

### Exercice 3

On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de  $n$  urnes, numérotées de 1 à  $n$ , contenant chacune  $n$  boules. On répète  $n$  épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée  $i$  contient toujours  $n$  boules au bout de ces  $n$  épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1) a) Pour tout  $i$  et pour tout  $k$ , éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $U_{i,k}$  l'événement « l'urne numéro  $i$  est choisie à la  $k^{\text{ème}}$  épreuve ».

Écrire l'événement  $(X_i = 1)$  à l'aide de certains des événements  $U_{i,k}$ , puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

b) Justifier également que, si  $i$  et  $j$  sont deux entiers distincts, éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on a :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

c) Comparer  $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$  et  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$  et en déduire que, si  $i$  et  $j$  sont deux entiers naturels distincts, éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , alors les variables aléatoires  $X_i$  et  $X_j$  ne sont pas indépendantes.

2) On pose  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$

a) Déterminer l'espérance de  $Y_n$ , notée  $E(Y_n)$ .

b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$  et donner un équivalent de  $E(Y_n)$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ .

3) Pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $N_i$  la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée  $i$  à la fin de ces  $n$  épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de  $N_i$  ainsi que la valeur de  $E(N_i)$ .

b) Que vaut le produit  $N_i X_i$  ?

c) Les variables  $N_i$  et  $X_i$  sont-elles indépendantes ?