin{vmatrix} ب & ١ \\ ٨- & ٣- \end{vmatrix} = (٨- \times ١-) - (٣- \times ب) = ٨ - ٣ ب \xrightarrow{+} ١٦$$

$$|ا ص| = \begin{vmatrix} ٢ & ب \\ ٢ & ٨- \end{vmatrix} = (٨- \times ٢) - (ب \times ٢) = ١٦ - ٢ ب \xrightarrow{+} ١٦$$

$$س = \frac{|ا س|}{|ا|} = \frac{١٦}{٨} \Leftarrow س = ٢$$

$$ص = \frac{|ا ص|}{|ا|} = \frac{٨-}{٨} \Leftarrow ص = ١-$$

• 2022 دور أول/ استخدم قاعدة كريمر لحل المعادلة المصفوفية الآتية

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

الحل/

$$|P| = \begin{vmatrix} -٣ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = (١ \times ٣) - (-٣ \times ٣) = ٣ - (-٩) = ١٢$$

$$|P_س| = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = (٥ \times ١) - (-٣ \times ٥) = ٥ + ١٥ = ٢٠$$

$$|P_ص| = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = (٣ \times ٥) - (٣ \times ٥) = ١٥ - ١٥ = ٠$$

$$س = \frac{|P_س|}{|P|} = \frac{٢٠}{١٢} = \frac{٥}{٣} \quad / \quad ص = \frac{|P_ص|}{|P|} = \frac{٠}{١٢} = ٠ \Leftarrow (س، ص) = (\frac{٥}{٣}، ٠)$$

• 2023 دور أول/ استخدم قاعدة كريمر في حل نظام المعادلات الآتية:

$$٣س - ٤ص = ٨ \quad ، \quad ٥س - ٦ص = ١٢$$

الحل/

$$٥س - ٦ص = ١٢ \Leftarrow ٥س - ٧ص = ١٢ \quad \text{---} (١)$$

$$٣س - ٤ص = ٨ \Leftarrow ٥س - ٤ص + ٣س = ٨ \quad \text{---} (٢)$$

$$\Leftarrow ٣س - ٤ص = ٨ \quad \text{---} (٢)$$

$$\begin{bmatrix} ١٢ \\ ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ٧ & -٥ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}}_{P}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} ٧ & -٥ \\ -٤ & ٣ \end{vmatrix} = (٣ \times ٧) - (-٤ \times ٥) = ٢١ - ٢٠ = ١$$

$$|P_س| = \begin{vmatrix} ١٢ & -٥ \\ ٨ & ٣ \end{vmatrix} = (٣ \times ١٢) - (-٥ \times ٨) = ٣٦ - ٤٠ = -٤$$

$$|P_ص| = \begin{vmatrix} ٧ & ١٢ \\ -٤ & ٨ \end{vmatrix} = (٨ \times ٧) - (-٤ \times ١٢) = ٥٦ - ٤٨ = ١٠٤$$

$$س = \frac{|P_س|}{|P|} = \frac{-٤}{١} = -٤ \quad / \quad ص = \frac{|P_ص|}{|P|} = \frac{١٠٤}{١} = ١٠٤ \Leftarrow (س، ص) = (-٤، ١٠٤)$$

• 2023 دور ثاني/ استخدم قاعدة كريمر في حل نظام المعادلات الآتي:

$$٢س + ٣ص = ٣ \quad ، \quad ٥س - ص = -١$$

الحل/

$$\begin{bmatrix} ٣ \\ -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}}_{P}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix} = (٥ \times ٣) - (-١ \times ٢) = ١٥ + ٢ = ١٧$$

$$|P_س| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix} = (٥ \times ٣) - (-١ \times ٢) = ١٥ + ٢ = ١٧$$

$$|P_ص| = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ -١ & -١ \end{vmatrix} = (-١ \times ٣) - (-١ \times ٣) = -٣ + ٣ = ٠$$

$$س = \frac{|P_س|}{|P|} = \frac{١٧}{١٧} = ١ \quad / \quad ص = \frac{|P_ص|}{|P|} = \frac{٠}{١٧} = ٠ \Leftarrow (س، ص) = (١، ٠)$$

أ.مي حواري

$|P| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ٥ \end{vmatrix} = (٥\times٣) - (١-\times٢) = ١٥ - ٢- = ١٧-$

$|P_س| = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ١- & ١- \end{vmatrix} = (١-\times٣) - (١-\times٣) = ٣ \overset{+}{\ominus} ٣ = ٠$ ∴

$|P_ص| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ٥ \end{vmatrix} = (٣\times٥) - (١-\times٢) = ١٥ + ٢ = ١٧$

$س = \frac{|P_س|}{|P|} = \frac{٠}{١٧-} = ٠$ / $ص = \frac{|P_ص|}{|P|} = \frac{١٧-}{١٧-} = ١$ ← $(س، ص) = (٠، ١)$

• 2023 دور ثالث/ استخدم قاعدة كريمر في حل نظام المعادلات الآتية:

$س + ص = ١$ ، $٢س + ص = ١٠$

الحل/

$\begin{bmatrix} ١ \\ ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}}_{P}$

$|P| = \begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = (١\times٢) - (١-\times١) = ٢ - ١- = ٣$

$|P_س| = \begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ١٠ & ٢ \end{vmatrix} = (١\times٢) - (١-\times١٠) = ٢ - ١٠- = ١٢$

$|P_ص| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١٠ \end{vmatrix} = (١\times١٠) - (١\times١) = ١٠ - ١ = ٩$

$س = \frac{|P_س|}{|P|} = \frac{١٢}{٣} = ٤$ / $ص = \frac{|P_ص|}{|P|} = \frac{٩}{٣-} = ٣-$ ← $(س، ص) = (٤، ٣-)$

• 2024 دور أول/ حل نظام المعادلات التالية بواسطة كريمر:

$٣س - ٣ص = ٣$ ، $س + ص = ٤$

الحل/

$\begin{bmatrix} ٣ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ١ & ١ \end{bmatrix}}_{P}$

$|P| = \begin{vmatrix} ٣ & ٣- \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = (١\times٣) - (١\times٣-) = ٣ \overset{+}{\ominus} ٣ = ٦$

أ.مي حواري

$|A_{س}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٣- \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = (٣ \times ٤) - (١ \times ٣-) = ٣- ١٢ = ١٥$

$|A_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = (٣ \times ١) - (٤ \times ٢) = ٣ - ٨ = ٥$

$س = \frac{|A_{س}|}{|A|} = \frac{١٥}{٥} = ٣$ ، $ص = \frac{|A_{ص}|}{|A|} = \frac{٥}{٥} = ١$ ← $(س, ص) = (٣, ١)$

• دورة ثانية 2024 / حل نظام المعادلات الآتية بواسطة كريمر:

$٣ص + س - = ٧$ ، $ص + س = ١$

الحل

$٣ص + س - = ٧$

$ص + س = ١$

أ.مي حواري

$\begin{bmatrix} ٧ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ١ & ١ \end{bmatrix}}_{P}$

$|A| = \begin{vmatrix} ٣ & ١- \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = (٣ \times ١) - (١ \times ١-) = ٣ - ١- = ٤$

$|A_{س}| = \begin{vmatrix} ٧ & ١- \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = (٧ \times ١) - (١ \times ١-) = ٧ - ١- = ٨$

$|A_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٧ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = (٣ \times ١) - (١ \times ٧) = ٣ - ٧ = ٤-$

$س = \frac{|A_{س}|}{|A|} = \frac{٨}{٤} = ٢$ ، $ص = \frac{|A_{ص}|}{|A|} = \frac{٤-}{٤} = ١-$ ← $(س, ص) = (٢, ١-)$

• دورة ثالثة 2024 / حل نظام المعادلات التالية بواسطة كريمر.

