Problème

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes:

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \text{ et } f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1.$$

Partie 1 : étude de *f*.

1) a) Écrire la matrice M de f dans $\mathcal{B}$.

b) Déterminer la dimension de $\operatorname{Im} f$ puis celle de $\operatorname{Ker} f$.

c) Donner alors une base de $\operatorname{Ker} f$, puis en déduire une valeur propre de f ainsi que le sous-espace propre associé.

d) Déterminer les autres valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

e) En déduire que f est diagonalisable.

2) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Justifier sans calcul que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.

b) Calculer PQ puis en déduire P^{-1}.

c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a : $M^j = PD^j P^{-1}$.

d) Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k\in\mathbb{N}^*$) :

Soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.

Soit X_k a pris une valeur j, différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1) Reconnaître la loi de X_1.

3) On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $P(X_k = i)$.

a) Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

b) On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements. Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $U_{k+1} = AU_k$.

c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors , pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = A^kU_0$.

4) a) Vérifier que $A = M + \frac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

b) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right),\ P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

c) Montrer que la suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

5) a) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.