Problème

1) On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1-|x| \text{ si } x \in [-1, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

a) Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$.

b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant f comme densité.

2) a) Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

3) Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} \quad \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} \quad \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.

4) a) Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.

b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.

c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) \text{ si } x \in [0, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

5) On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.
On pose $I = \operatorname{Inf}(U, V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $I(\omega) = \operatorname{Min}(\, U(\omega), V(\omega)\,)$.
On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on rappelle que, pour tout réel x, on a $P(I > x) = P(\, [U > x] \cap [V > x]\,)$.
Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I.

a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.
b) En déduire que I suit la même loi que Y.

6) On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ ($n \geq 2$), toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $I_n = \operatorname{Inf}(X_1, X_2, ..., X_n)$.
Déterminer la fonction de répartition de I_n et montrer que la suite (I_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.