$٣ص - ٢س = ٠$ ، $ص + س - = ١-$

الحل

$٣ص - ٢س = ٠$

$ص + س - = ١-$

$\begin{bmatrix} ٠ \\ ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}}_{P}$

$|A| = \begin{vmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ١- \end{vmatrix} = (٢- \times ١-) - (١ \times ٣) = ٢ - ٣ = ١-$

$|\Delta س| = \begin{vmatrix} -٣ & ث \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = (-١ \times -٣) - (١ \times ث) = ٣ - ث = -٣$

$|\Delta ص| = \begin{vmatrix} ث & ٢ \\ -١ & -١ \end{vmatrix} = (-١ \times ث) - (-١ \times ٢) = -ث + ٢ = -٣$

$س = \frac{|\Delta س|}{|\Delta|} = \frac{-٣}{-١} = ٣$ / $ص = \frac{|\Delta ص|}{|\Delta|} = \frac{-٣}{-١} = ٣$ ← $(س، ص) = (٣، ٣)$

• 2025 دور أول/ حل نظام المعادلات الآتية بواسطة قاعدة كريمر:

$٣س + ص = ١٢$ ، $٥ - ٢س = -٤ص$

الحل/ $٥ - ٢س = -٤ص$ ← $٥ - ٢س + ٤ص = ٠$

$ص + ٢س = ١٢$

$\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}}_{P}$

أ.مي حواري

$|P| = \begin{vmatrix} -٤ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = (٢ \times -٤) - (١ \times ٢) = -٨ - ٢ = -١٠$

$|\Delta س| = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ ١٢ & ١ \end{vmatrix} = (١ \times ٥) - (-٣ \times ١٢) = ٥ + ٣٦ = ٤١$

$|\Delta ص| = \begin{vmatrix} -٤ & ٥ \\ ١ & ١٢ \end{vmatrix} = (١٢ \times ١) - (٥ \times ٢) = ١٢ - ١٠ = ٢$

$س = \frac{|\Delta س|}{|P|} = \frac{٤١}{-١٠}$ ، $ص = \frac{|\Delta ص|}{|P|} = \frac{-٢}{-١٠} = \frac{١}{٥}$ ← $(س، ص) = (-\frac{٤١}{١٠}، \frac{١}{٥})$

• 2025 دور ثاني/ حل نظام المعادلات التالية بواسطة قاعدة كريمر

$٣س - ص = ٧$ ، $س + ٣ص = ث$

الحل/ $٣س - ص = ٧$ ... (١)

$س + ٣ص = ث$ ← $س + ٣ص - ث = ٠$

$\begin{bmatrix} ٧ \\ -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}}_{P}$

$|P| = \begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = (-١ \times ١) - (-١ \times ٣) = -١ + ٣ = ٢$

$|\Delta س| = \begin{vmatrix} ٧ & -١ \\ -٣ & -١ \end{vmatrix} = (-١ \times ٧) - (-١ \times -٣) = -٧ - ٣ = -١٠$

$|\Delta ص| = \begin{vmatrix} ٣ & ٧ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} = (-٣ \times ١) - (٧ \times ١) = -٣ - ٧ = -١٠$

$س = \frac{|\Delta س|}{|P|} = \frac{-١٠}{٢} = -٥$ ، $ص = \frac{|\Delta ص|}{|P|} = \frac{-١٠}{٢} = -٥$ ← $(س، ص) = (-٥، -٥)$

$|أص| = \begin{vmatrix} ٣ & ٧ \\ -١ & -٣ \end{vmatrix} = (٣\times -٣) - (٧\times -١) = -٩ - -٧ = -٢$

$س = \frac{|أس|}{|أ|} = \frac{٤}{٢} = ٢$ / $ص = \frac{|أص|}{|أ|} = \frac{-٢}{٢} = -١ \Leftarrow (س، ص) = (٢، -١)$

• 2022 شرق غزة / إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكان:

$س + ص = ٧$ ، $|أس| + |أص| = ١٤$ ، أجد $|أ|$

الحل/ $|أس| + |أص| = ١٤$ نقسم على $|أ|$ ، $|أ| \neq ٠$

$\frac{|أس|}{|أ|} + \frac{|أص|}{|أ|} = \frac{١٤}{|أ|}$

$س + ص = \frac{١٤}{|أ|}$ وحسب المعطيات $س + ص = ٧$

$\Leftarrow ٧ = \frac{١٤}{|أ|} \Leftarrow \frac{٧|أ|}{٧} = \frac{١٤}{٧} \Leftarrow |أ| = ٢$

• 2024 القدس الشريف / استخدم قاعدة كريمر في حل النظام الآتي:

$٢س - ٣ص = ٠$ ، $م س - ك ص = -٤$ علماً بأن $٣م - ٢ك = ٤$

الحل/ $٢س - ٣ص = ٠$

$م س - ك ص = -٤$

$\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ م & -ك \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ -٤ \end{bmatrix}$

$|أ|$

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ م & -ك \end{vmatrix} = (٢\times -ك) - (م\times -٣) = -٢ك + ٣م = ٤$

$|أس| = \begin{vmatrix} ٠ & -٣ \\ -٤ & -ك \end{vmatrix} = (٠\times -ك) - (-٤\times -٣) = ٠ - ١٢ = -١٢$

$|أص| = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ م & -٤ \end{vmatrix} = (٢\times -٤) - (٠\times م) = -٨ - ٠ = -٨$

$س = \frac{|أس|}{|أ|} = \frac{-١٢}{٤} = -٣$ / $ص = \frac{|أص|}{|أ|} = \frac{-٨}{+٤} = -٢ \Leftarrow (س، ص) = (-٣، -٢)$

أ.مي حواري

• 2024 جنوب نابلس / عند حل النظام الآتي باستخدام قاعدة كريمر

$٣س + ن ص = -٣$ ، $ك ص = ٤ - س$ وجد أن $أ_س = \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ جد قيمة كل من

س ، ص .

الحل/ $٣س + ن ص = -٣$ — (١)

$س + ك ص = ٤$ — (٢)

$$\begin{bmatrix} -٣ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}}_{P}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = (٣ \times ٥) - (٢ \times ١) = ١٥ - ٢ = ١٣$$

$$|P_{س}| = \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} = (-٣ \times ٥) - (٢ \times ٤) = -١٥ - ٨ = -٢٣$$

$$|P_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = (٣ \times ٤) - (-٣ \times ١) = ١٢ + ٣ = ١٥$$

$$س = \frac{|P_{س}|}{|P|} = \frac{-٢٣}{١٣} \quad ، \quad ص = \frac{|P_{ص}|}{|P|} = \frac{١٥}{١٣} \Leftarrow (س ، ص) = (-\frac{٢٣}{١٣} ، \frac{١٥}{١٣})$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} = |P| \Leftarrow ١ = ٥ - ٦ = (٣ \times ٢) - (١ \times ١) = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = |P|$$

$$|P_{س}| = \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = (-٣ \times ٢) - (١ \times ٤) = -٦ - ٤ = -١٠$$

$$|P_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = (٣ \times ٤) - (-٣ \times ١) = ١٢ + ٣ = ١٥$$

$$س = \frac{|P_{س}|}{|P|} = \frac{-١٠}{٥} = -٢ \quad ، \quad ص = \frac{|P_{ص}|}{|P|} = \frac{١٥}{١} = ٣ \Leftarrow (س ، ص) = (-٢ ، ٣)$$

$$\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} = |P| \Leftarrow ٢ = ص \quad ، \quad ١ = س$$

أ.مي حواري

• 2024 أريحا/ عند حل نظام من معادلتين خطيتين وجد أن $|P_{ص}| = ٤$ ، $|P_{س}| = ١٢$ وكانت $ص = ٢$ ، ما قيمة $س$

الحل/ $ص = \frac{|P_{ص}|}{|P|} \Leftarrow ٢ = \frac{٤}{|P|} \Leftarrow \frac{٢}{٢}|P| = \frac{٤}{٢} \Leftarrow |P| = ٢$

$$س = \frac{|P_{س}|}{|P|} = \frac{١٢}{٢} = ٦ \Leftarrow س = ٦$$

• 2025 شمال الخليل/ إذا كانت $س = ٤ + ص$ وكانت $|P_{س}| - |P_{ص}| = ٣٦$ ، ما قيمة $|P|$

الحل/ $|P_{س}| - |P_{ص}| = ٣٦$ نقسم على $|P|$ ، $|P| \neq ٠$ ÷

$$\frac{|P_{س}|}{|P|} - \frac{|P_{ص}|}{|P|} = \frac{٣٦}{|P|} \Leftarrow س - ص = \frac{٣٦}{|P|} \quad \text{ـ (١)}$$

وأيضاً / $س = ٤ + ص \Leftarrow س - ص = ٤$ ـ (٢)

$$(١) = (٢) \Leftarrow \frac{٣٦}{|P|} = ٤ \Leftarrow \frac{٣٦}{٤} = |P| \Leftarrow |P| = ٩$$

• خارجي/ في نظام من معادلتين خطيتين على الصورة $P \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} + ب = جـ$ ، إذا كانت المصفوفة $P = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة المعاملات ، $ب = \begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

اكتب المعادلتين الخطيتين الممثلتين للنظام .

