Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}(1+\frac{1}{2^k}) = (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})\dots(1+\frac{1}{2^n})$.

1) Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

3) a) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

4) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.

5) On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\ln(\frac{\ell}{u_n}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})$.

c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0 \leq \ln(\frac{\ell}{u_n}) \leq \frac{1}{2^n}$.

d) Déduire de la question précédente que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1 - e^{-\frac{1}{2^n}})$.

e) Justifier que, pour tout réel x, on a : $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.

Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.