الحل/ مصفوفة المعاملات × مصفوفة المتغيرات = مصفوفة الثوابت .

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (١ \times س) + (-١ \times ص) \\ (٤ \times س) + (٣ \times ص) \end{bmatrix}$$

$$\text{النظام} \leftarrow \begin{cases} س - ص = ١ \\ ٤س + ٣ص = ٤ \end{cases} \Leftarrow$$

• خارجي/ إذا كان $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ص & -١ \\ س & -٤ \end{vmatrix} = ٧$ فأوجد قيمة كل من س، ص باستخدام نظام كريمر.

الحل/

$$\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow ٧ = (٢ \times س) - (ص \times ١) = ٧$$

$$٢س - ص = ٧ \quad \ldots (١)$$

$$\begin{vmatrix} ص & -١ \\ س & -٤ \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow ٧ = (-١ \times س) - (-٤ \times ص) = ٧$$

$$-س + ٤ص = ٧ \quad \ldots (٢)$$

نظام المعادلات /

$$٢س - ص = ٧$$

$$-س + ٤ص = ٧$$

أ.مي حواري

$$\begin{bmatrix} ٧ \\ ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}}_{P}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{vmatrix} = (-١ \times -١) - (٤ \times ٢) = ١ - ٨ = -٧$$

$$|س P| = \begin{vmatrix} ٧ & ٢ \\ ٧ & -١ \end{vmatrix} = (٧ \times -١) - (٧ \times ٢) = -٢١$$

$$|ص P| = \begin{vmatrix} -١ & ٧ \\ ٤ & ٧ \end{vmatrix} = (-١ \times ٧) - (٤ \times ٧) = -٣٥$$

$$|ص P| = \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & ٧ \end{vmatrix} = (-١ \times ٧) - (٤ \times ٢) = -١٥$$

$$س = \frac{|س P|}{|P|} = \frac{-٢١}{-٧} = ٣ \quad ، \quad ص = \frac{|ص P|}{|P|} = \frac{-٣٥}{-٧} = ٥ \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \text{حل النظام } (س، ص) = \{(٣، ٥)\}$$

• خارج تفوه/ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$ ، تمثل مصفوفة المعاملات في نظام خطي مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين س، ص وكانت $P_{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ ، ما قيمة ص

الحل/ $|P| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{vmatrix} = (١-)(١) - (٣)(٢) = -١-٦ = -٧$

$P_{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ ← مصفوفة الثوابت = العمود الأول في $P_{س}$ = $\begin{bmatrix} ٥ \\ ١ \end{bmatrix}$

وكذلك/ $|P_{ص}| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = (١)(١) - (٣)(٥) = ١-١٥ = -١٤$

$ص = \frac{|P_{ص}|}{|P|} = \frac{-١٤}{-٧} = ٢$ ← ص = ٢

أ.مي حواري

انتبه معي..

حين تُلغي متابعة التّافهين = تُنقذ نفسك! نعم تُنقذها وتُخرجها من بئرٍ فارغ لا يليق بك، أُلفة الاختلاط، أجواء تافهة، متابعة يوميّات لا معنىٰ لها، ركض خلف اللّقطة واللّحظة وإثارة الجدل، ينقل الواحد منهم حياته وتفاصيله وزوجته وأخته وبيته حتّىٰ غرفة نومه؛ ليُريك وَهمًا ويَسقيك سُمًّا، فتدخل الصّورة عَقلك وتُحرّك شهوَتك، فتَلعَن حالَتك، وتسقط في وَحل المقارنات!

تسحَبُك مِن واقِعك سَحبًا، تأخذك لسَرابٍ يحسبه الظمآن ماءً، دائرةٍ تُحيط بك، تُبعدك عن حقيقة مهمّتك، والله لو انشَغَل الواحد منّا بغايةٍ عظيمةٍ وهدف بعيدٍ ومسؤوليّةٍ جادّة؛ لَما تَفرّغ لهذا، ولا

اختبار نهاية الوحدة الثانية - للمهتمين

• السؤال الأول

١/ إذا كانت المصفوفة س = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٢ & -٣ \\ ١٦ & ٨ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $٢\sqrt{س_{١٣}} - \frac{١}{٢}(س_{٢١})^{٢} + \sqrt[٣]{س_{٢٣}} + ٥$

أ/ ١ ب/ ٢ ج/ ٧ د/ ٢٥

الحل/ $س_{١٣}$ تقع في الصف الثالث، العمود الأول ⇐ $س_{١٣} = ١٦$

$س_{٢١}$ تقع في الصف الأول، العمود الثاني ⇐ $س_{٢١} = -٤$

$س_{٢٣}$ تقع في الصف الثالث العمود الثاني ⇐ $س_{٢٣} = ٨$

المطلوب/ $٢\sqrt{س_{١٣}} - \frac{١}{٢}(س_{٢١})^{٢} + \sqrt[٣]{س_{٢٣}} + ٥$

$= ٢\sqrt{١٦} - \frac{١}{٢}(-٤)^{٢} + \sqrt[٣]{٨} + ٥ = ٢\times٤ - \frac{١}{٢}\times١٦ + ٢ + ٥$

$= \cancel{٨} - \cancel{٨} + ٢ + ٥ = ٧$

٢/ إذا كانت المصفوفة أ من الرتبة ٢×١ وكانت المصفوفة ب = $[-٥ \quad ٩]$ فإن العملية الممكنة عليها من الآتية هي:

أ/ $و_{٢\times١} - أ\times ب$ ب/ $أ\times ب + م_{٢}$ ج/ ٤أ − ٢ب د/ ٣(أ+ب)

الحل/ رتبة ب = ١×٢

$أ\times ب = ج_{٢\times٢}$

$\cancel{١\times٢}$ $\cancel{٢\times١}$ ٢×٢

أ/ $و_{٢\times١} - أ\times ب = و_{٢\times١} - ج_{٢\times٢}$ غير معرفة لأن رتبة و ≠ رتبة ج

ب/ $أ\times ب + م_{٢} = ج_{٢\times٢} + م_{٢\times٢}$ معرفة لأن رتبة ج = رتبة م

ج/ ٤أ − ٢ب غير معرفة لأن رتبة أ ≠ رتبة ب

د/ ٣(أ+ب) غير معرفة لأن رتبة أ ≠ رتبة ب

٣/ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٧٤ \\ ٢+٣س \\ س-ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧٤ \\ ٥ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $ص^{٢}$

أ/ ١٦ ب/ ٤٠ ج/ ٢ د/ ٤

الحل/ $٢+٣س = ٥ \Leftarrow ٥-٢ = ٣س \Leftarrow \frac{٣}{٣} = \frac{٣س}{٣} \Leftarrow ١ = س$

$س - ص = ٣ \Leftarrow ١ - ص = ٣ \Leftarrow ١ - ٣ = ص \Leftarrow -٢ = ص$

$(ص)^{٢} = (-٢)^{٢} = ٤$

أ.مي حواري

" وردك من القرآن أولاً "

٤/ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ب & ١ \\ ١ & ب \end{bmatrix}$ $\left(\begin{bmatrix} ١- \\ ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \end{bmatrix} \right)$ ، ما رتبة المصفوفة س

أ/ ١×١ ، ب/ ٢×٢ ، ج/ ١×٢ ، د/ ٣×١

الحل/ س = $_{٢\times٢}$ أ $\times$ $_{٢\times١}$ ب = س من الرتبة ١×٢

٥/ إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣- & ١- \end{bmatrix}$ ، ما قيمة |أ| - ص١

أ/ ٦ ، ب/ |أ| ، ج/ ١ ، د/ -|أ|

الحل/ تذكير/ |أ| = ١ ، و١ = ب دائماً .

ص = أ - ص$_{١}$ ، لأن ص$_{١}$ مضاعفة ضربية

$= \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣- & ١- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ب & ١ \\ ١ & ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$

$\therefore$ |أ| - ص$_{١}$| $= \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٣- & ٢- \end{vmatrix} = (٣\times٢) - (٣-\times٢) = -٦ + ٦ = ب = |و_{١}|$

٦/ لتكن أ = $\begin{bmatrix} ٢- & ٢ \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكانت ب مصفوفة صفية |أ| - |ب| = |و$_{٢}$| = |ص$_{١}$| + ٢|

ما قيمة |ب|

أ/ ٦ ، ب/ -٦ ، ج/ $\frac{-٤}{٣}$ ، د/ $\frac{-٢٠}{٣}$

الحل/ |أ| = (٣-×٢) - (٤-×٢) = -٦ + ٨ = ٢

ص$_{١}$| = ١ ، و$_{٢}$| = ب

$\therefore$ |أ| - |ب| = |و$_{٢}$| = |ص$_{١}$| + ٢| $\Leftarrow$ ٢×٢ - |ب| = ب + ١

$\therefore$ ٣- ÷ (١٨ = |ب| ٣-) $\Leftarrow$ $_{٤-}$٢ = $_{٤-}$|ب| ٣ - ٤

|ب| = ٦-

٧/ إذا كان |س| = $\begin{vmatrix} ٧ & ١ \\ ١- & ١ \end{vmatrix}$ ، |ص| = $\begin{vmatrix} ١ & ٧ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}$ ما قيمة المقدار (|أ| - س×ص)

أ/ ١٦- ، ب/ ٢٠- ، ج/ ٣٤- ، د/ ٢٠

الحل/ |س| = (١×٧) - (١-×٧) = ٧ + ١ = ٨

|ص| = (١×١) - (١×٧) = ١ - ٧ = ٦-

لإيجاد |أ| نلغي العمود المشترك من س و ص

|أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ١ \end{vmatrix}$ = (١×١) - (١-×١) = ١ + ١ = ٢-

س = $\frac{|س|}{|أ|} = \frac{٨}{٢-} = ٤-$ ، ص = $\frac{|ص|}{|أ|} = \frac{٦}{٢-} = ٣$

* |أ| - س×ص = $(٢-)^{٢}$|أ| - ٤- × ٣ = ٤ - ١٢ - ٨ = -١٢ = -٢٠

أ.مي حواري

١٨ إذا كانت $P = \begin{bmatrix} ٣ & ب \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\bar{P}^{١} = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ١٥- & ٢ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة الثابت ب

ج/ ٤ ، د/ ٦ ، هـ/ ٨- ، و/ ٤-

الحل/ $P \times \bar{P}^{١} = م_{ج} \Leftarrow \begin{bmatrix} ٣ & ب \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ١٥- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ا & ١ \\ ١ & ء \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ا & ١ \\ ١ & ء \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٣ \times ١) + (ب \times ١) & (٢ \times ١٥-) + (ب \times ١) \\ (٣ \times ١) + (٣- \times ٢) & (٢ \times ١٥-) + (٣- \times ٢) \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ا & ١ \\ ١ & ء \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ب - ٣ & ب + ٤- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$ب - ٣ = ا \Leftarrow ب = ١ + ٣ \Leftarrow ب = ٤$

$ب + ٤- = ء \Leftarrow ٤ = ب \Leftarrow ب = \{٤\}$

أ.مي حواري

٩/ إذا كانت س، ص، ع مصفوفات صفية بحيث تكون عملية الضرب (س ع + ص) وكانت س من الرتبة (٤ × ٢) وكانت ع من الرتبة (٢ × ٣) ، ما هي رتبة المصفوفة (ص)

ج/ ٤ × ٣ ، د/ ٢ × ٣ ، هـ/ ٣ × ٤ ، و/ ٢ × ٢

الحل/ $س_{٤ \times ٢} \times ع_{٢ \times ٣} = م_{٤ \times ٣}$

س ع + ص معرفة إذن رتبة ص = ٤ × ٣ ⇐ $م_{٤ \times ٣} + ص_{٤ \times ٣}$ معرفة ⟸ رتبة م = ٤ × ٣

١٠/ ما قيمة ص إذا علمت أن $\left(\begin{bmatrix} ا & ١ \\ ١ & ء \end{bmatrix} - م_{ج} \right)^{٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٣س + ص \\ ٢- & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١- & ٥ \\ ٢ & ٣س \end{bmatrix}$

ج/ ١ ، د/ ١- ، هـ/ ٣ ، و/ ٣-

الحل/ $\left(م_{ج} - \begin{bmatrix} ا & ١ \\ ١ & ء \end{bmatrix} \right)^{٣} = م_{ج}^{٣} = م_{ج}^{٣} = \begin{bmatrix} ١ + ١- & ص + ٣س + ٥ \\ ٢ + ٢- & ٦ + ٣س \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ا & ١ \\ ١ & ء \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ب & ص + ٣س + ٥ \\ ب & ٦ + ٣س \end{bmatrix}$

$٦ + ٣س = ء \Leftarrow ٦- = ٣س \Leftarrow ٣- = س$

$ص + ٣س + ٥ = ء \Leftarrow ص + ٦- + ٥ = ء \Leftarrow ص + ٣- \times ٢ + ٥ = ء \Leftarrow ص + ٣س + ٥ = ء$

$ص = ١$

• السؤال الثاني/

أ/ إذا كان $\begin{vmatrix} س & ٣- \\ ١ & (١ - س) \end{vmatrix} = ١٨ \times \begin{vmatrix} ٢ + س & ١- \\ ٣س^{٢} & س - \end{vmatrix}$ ، ما قيمة/ قيم س

الحل/ $(س \times (1-س) - (1 \times -3)) \times (1) = س + 2$ | $(-س \times -س) - 2 \times س^3$ ∴

$(س - س^2 - -3) = س + 3(س^2)$

$س - س^2 + 3 = س + 2س^2$ ⇐ $\frac{3}{3} = \frac{3س^2}{3}$ ⇐ $1 = س^2$ ⇐ $س = 1$ أو $س = -1$

$\therefore س = \{1, -1\}$ ⇐

ب/ إذا كان $\bar{P} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ و $ب = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ ن & 2 \end{bmatrix}$ وجد ناتج: $ب \times \bar{P}$

$\bar{P} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad$ $|\bar{P}| = (3 \times 3) - (5 \times 2) = 9 - 10 = -1$

$(\bar{P})^{-1} = د = -1 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = د$

$ب \times د = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ ن & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times -2) + (-2 \times 3) & (1 \times 3) + (-2 \times -5) \\ (4 \times -2) + (0 \times 3) & (4 \times 3) + (0 \times -5) \\ (ن \times -2) + (2 \times 3) & (ن \times 3) + (2 \times -5) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -8 & 13 \\ -8 & 12 \\ 6 - 2ن & 3ن - 10 \end{bmatrix}$

أ/ $د + د \times |\bar{P}| = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + (-1) \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ن \\ ن & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ن & 1 \\ 1 & ن \end{bmatrix}$

⇐ $د + د \times |\bar{P}| = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

• السؤال الثالث/

أ/ إذا كانت $|P| = 3$ و $ب = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 18 \end{bmatrix}$ و $ب = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ما حل المعادلة المصفوفية

الحل/ $3ب = (س + P)2$

$P = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 18 \end{bmatrix} = |P| \Leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = P \Leftarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} = P2$

$ب = [\begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times 3] \Leftarrow 3ب = \begin{bmatrix} -24 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

$ب_3 = (2س + ص)3$ ⇐ $ب_3 = 2ص + 3س$ ⇐ $ب_3 - 2ص = 3س$

$3س = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$ ⇐ $\frac{1}{2}س3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 24 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ ⇐ $3س = \begin{bmatrix} 18 & 4 \\ 6 & 28 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2}$

$س = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$ ⇐

ب/ استخدم قاعدة كريمر لحل النظام $3ص + 1 = 5س - 8$ ، $ص + 4 = س - 3ص$

الحل/

$3ص + 1 = 5س - 8$ ⇐ $5س + 3ص = 7$ ... (1)

$ص = 4 + س - 3ص$ ⇐ $س - 3ص = -4$ ... (2)

أ.مي حواري

$\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$ل = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (3 \times -1) - (2 \times 5) = -3 - 10 = -13$

$ل_س = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = (7 \times 2) - (-4 \times 3) = 14 - -12 = 26$

$ل_ص = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (3 \times -4) - (2 \times 7) = -12 - 14 = -26$

$س = \frac{ل_س}{ل} = \frac{26}{-13} = -2$ ، $ص = \frac{ل_ص}{ل} = \frac{-26}{-13} = 2$ ⇐ حل النظام $(س، ص) = (-2، 2)$

- السؤال الرابع/

أ/ حل المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ ن & -6 \end{bmatrix} + س \right) = 3 \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} س + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ ن & -6 \end{bmatrix} \right)$

الحل/ $\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ ن & -6 \end{bmatrix} + س \right) (2 \times 2 - 1 \times 3) = 3 \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ ن & -6 \end{bmatrix} + س \times 1 \right)$ ⇐ $س + و = س$

لأن و محايدة في الجمع والطرح

$س + س3 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + س$ ⇐

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & ن \end{bmatrix} = س$ ⇐ $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & ن \end{bmatrix} = س4$

..نرحام أعمالك لا يخفّه إلا نرحام وردك من القرآن..

ب/ ليكن $P = \begin{bmatrix} ن & ٤ \\ \frac{١}{٢} & ٧ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١٠ & ٦ \\ ١٠ & ٢ \end{bmatrix}$ وكان: $|P| س^{٢} + س|ب| = ٨ \times \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix}$

ما قيمة / قيم س

الحل $|P| = (٤ \times \frac{١}{٢}) - (٧ \times ن) = ٢ - ٢ن \Leftarrow |P| = ٢$

$* \quad \frac{ب}{٢} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ١٠ & ٦ \\ ١٠ & ٢ \end{bmatrix} = ب \Leftarrow \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$

$|ب| = (٥ \times ٣) - (٥ \times ١) = ١٥ - ٥ \Leftarrow |ب| = ١٠$

$* \quad \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} = (٥ \times ١) - (-٣ \times -٢) = ٥ - ٦ = -١$

أ.مي حواري

$\Leftarrow |P| س^{٣} + س|ب| = ٨ \times \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix}$

$\Leftarrow ٢س^{٣} + ١٠س = ٨ \times -١ \Leftarrow ٢س^{٣} + ١٠س + ٨ = ٠ \div ٢$

$\Leftarrow س^{٣} + ٥س + ٤ = ٠$

$(س + ١)(س + ٤) = ٠$

$س = -١ \Leftarrow$ أو $س + ٤ = ٠ \Leftarrow س = -٤$

$س = \{-١ ، -٤\}$

• السؤال الخامس/

أ/ عند حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام كريمر وُجد أن $P س = \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ثوابت

$P ص = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} م \\ هـ \end{bmatrix}$ جد: ثابتة

١/ قيمة الثابتة م، هـ

٢/ قيمة س، ص

الحل ١/ $P = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت تمثل العمود الأول في $P س$ = العمود الثاني في $P ص$

$\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} م \\ هـ \end{bmatrix} \Leftarrow هـ = ٢ ، م = -١$

$|P| / ٢ = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} = (١ \times ٣) - (٣ \times ١) = ٣ - ٩ = -٦$

$|س ب| = \begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = (-١ \times ٣) - (٢ \times ١) = -٣ - ٢ = -٥$

$|ص ب| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = (١ \times ٢) - (٣ \times -١) = ٢ + ٣ = ٥$

$س = \frac{|س ب|}{|P|} = \frac{-٥}{-٦} = \frac{٥}{٦}$

$ص = \frac{|ص ب|}{|P|} = \frac{٥}{-٦} = \frac{-٥}{٦}$

ب/ إذا كان $س = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} -١ & ب \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد ناتج $ص$ ، $ص$

$ص = ١/ص + س$

$٢/ و = ص^{٢}$

الحل/ $١/ص \times س = \begin{bmatrix} -١ & ب \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (-١ \times ١) + (ب \times -١) & (-١ \times ٢) + (ب \times ٥) \\ (٣ \times ١) + (٤ \times -١) & (٣ \times ٢) + (٤ \times ٥) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & -٢ \\ -١ & ٢٦ \end{bmatrix}$

$ص = ص + س$

$\begin{bmatrix} ب & ٥- \\ ٣ & ٢٩ \end{bmatrix} = س + ص \Leftarrow \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ٢٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ب & -١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} = س + ص$

$١/ ص^{٢} = ص \times ص = \begin{bmatrix} ب & -١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ب & -١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

$\Rightarrow ص^{٢} = \begin{bmatrix} (ب \times ب) + (-١ \times ٤) & (ب \times -١) + (-١ \times ٣) \\ (٤ \times ب) + (٣ \times ٤) & (٤ \times -١) + (٣ \times ٣) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & -٣ \\ ٢١ & -٤ \end{bmatrix}$

المطلوب/ $و = ص^{٢} - ص - ٤$

$\Leftarrow و = \begin{bmatrix} ١٢ & -٣ \\ ٢١ & -٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ب & -١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} - ٤$

$= \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ -١٣ & -١٢ \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

وصفة خفيفة لترتيب القلق الذي فيك..

لا تَنَم إلّا وأنت متوضّئ بعد سجداتٍ طويلة، ودعواتٍ لا تُمَلّ، ولحظات صمتٍ بينك ونفسك، وأنفاس هادئة رغم ارتجافها، وذِكرٌ تُحبّ تكراره، وصفحة من القرآن تُخرجك من مكانك، ثمّ سِرّ في البيت خطوات، تفقّد من فيه دون كلمةٍ

اختبار نهاية الفصل الأول - للمهتمين

السؤال الأول

١/ إذا كان متوسط تغير ق(س) للفترة [١، ٤] يساوي ٦، فإذا علمت أن ق(١) = ٤، ما قيمة ق(٤)

أ/ ١٠ ب/ ١٢ جـ/ -٢٢ د/ ٢٢

الحل/ متوسط التغير = $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

⇐ ٦ = $\frac{ق(٤) - ق(١)}{٤ - ١}$ ⇐ ١٨ = ق(٤) - ق(١) ⇐ ١٨ = ق(٤) - ٤ ⇐ ١٨ + ٤ = ق(٤)

٢٢ = ق(٤)

٢/ إذا كان ق(س) = ٢س² + ٣ب، هـ(س) = √أ + أس وكان قَ(٢) × هـَ(٢) = ٨ ما قيمة الثابت أ

أ/ ٢ ب/ ٨ جـ/ ١ د/ ٤

الحل/ ق(س) = ٢س² + ٣ب ← ثابت

قَ(س) = ٢ × ٢س

قَ(٢) = ٤ × ٢ = ٨

هـ(س) = √أ + أس ← ثابت

هـَ(س) = ٠ + أ

هـَ(٢) = أ

* قَ(٢) × هـَ(٢) = ٨ ⇐ $\frac{٨}{٨}$ × أ = $\frac{٨}{٨}$ ⇐ أ = ١

٣/ إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق وله قيمة صغرى محلية عند (٢، ٦)، ما العبارة الصحيحة فيما يلي:

أ/ قَ(٦) = ٠ ✗ ب/ ق(٢) = ٠ ✗ جـ/ ٢قَ(٢) - ق(٢) = -٦ د/ ٣ق(٢) + قَ(٢) = ٦

الحل/ * ق(س) قابل للاشتقاق وله قيمة قصوى محلية عند (أ، ب) ← ق(أ) = ب

و ← قَ(أ) = ٠

ومنه قَ(٢) = ٠، وَ ق(٢) = ٦

✓ جـ/ ٢قَ(٢) - ق(٢) = ٢ × ٠ - ٦ = -٦

✗ د/ ٣ق(٢) + قَ(٢) = ٣ × ٦ + ٠ = ١٨ ≠ ٦

٤/ إذا كان ص - س = $\int_{١}^{٢}$ (س² + ٣س) دس + $\int$ ٢س دس ما قيمة صَ عندما س = ٢

أ/ ٥ ب/ ٤ جـ/ ٦ د/ ٣

الحل/ ص = $\int_{١}^{٢}$ (س² + ٣س) دس + $\int$ ٢س دس + س

صَ = ٠ + ٢س + ١

صَ|س = ٢ = ٢ × ٢ + ١ = ٥

أ.مي حواري

٥/ إذا كان ق(١) - ق(٤) = -١٢، ما قيمة $\int_{١}^{٤}$ $\frac{١}{٢}$ قَ(س) دس + $\int_{٤}^{٤}$ $\frac{١}{٢}$ ق(س) دس =

أ/ -١٢ ب/ ١٢ جـ/ ٦ د/ -٦

الحل/ $\int_{٤}^{٤}$ $\frac{١}{٢}$ ق(س) دس = ٠، لأن الحد العلوي = الحد السفلي.

* $\int_{1}^{4} \frac{1}{2}\, ق'(س)\, دس = \frac{1}{2}\int_{1}^{4} ق'(س)\, دس = \frac{1}{2}\left(ق(س) \Big|_{1}^{4} \right) = \frac{1}{2}\left(ق(4) - ق(1) \right)$

$= \frac{1}{2} \times 12 = 6$

المطلوب/ $\int_{1}^{4} \frac{1}{2} ق'(س)\, دس + \int_{4}^{4} \frac{1}{2} ق(س)\, دس = 6 + ن = 6$

• ملاحظة/ $[ق(1) - ق(4) = -12] \times -1 \Leftarrow ق(4) - ق(1) = 12$

٦/ إذا كان $\int ق'(س)\, دس = 2س^2 - 3س + ج$ ، ما قيمة $ق'(-1)$

أ/ -7 ب/ 7 ج/ 4 د/ 1

الحل/ $\int ق'(س)\, دس = 2س^2 - 3س + ج$ "باشتقاق الطرفين"

$\left(\int ق'(س)\, دس\right)' = (2س^2 - 3س + ج)'$

$ق'(س) = 4س - 3$

$ق'(-1) = 4 \times -1 - 3 = -4 - 3 = -7$

٧/ إذا كانت المصفوفة ب مربعة من الرتبة الثانية غير منفردة ما قيمة $-2|-2ب^{-1}|$

أ/ -4 ب/ 4 ج/ -8 د/ 16

الحل/ $-2|-2 \times ب^{-1}| = -2|-2 \times م_{ب}| = -2(-2)^2 |م_{ب}|$

$= -2 \times 4 \times 1 = -8$

٨/ إذا كانت $\begin{bmatrix} 2س & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ س+ص & ن \end{bmatrix}$ ما قيمة $س - ص$

أ/ 8 ب/ -4 ج/ -8 د/ 4

الحل/ $\begin{bmatrix} 2س+2 & 2 \\ 10 & ن \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ س+ص & ن \end{bmatrix}$

أ.مي حواري

$2س + 2 = 8 \Leftarrow 2س = 8 - 2 \Leftarrow \frac{2س}{2} = \frac{6}{2} \Leftarrow س = 3$

$10 = س + ص \Leftarrow 10 = 3 + ص \Leftarrow 10 - 3 = ص \Leftarrow 7 = ص$

المطلوب/ $س - ص = 3 - 7 = -4$

٩/ إذا كانت $س = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ ، ما قيمة $ص_{23} - س_{12} \times 3$

أ/ 1 ب/ -3 ج/ 13 د/ 27

الحل/ $ص_{23}$ تقع في الصف الثالث والعمود الثاني في ص $\Leftarrow ص_{23} = 7$

$س_{12}$ تقع في الصف الثاني العمود الأول في س $\Leftarrow س_{12} = -2$

$ص_{23} - س_{12} \times 3 = 7 - -2 \times 3 = 7 \overset{+}{-} 6 = 13$

١٠/ إذا كانت س، ص، ع مصفوفات حيث يمكن إجراء العملية الحسابية (س ع - ص) وكانت المصفوفة (س) من الرتبة (٢×٢)، والمصفوفة (ص) من الرتبة (٢×٣) ما هي رتبة المصفوفة ع

أ/ ٢×٣ ب/ ٣×٢ ج/ ٢×٢ د/ ٣×٣

الحل/ س × ع - ص معرفة

إذاً رتبة س ع = رتبة ص = ٢×٣

س × ع من الرتبة ٢×٣ ⇐ م = ٢ عدد أعمدة س = عدد صفوف ع

٢×٢ م×ن

رتبة س × ع = ٢×٣ = ٢×ن ⇐ ٣ = ن ⇐ رتبة ع = م×ن = ٢×٣

• السؤال الثاني

أ/ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س في [-١، ٣] هو ٧، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٣ق(س) - ٢س + ١ في نفس الفترة

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [-١، ٣] = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(٣) - ق(-١)}{٣ - -١} = ٧$ ⇐ ق(٣) - ق(-١) = ٢٨

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٣) - هـ(-١)}{٣ - -١} = \frac{(٣ق(٣) - ٢×٣ + ١) - (٣ق(-١) - ٢×-١ + ١)}{٤}$

$= \frac{(٣ق(٣) - ٦ + ١) - (٣ق(-١) + ٢ + ١)}{٤} = \frac{٣ق(٣) - ٥ - ٣ق(-١) - ٣}{٤}$

$= \frac{(٣ق(٣) - ٣ق(-١)) + (-٥ - ٣)}{٤} = \frac{٣(ق(٣) - ق(-١)) + -٨}{٤} = \frac{٣×٢٨ - ٨}{٤}$

$= \frac{٨٤ - ٨}{٤} = \frac{٧٦}{٤} = ١٩$

ب/ حل المعادلة المصفوفية التالية:

$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} \times \left(س - ٢ \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ن \end{bmatrix} \right) = |٢م_٢| \times \begin{bmatrix} ن & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} + س$

الحل/

$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = (٤×٢) - (٣×٣) = ٨ - ٩ = -١$

أ.مي حواري

$|٢م_٢| = (٢)^٢ |م_٢| = ٤×١ = ٤$

⇐ $-\left(س - \begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٤ & ن \end{bmatrix} \right) = ٤ \begin{bmatrix} ن & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} + س$

$-س + \begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٤ & صفر \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠٠ & ١٢ \\ ٨ & -٤ \end{bmatrix} + س$

$+س \qquad +س$

⇐ $\begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٤ & ٠٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠٠ & ١٢ \\ ٨ & -٤ \end{bmatrix} = ٢س$ ⇐ $\frac{٢س}{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & -١٨ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix} \times \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow$ س = $\begin{bmatrix} -٩ & ١ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}$

جـ/ إذا كان ق(س) = هـ(س) × س² − س وكان ق′(٢) = −٤ ، ق(٢) = ٢ ما قيمة هـ′(٢)

الحل/ ق(س) = هـ(س) × س² − س (الأول، الثاني)

ق′(س) = هـ(س) × ٢س + س² × هـ′(س) − ١

ق′(٢) = هـ(٢) × ٢ × ٢ + ٢² هـ′(٢) − ١

−٤ = ٤ + ٤هـ′(٢) − ١

−٤ = ٣ + هـ′(٢) × ٤ ، −٣ ، −٣

ق(س) = هـ(س) × س² − س

ق(٢) = هـ(٢) × ٢² − ٢

٢ = هـ(٢) × ٤ − ٢

٢ + ٢ = ٤هـ(٢)

$\frac{٤}{٤} = \frac{٤}{٤}$ هـ(٢) ⇐ هـ(٢) = ١

−٧ = ٤هـ′(٢) ⇐ $\frac{-٧}{٤} = \frac{٤هـ′(٢)}{٤}$ ⇐ $\frac{-٧}{٤}$ = هـ′(٢)

• السؤال الثالث

أ/ إذا كان ق(س) = −٢س³ + ٢٤س + ٥ ، س ∈ ح ، جد:

١/ فترات التزايد والتناقص لـ ق(س) على مجاله ٢/ القيم القصوى لـ ق(س) وأحدد نوعها.

الحل/ ق(س) = −٢س³ + ٢٤س + ٥

ق′(س) = −٢ × ٣س² + ٢٤

أ.ميّ

ن = −٦س² + ٢٤ ⇐ $\frac{٦}{٦}$س² = $\frac{٢٤}{٦}$ ⇐ $\sqrt{س^٢} = \sqrt{٤}$ ⇐ س = ٢ ، س = −٢

أو

١/ ق(س) متزايد على]−∞، −٢] ∪ [٢، ∞[

ق(س) متناقص على [−٢، ٢]

سلول ق

اشارة ق

− − − − | +++ | − − −

−٢ ، ٢

٢/ عند س = −٢ يوجد قيمة صغرى محلية قيمتها ق(−٢) = −٢(−٢)³ + ٢٤ × −٢ + ٥

= −٢ × −٨ + −٤٨ + ٥ = ١٦ − ٤٨ + ٥ = −٢٧

• عند (س = ٢) يوجد قيمة عظمى محلية قيمتها

ق(٢) = −٢(٢)³ + ٢٤ × ٢ + ٥ = −٢ × ٨ + ٤٨ + ٥ = −١٦ + ٤٨ + ٥ = ٣٧

ب/ إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ٣ق(س) دس = ٦ وكان $\int_{٣}^{٤}$ (ق(س) + ٢س) دس = ٥ ما قيمة $\int_{١}^{٤}$ (ق(س) + ٢) دس.

الحل/

* $\int_{١}^{٣}$ ٣ق(س) دس = $\frac{٣}{٣}\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = $\frac{٦}{٣}$ ⇐ $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ٢

* $\int_{٣}^{٤}$ (ق(س) + ٢س) دس = $\int_{٣}^{٤}$ ق(س) دس + $\int_{٣}^{٤}$ ٢س دس = ٥ ⇐ $\int_{٣}^{٤}$ ق(س) دس + (س² $\Big|_{٣}^{٤}$) = ٥

⇐ $\int_{٣}^{٤}$ ق(س) دس + (٤² − ٣²) = ٥ ⇐ $\int_{٣}^{٤}$ ق(س) دس + (١٦ − ٩) = ٥ ⇐ $\int_{٣}^{٤}$ ق(س) دس = ٥ − ٧ = −٢

٧

خاصية الاضافة / $\int_1^4 ه(س)\,دس = \int_1^3 ه(س)\,دس + \int_3^4 ه(س)\,دس$

$\Leftarrow \int_1^4 ه(س)\,دس = ٢ + -٢ = ٠$

المطلوب/ $\int_1^4 ه(س) + ٢\,دس = \int_1^4 ه(س)\,دس + \int_1^4 ٢\,دس = ٠ + ٢س|_1^4 = ٢(٤-١)$

$= ٢ \times ٣ = ٦$

ج/ إذا كان $س = \begin{bmatrix} ب^٢ & ب \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ب & ب \\ -ب^٣ & ٢ \end{bmatrix} + ٣ص$ حيث قيمة الثابت ب التي تجعل المصفوفة س مفردة

$٣ص = ص$ مصفوفة محايدة في الجمع والطرح المصفوفات

الحل/ $س = \begin{bmatrix} ب^٢ - ٢ب & ٠ \\ ١ + ب^٣ & ١ \end{bmatrix}$

س منفردة $\Leftarrow$ $|س| = ٠ \Leftarrow |س| = (ب^٢ - ٢ب)(١) - ٠(١ + ب^٣)$

$٠ = ب^٢ - ٢ب$

$٠ = ب(ب - ٢)$

إما $ب = ٠$ أو $ب - ٢ = ٠ \Leftarrow ب = ٢$

$\Leftarrow ب = \{٠، ٢\}$

• السؤال الرابع /

أ.مي

١ب استخدم طريقة كريمر لحل النظام التالي: $ص = ١ + س$ ، $ص + س = ٦$

الحل $ص = ١ + س \Leftarrow ص - س = ١ \Leftarrow -س + ص = ١$

$س + ص = ٦$

$\begin{bmatrix} ١ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}}_{P}$

$|P| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = (١ \times ١) - (-١ \times ١) = ١ - -١ = ٢$

$|P س| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٦ & ١ \end{vmatrix} = (١ \times ١) - (٦ \times ١) = ١ - ٦ = -٥$

$|P ص| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٦ \end{vmatrix} = (١ \times ٦) - (١ \times ١) = ٦ - ١ = ٧$

$ص = \frac{|P ص|}{|P|} = \frac{٧}{٢} \quad / \quad س = \frac{|P س|}{|P|} = \frac{-٥}{٢}$

$\Leftarrow (س، ص) = (-\frac{٥}{٢}، \frac{٧}{٢})$

ب/ جد ما يلي:

١/ $\int (5س^4 + 6س^2 - 11)$ سم

٢/ $\int_1^3 (2س + \frac{6}{س^3} + 5)$ سم

الحل/

١/ $\frac{5}{4}س^5 + 2س^3 - 11س + ج$

$= \frac{5}{4} \times \frac{1}{5+1} س^{5+1} + 2 \times \frac{1}{3+1} س^{3+1} - 11س + ج$

$= \frac{5}{24} س^6 + \frac{1}{2} س^4 - 11س + ج$

٢/ $\int_1^3 (2س + 6س^{-3} + 5)$ سم

$= [س^2 + 6 \times \frac{1}{-3+1} س^{-3+1} + 5س]_1^3$

$= [س^2 - 3س^{-2} + 5س]_1^3$

$= (9 - 3 \times \frac{1}{9} + 15) - (1 - 3 + 5)$

$= (24 - \frac{1}{3}) - 3$

$= 21\frac{2}{3}$

أ.مي

٣/ $\int_1^3 (\frac{س^2+1}{3} + 5س)$ سم $= \int_1^3 (\frac{1}{3}س^2 + \frac{1}{3} + 5س)$ سم

$= [\frac{1}{9}س^3 + \frac{1}{3}س + \frac{5}{2}س^2]_1^3$

$= (3 + 1 + \frac{45}{2}) - (\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{5}{2})$

$= \frac{49}{2} - \frac{16}{9}$

$= \frac{409}{18}$

جـ/ إذا كان $أ = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ فأوجد ما يلي

١/ $أ + 5ب$ ٢/ $3أ(ب + 2ب^2)$

الحل/

$أ = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$ ← $د = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

١/ $أ + 5ب = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$أ + 5ب = (8 \times 3) - (0 \times -1) = 24 - 0 = 24$

$\frac{1}{2}|أ + 5ب| = \frac{1}{2} \times 24 = 12$

٢/ $3أ(ب + 2ب^2) = 3أ(ب \times 5ب)$

$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \times 3أ$

$= \begin{bmatrix} (4 \times 3) + (-2 \times -3) & (4 \times 12) + (-2 \times 9) \\ (-3 \times 3) + (0 \times -3) & (-3 \times 12) + (0 \times 9) \end{bmatrix} \times 3أ$

$= \begin{bmatrix} 18 & 30 \\ -9 & -36 \end{bmatrix} \times 3أ$

$= \begin{bmatrix} 54 & 90 \\ -27 & -108 \end{bmatrix}$

١٣/ $ن^{٢} = ن \times ن = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣- & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣- & ٥ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ن^{٢} = \begin{bmatrix} (٤\times٤)+(-٢\times-٣) & (٤\times-٢)+(-٢\times٥) \\ (-٣\times٤)+(٥\times-٣) & (-٣\times-٢)+(٥\times٥) \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} ١٧ & -١٨ \\ -١٥ & ٢٥ \end{matrix}$

$\Leftarrow ن^{٢} = \begin{bmatrix} ٢٢ & -١٨ \\ ٣١ & -٢٧ \end{bmatrix}$

* $ن^{٢}+٣ن^{٣} = \begin{bmatrix} ٢٢ & -١٨ \\ ٣١ & -٢٧ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٢ & -١٨ \\ ٣١ & -٢٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ن^{٢}+٣ن^{٣} = \begin{bmatrix} ٢٤ & -١٨ \\ ٣٣ & -٢٧ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ٣(ن^{٢}+٣ن^{٣}) = \begin{bmatrix} ٢٤\times٣ & -١٨\times٣ \\ ٣٣\times٣ & -٢٧\times٣ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ٣(ن^{٢}+٣ن^{٣}) = \begin{bmatrix} ٧٢ & -٥٤ \\ ٩٩ & -٨١ \end{bmatrix}$

• السؤال الخامس/

أ/ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & س \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & -٥ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$ وكانت $|٢أ-ب| = ١٢٣$ ، حيث $ب \neq ٠$

الحل/ $٢أ = \begin{bmatrix} ٣ & س \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} ٢ \Leftarrow ٢أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٢س \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$

$٢أ-ب = \begin{bmatrix} ٦ & ٢س \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & -٥ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢س+٥ \\ ١١ & -٤ \end{bmatrix}$

$|٢أ-ب| = \begin{vmatrix} ٦ & ٢س+٥ \\ ١١ & -٤ \end{vmatrix} = ١١(٢س+٥) - ٦\times-٤ = ١٢٣$

$١١(٢س+٥)+٢٤ = ١٢٣$

$١١(٢س+٥) = ١٢٣-٢٤$

$\frac{١١}{١١}(٢س+٥) = \frac{٩٩}{١١} \Leftarrow ٢س+٥ = ٩$

$\Leftarrow ٢س = ٩-٥ \Leftarrow \frac{٢}{٢}س = \frac{٤}{٢} \Leftarrow س = ٢$

أ.مي

$\Leftarrow ب = ٢أ \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & -٥ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} -١٥ & -١٠ \\ ٦- & ٣ \end{matrix}$

$\begin{matrix} ٤ & ١ \\ ٣- & ٤ \end{matrix}$

$\Leftarrow ب = \begin{bmatrix} -١٥ & -١٠ \\ -٦ & ٧ \end{bmatrix}$

ب/ ليكن $\int_{ب}^{٣} ق(س)\,دس - \int_{ب}^{٣} (ق(س) + ب)\,دس = \int_{٢}^{١٢} دس + |-٥ و_{٢}|$ ، ما قيمة/قيم الثابت ب

الحل/ الحل/

$$\int_{ب}^{٣} ق(س)\,دس - \left(\int_{ب}^{٣} ق(س)\,دس + \int_{ب}^{٣} ب\,دس\right) = س\Big|_{٢}^{١٢} + (-٥)^{٢}|و_{٢}|$$

$$\cancel{\int_{ب}^{٣} ق(س)\,دس} - \cancel{\int_{ب}^{٣} ق(س)\,دس} - \int_{ب}^{٣} ب\,دس = (١٢-٢) + ٢٥ \times \cancel{٠}$$

$$\Leftarrow -\frac{(ب س)}{-١}\Big|_{ب}^{٣} = \frac{١٠}{-١} \Leftarrow ب س\Big|_{ب}^{٣} = -١٠ \Leftarrow ب(٣-ب) = -١٠$$

$$\Leftarrow ٣ب - ب^{٢} = -١٠ \Leftarrow ب^{٢} - ٣ب - ١٠ = ٠ \Leftarrow (ب+٢)(ب-٥) = ٠$$

إما $ب + ٢ = ٠ \Leftarrow ب = -٢$ أو $ب - ٥ = ٠ \Leftarrow ب = ٥ \Leftarrow ب = \{-٢ ، ٥\}$

جـ/ إذا كان $هـ(س) = \frac{ق(س)}{٢س} - ٣\sqrt[٣]{س}$ وكان $-٢ق'(١) = ٢$ ، $هـ(١) = \frac{٥}{٢}$ ما قيمة $هـ'(١)$

الحل/ $هـ(س) = \frac{ق(س)}{٢س} - ٣س^{\frac{١}{٣}}$

$$هـ'(س) = \frac{٢س\,ق'(س) - ق(س) \times ٢}{(٢س)^{٢}} - ٣ \times \frac{١}{٣} س^{\frac{١}{٣}-١}$$

بتوحيد المقامات

$$\frac{١}{٣} - ١ = \frac{١}{٣} - \frac{٣}{٣} = \frac{-٢}{٣}$$

$$هـ'(١) = \frac{٢ق'(١) - ٢ق(١)}{(٢)^{٢}} - (١)^{-\frac{٢}{٣}}$$

$$هـ'(١) = \frac{٢ \times -١ - ٢ \times ١١}{٤} - ١$$

$$هـ'(١) = \frac{-٢ - ٢٢}{٤} - ١$$

$$= \frac{-٢٤}{٤} - ١ = -٦ - ١ = -٧$$

$$\Leftarrow هـ'(١) = -٧$$

• $\frac{-٢ق'(١)}{-٢} = \frac{٢}{-٢} \Leftarrow ق'(١) = -١$

• $هـ(س) = \frac{ق(س)}{٢س} - ٣\sqrt[٣]{س}$

$$هـ(١) = \frac{ق(١)}{٢} - ٣\sqrt[٣]{١}$$

$$\left(\frac{٥}{٢} = \frac{ق(١)}{٢} - ٣\right) \times ٢$$

$$٥ = ق(١) - ٦$$

$$+٦ \qquad +٦$$

$$١١ = ق(١)$$

أ.ميّ

• السؤال السادس

أ/ في نظام من معادلتين خطيتين على الصورة $أس + ب ص + جـ = ٠$ ، إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات ، $ب = \begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة الثوابت

اكتب المعادلتين الخطيتين الممثلتين للنظام.

الحل/ مصفوفة المعاملات × مصفوفة المتغيرات = مصفوفة الثوابت

$$\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times س)+(-1\times ص) \\ (4\times س)+(3\times ص) \end{bmatrix}$$

النظام / $س - ص = 1$ ، $4س + 3ص = 4$

ب/ إذا كان للاقتران $ق(س) = س^3 + ب س^2 - 8س$ قيمة صغرى عندما $س = 1$
وقيمة عظمى محلية عندما $(س = -3)$ ما قيمة كل من الثابتين $أ$ ، $ب$

الحل/ قيمة صغرى لـ $ق(س)$ وهو $(س)$ قابلاً للاشتقاق $\Leftarrow ق'(1) = 0$

قيمة عظمى عند $(س = -3) \Leftarrow ق'(-3) = 0$

$ق(س) = 3س^2 + 2ب س - 8$

$ق'(1) = 3(1)^2 + 2ب(1) - 8 \Leftarrow 0 = 3 + 2ب - 8 \Leftarrow -3 = -8 + 2ب \quad \ldots (1)$

$* \; ق'(-3) = 3(-3)^2 + 2ب(-3) - 8$

$0 = 27 - 6ب - 8 \Leftarrow 0 = 19 - 6ب \Leftarrow -27 = -8 - 6ب \quad \ldots (2)$

$-3 = -8 + 2ب$
$-27 = -8 - 6ب$

$24 = 8ب \Leftarrow ب = 3$ ، $-3 = -8 + 2(3) \Leftarrow -3 = -8 + 6ب$

$\Leftarrow -3 = -8 + 6 \Leftarrow 8 = 3 + 6 \Leftarrow 8 = 9$

د/ حل المعادلة المصفوفية $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} س + ص = س - 2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

الحل/ $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (4\times1) - (-2\times-1) = 4 - 2 = 2$

$\Leftarrow$ $-2س + ص = س - \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ $+2س$ $+2س$

$3س = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} أ & 1 \\ 1 & ب \end{bmatrix}$ $\Leftarrow$ $س = \frac{3}{3} = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$س = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{0}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$

" تمّت بحمد الله "

أ. مَيّ حوّاري

روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/adabi-kamel2

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath