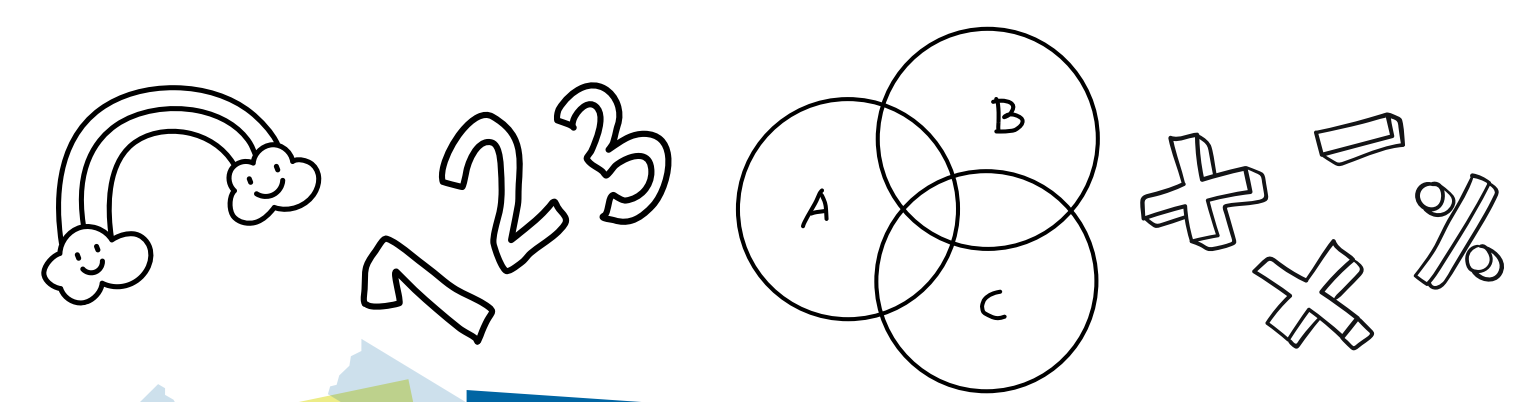


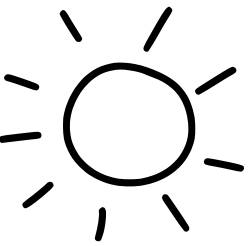
2025
2026
الفصل الأول

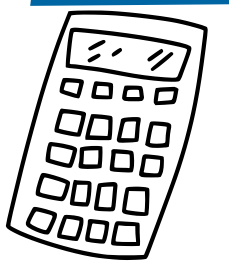
حلـــــول الكـــامـــل

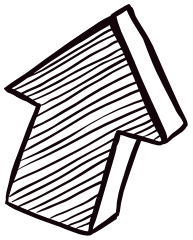
تـــوجـــيهي
علمي

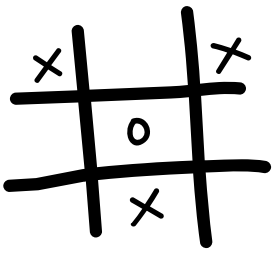
الوحدة الأولى

إعداد: أ.ميّ عمار حوّاري





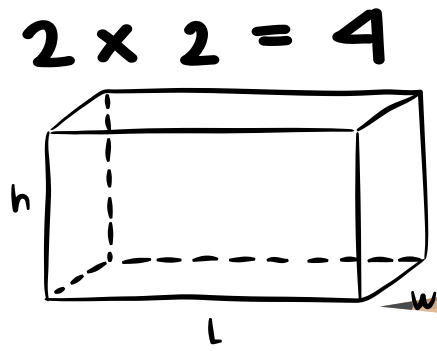






موقع قطرة التعليمي

Qatraedu.com



+972 59-276-7085



مـقــدمـــــــة

إيماناً منا بضــرورة توفير أفضــل المصــادر التعليمية لطلبتنا في مرحلة الثانوية العامة، يسّـر فريق موقع قطرة التعليمي تقديم الإجابات النموذجية لـ "كراسة الكامل" (تصنيف أسئلة السنوات السابقة).

تأتي هذه الحلول ضمن إطار جهودنا المستمرة في موقع قطرة التعليمي، الذي تأسس برؤية طموحة تهدف إلى تزويد طلاب التوجيهي بتعليم عالي الجودة، لا سيما في مادة الرياضيات، مستخدمين أحدث الأساليب والوسائل التعليمية العالمية.

وقد تم إعداد هذه الكراسـة خصـيصـاً لطلاب الفرع العلمي، لتتضـمن حلولاً مفصـلة وشـرحاً وافياً لكل الأســئلة، انطلاقاً من إيماننا بأن التعلم الرقمي يمنح الطالب مرونة الوصـــول إلى المعرفة في أي وقت ومن أي مكان.

وإننا في موقع قطرة التعليمي، نؤمن بأن وراء كل إنجاز عظيم جنوداً مجهولين؛ لذا نتقدم بأســمى آيات الشـكر والتقدير للمعلّمة الفاضـلة **ميّ عمار حوّاري**، عضـو فريقنا المتميز، التي سـخرت وقتها وجهدها وخبرتها العميقة في إعداد هذه الحلول بدقة وإتقان. إن خبرتها الواسـعة تجلت في أسـلوب الشـرح المبسـط والواضـح الذي يضـع مصـلحة الطالب وتفوقه الأكاديمي في المقام الأول؛ فجزيل الشـكر لها، ونسـأل الله أن يجعل هذا العمل في ميزان حسناتها.

أتمنى أن تكون هذه الكراسـة عونًا لكم في رحلتكم نحو النجاح، وأن تسـاهم في تحقيق التفوق والتميز الذي تسعون إليه.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح الدائم.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

إهـــــــداء

إلى صاحبةُ القلبِ الأحنّ،

والأثر الأعمق،

إلى من كان حضورها فرقًا،

وكلماتها أثرًا لا يزول،

من غرست بداخلي حلمًا لا يزال يكبر،

ملهمتي وقدوتي... نجمتي اللامعة،

معلمتي الغالية **رولا بطة**، حفظكِ الله ورعاكِ دائمًا

أ. ميّ عمار حوّاري

روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/kamel1

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath

نصائح مهمة لكيفية دراسة الرياضيات؟

عزيزي الطالب/ عزيزتي الطالبة، إليك بعض النصائح التي ستساعدك على التفوق في دراستك لهذه المادة وتحقيق أفضل النتائج:

1. **إخلاص النية لله.**
2. **التوكل على الله** بالأخذ بجميع أسباب التفوق، والدعاء والالحاح فيه فهو من أعظم أسلحة المسلم.
3. **فهم الأساسيات أولًا:** تأكد من أنك تفهم الأساسيات بشكل جيد. ولضمان التمكن من الأساسيات فقد وفرنا دورة مجانية عبر موقع قطرة التعليمي.
4. **التدريب المستمر باستخدام الورقة والقلم:** الحل المتكرر هو الطريق إلى الإتقان، حل المسائل بانتظام وبشكل يومي سيعزز من فهمك ويساعدك على استيعاب المفاهيم بشكل أعمق.
5. **افهم المسألة قبل الحل:** لا تتسرع في حل المسألة دون فهم كامل لمتطلباتها، خذ وقتك في قراءة السؤال جيدًا، وفهم المطلوب قبل الشروع في الحل، التسرع قد يؤدي إلى أخطاء غير ضرورية.
6. **حل المسائل بطريقة منظمة:** نظم خطوات الحل بطريقة واضحة ومنهجية، تدوين الخطوات بتسلسل منطقي يساعدك على متابعة الحل والتعرف على أي خطأ قد يحدث بسهولة، هذا الأسلوب يعزز أيضًا من فرصك في الحصول على درجات كاملة.
7. **راجع بانتظام:** خصص وقتًا لمراجعة ما تعلمته بانتظام، ولا تترك الأمور تتراكم حتى اقتراب موعد الامتحانات، المراجعة المستمرة تسهل تذكر المعلومات وتجعلك أكثر استعدادًا للامتحان.
8. **لا تخجل من طلب المساعدة:** إذا واجهت صعوبة في فهم مفهوم معين أو في حل مسألة ما، لا تتردد في طلب المساعدة من معلمك أو زملائك، الحوار والتفاعل مع الآخرين قد يفتح لك آفاقًا جديدة لفهم المادة.
9. **حافظ على هدوئك وثقتك بنفسك:** التوتر قد يؤثر سلبًا على أدائك، حافظ على هدوءك وثقتك بنفسك أثناء الدراسة وفي الامتحانات، تذكر أن النجاح في الرياضيات يعتمد على الاستمرارية والعمل الجاد، وليس على الحفظ فقط.

10. **استعد للامتحانات بالتحضير المبكر:** لا تنتظر حتى اللحظة الأخيرة، ابدأ في التحضير للامتحانات قبل وقت كافٍ، وضع خطة دراسية تغطي جميع الوحدات بشكل متوازن، قم بحل أسئلة الامتحانات السابقة المرفقة في هذه الكراسة، وتأكد من مراجعة الحلول بعد الانتهاء.
11. **قم بتحليل الأخطاء:** عند ارتكاب خطأ في حل مسألة، لا تتجاهله. بدلاً من ذلك، عد إليه وحاول فهم سبب الخطأ وكيف يمكنك تجنبه في المستقبل، التعلم من الأخطاء يُعد أحد أفضل الطرق لتطوير مهاراتك الرياضية.
12. **اجعل لك دفتراً خاصاً لتدوين كل ما يتم دراسته واحرص على تدوين الملاحظات المهمة:** أثناء حل المسائل أو مشاهدة الفيديوهات، احرص على تدوين كل شيء لأنه سيكون من الصعب مشاهدة الفيديوهات في يوم واحد مثل يوم الامتحان، وكتابة الملاحظات المهمة تساعدك على تنظيم أفكارك وتذكر النقاط المهمة عند المراجعة لاحقًا.

نتمنى لك التوفيق والنجاح في رحلتك الدراسية، ونتطلع لأن تكون هذه الكراسة عونًا لك في تحقيق أهدافك في مادة الرياضيات. تذكر أن كل مجهود تبذله اليوم سيثمر في المستقبل.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

الدرس الأول | متوسط التغير

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2007 / إذا كان ق(س) = س² ، فإن قيمة متوسط التغير عندما تتغير س من -١ إلى ٣ يساوي :

أ/ ٢ ب/ $\frac{٥}{٢}$ ج/ ٤ د/ ٥

الحل/ متوسط التغير = $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{ق(٣) - ق(-١)}{٣ - -١}$ = $\frac{(٣)^٢ - (-١)^٢}{٤}$ = $\frac{٩ - ١}{٤}$ = ٢

• 2008 / إذا كان الاقتران ق(س) = س + [س] ، ما قيمة متوسط التغير في الفترة [$\frac{١}{٢}$ ، ١]

أ/ ٢ ب/ ٣ ج/ $\frac{٢}{٣}$ د/ $\frac{٣}{٢}$

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [$\frac{١}{٢}$ ، ١] = $\frac{ق(١) - ق(\frac{١}{٢})}{١ - \frac{١}{٢}}$ = $\frac{(١ + [١]) - (\frac{١}{٢} + [\frac{١}{٢}])}{\frac{١}{٢}}$

= $\frac{(١ + ١) - (\frac{١}{٢})}{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{٢ - \frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{\frac{٣}{٢}}{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{٣}{\cancel{٢}} \times \frac{\cancel{٢}}{١}$ = ٣

• 2009 إكمال / إذا كان متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٣ تساوي (٤) وكانت ق(٣) = ٨ فإن ق(١) =

أ/ ١٦ ب/ ٢ ج/ صفر د/ ٤

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ = ٤ ⇐ $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$ = ٤ ⇐ ٨ - ق(١) = ٨ ⇐ (-ق(١) = ٠) × -١ ⇐ ق(١) = ٠

• 2010 إكمال / إذا كان متوسط تغير ق(س) في الفترة [١ ، ١٦] يساوي (٩) فإن متوسط تغير الاقتران ق(س²) في الفترة [١ ، ٤] هو :

أ/ ٩ ب/ ٣ ج/ ٤٥ د/ ١٥

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [١ ، ١٦] = ٩ ⇐ $\frac{ق(١٦) - ق(١)}{١٦ - ١}$ = ٩ ⇐ $\boxed{ق(١٦) - ق(١) = ٩ \times ١٥}$

نفرض ل(س) = ق(س²)

$\frac{\Delta ل(س)}{\Delta س}$ في [١ ، ٤] = $\frac{ل(٤) - ل(١)}{٤ - ١}$ = $\frac{ق(٤^٢) - ق(١^٢)}{٣}$ = $\frac{\boxed{ق(١٦) - ق(١)}}{٣}$ = $\frac{٩ \times \cancel{١٥}^{٥}}{\cancel{٣}}$ = ٤٥

• 2016 دور أول / اذا كان الاقتران ق(س) ، بحيث ق(٣) = ق(٥) + أ ، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) في [٣ ، ٥] يساوي (١٠) ، ما قيمة الثابت أ

أ/ ٢٠ ب/ -٥ ج/ -١٠ د/ -٢٠

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [٣ ، ٥] = ١٠

⇐ $\frac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣}$ = ١٠

$\boxed{ق(٥) - ق(٣)}$ = ٢٠

⇐ (-أ = ٢٠) × -١

أ = -٢٠

$\boxed{\begin{array}{l} ق(٣) = ق(٥) + أ \\ -أ = ق(٥) - ق(٣) \end{array}}$

• 2016 إكمال/ إذا كان الاقتران ق(س) = ٢ − س² معرفاً على [١، ب] ، بحيث كان متوسط تغير ق(س) في تلك الفترة يساوي (−٣) ، ما قيمة الثابت ب

أ/ ٢ ب/ ٣ ج/ ٤ د/ ١,٥

الحل/ طريقة (١):

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [١، ب] = −٣ ⇐ $\frac{ق(ب) - ق(١)}{ب - ١} = -٣$

⇐ $\frac{(٢ - ب^٢) - (٢ - ١^٢)}{ب - ١} = -٣$ ⇐ $\frac{٢ - ب^٢ - ١}{ب - ١} = -٣$

⇐ $\left(\frac{١ - ب^٢}{ب - ١} = -٣\right) \times -١$ ⇐ $\frac{ب^٢ - ١}{ب - ١} = ٣$ فرق مربعين

⇐ $\frac{(ب - ١)(ب + ١)}{(ب - ١)} = ٣$ ، ب ≠ ١

ب + ١ = ٣ ⇐ ب = ٢

طريقة (٢):

اذا كان ق(س) = أ س² + ب س + جـ ، أ ≠ ٠ :

فإن $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [س١، س٢] = أ(س١ + س٢) + ب

• ملاحظة: يستخدم هذا القانون فقط في ضع دائرة

وعليه

أ = −١ ، س١ = ١ ، س٢ = ب ، ب = ؟

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ = أ(س١ + س٢) + ب

(−٣ = −(١ + ب)) × −١ ⇐ ٣ = ١ + ب ⇐ ٢ = ب

• 2017 دور أول/ إذا كان متوسط تغير ق(س) في [٢، ١٧] يساوي (٩) فإن متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ق(س² + ١) في الفترة [١، ٤] يساوي :

أ/ ٣ ب/ ٤٩ ج/ ١٥ د/ ٤٥

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [٢، ١٧] = ٩ ⇐ $\frac{ق(١٧) - ق(٢)}{١٧ - ٢} = ٩$ ⇐ $\boxed{ق(١٧) - ق(٢) = ٩ \times ١٥}$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س}$ في [١، ٤] = $\frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١} = \frac{ق(٤^٢ + ١) - ق(١ + ١)}{٣} = \frac{\boxed{ق(١٧) - ق(٢)}}{٣}$

$= \frac{٩ \times ١٥}{٣} = ٤٥$

• 2017 دور ثاني/ إذا كان متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س بين (س = ١) ، (س = ٩) مساوياً (٥) فإن متوسط تغير ل(س) = س² ق(٢س + ٥) بين (س = −٢) ، (س = ٢) يساوي :

أ/ ١٠ ب/ ٤٠ ج/ ٢٠ د/ −٤٠

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(٩) - ق(١)}{٩ - ١} = ٥$ ⇐ $\boxed{ق(٩) - ق(١) = ٤٠}$

$\frac{\Delta ل(س)}{\Delta س} = \frac{ل(٢) - ل(-٢)}{٢ - -٢} = \frac{(٢)^٢ ق(٢ \times ٢ + ٥) - (-٢)^٢ ق(٢ \times -٢ + ٥)}{٤} = \frac{٤ق(٩) - ٤ق(١)}{٤}$

$= \frac{٤(ق(٩) - ق(١))}{٤} = \boxed{ق(٩) - ق(١)} = ٤٠$

• 2018 دور أول/ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = س² − ٥ في الفترة [١، أ + ١] يساوي (٩) فإن قيمة الثابت أ هي :

أ/ صفر ب/ ٣ ج/ ٧ د/ ٩

الحل/ طريقة (١): $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [١، أ + ١] = ٩ ⇐ $\frac{ق(أ + ١) - ق(١)}{أ + ١ - ١} = ٩$

$\leftarrow \frac{(ق^{2}(1+ق)-(0-1)}{ق} = 9 \leftarrow \frac{ق^{2}(1+ق)-0-ع}{ق} = 9 \leftarrow \frac{ق^{2}(1+ق)-1}{ق} = 9$ فرق مربعين

$\leftarrow \frac{(ق+1-1)(ق+1+1)}{ق} = 9 \leftarrow \frac{ق(ق+2)}{ق} = 9 \quad ق \neq 0 \quad \therefore \leftarrow ق+2=9 \leftarrow ق=7$

طريقة (2): $ق=1$ و $س_1=1$ و $س_2=1+ق$ و $ن=2$

$\frac{د ص(س)}{د س} = ق(2س+س_2)+ن \leftarrow 9=(1+1+ق) \leftarrow 9=2+ق \leftarrow ق=7$

• 2018 دور ثالث/ اذا كان متوسط تغير الاقتران ص(س) في [3،1] يساوي (4) وكان متوسط تغير الاقتران في [7،3] يساوي (-5) وما متوسط تغير ص(س) في [7،1]

أ/ 2ق ب/ 1 ج/ -1 د/ -2

الحل/ $\frac{د ص(س)}{د س}$ في $[3،1] = 4 \leftarrow \frac{ص(3)-ص(1)}{3-1} = 4 \leftarrow ص(3)-ص(1) = 8$ ـــ (1)

$\frac{د ص(س)}{د س}$ في $[7،3] = -5 \leftarrow \frac{ص(7)-ص(3)}{7-3} = -5 \leftarrow ص(7)-ص(3) = -20$ ـــ (2)

بجمع (1) + (2) $\leftarrow$ $ص(7)-ص(1) = -12$

$\frac{د ص(س)}{د س}$ في $[7،1] = \frac{ص(7)-ص(1)}{7-1} = \frac{-12}{6} = -2$

• 2019 دور أول/ إذا قطع المستقيم ل منحنى ص(س) في النقطتين $(ن، ص(ن))$ و $(\pi، ص(\pi))$ ما قياس زاوية ميل المستقيم ل علما بأن التغير في ص(س) في $[ن، \pi]$ يساوي $(-\pi)$:

أ/ صفر ب/ $\frac{\pi}{4}$ ج/ $\frac{\pi}{2}$ د/ $\frac{3\pi}{4}$

الحل/ ميل المستقيم ل $= \frac{د ص(س)}{د س} \leftarrow ظا\theta = \frac{ص(\pi)-ص(ن)}{\pi-ن}$

$\leftarrow \frac{-\pi}{\pi} = ظا\theta \leftarrow -1 = ظا\theta \leftarrow \theta = 135° = \frac{3\pi}{4}$

• 2019 دور ثاني/ إذا كان $ص(س) = س \, ك(س)$ وكان متوسط تغير ص(س) في $[-3،1]$ يساوي (-2) و $ك(3) = -3$ و ما قيمة $ك(-1)$

أ/ -2 ب/ -1 ج/ 1 د/ 2

الحل/ $\frac{د ص(س)}{د س}$ في $[-3،1] = -2 \leftarrow \frac{ص(3)-ص(-1)}{3-(-1)} = -2 \leftarrow 3ك(3)-(-1)ك(-1) = -8$

$\leftarrow 3(-3)+ك(-1) = -8 \leftarrow -9+ك(-1) = -8 \leftarrow ك(-1) = 1$

• 2020 دور أول/ إذا كان متوسط تغير $ص(س) = س + لو_{ق}(س)^{ن}$ و $س > 1$ عندما تتغير س من 1 إلى ق يساوي $\frac{ق-2}{ق-1}$ ما قيمة ن:

أ/ -1 ب/ 1 ج/ -3 د/ $ق-2$

الحل/ $ص(س) = س + لو_{ق}(س)^{ن} \leftarrow ص(س) = س + ن لو_{ق} س$

$\frac{د ص(س)}{د س}$ في $[ق،1] = \frac{ص(ق)-ص(1)}{ق-1} \leftarrow \frac{ق-2}{ق-1} = \frac{-(2-ق)}{ق-1}$

$\Leftarrow \quad (ن+5\log_{5}) - (1+ن\log_{5}) = 5-3$

$(ن+5) - 1 = 5-3$

$ن-1=-2 \Leftarrow ن=-1$

تذكر:
- $\log_{ب} 1 = 0$
- $\log_{ب} ب = 1$
- $\log_{ب} ب^{ن} = ن$

2020 دورتان/ إذا كان متوسط التغير للاقتران $و(س) = 3س^{2} - 2س$ في $[2, ك]$ يساوي (16) فما قيمة الثابت ك

ك/ 2 ب/ $\frac{14}{9}$ ج/ 1 د/ $\frac{22}{9}$

الحل/ طريقة (1):

$\frac{د و(س)}{د س}$ في $[2, ك] = 16$

$\Leftarrow \frac{و(ك) - و(2)}{ك - 2} = 16$

$\Leftarrow \frac{(ك^{3} - 2ك^{2}) - (2^{3} - 2(2)^{2})}{ك-2} = 16$

$\Leftarrow \frac{ك^{3} - 2ك^{2} - 8 + 8}{ك-2} = 16 \Leftarrow \frac{ك^{2}(ك-2)}{ك-2} = 16$

$\because ك \neq 2$

$\Leftarrow ك^{2} = 16 \Leftarrow ك^{2} - 16 = 0$

$(ك-4)(ك+4) = 0$

$ك = 4 \Leftarrow ك = -4$ مرفوض

طريقة (2):

$ك = 3، س_{1} = 2، س_{2} = ك$ و $ن = 2$

$\frac{د و(س)}{د س} = 3س^{2} + ب$

$\frac{16}{2} = 3(ك^{2} + 2^{2}) + ب$

$16 = 3ك^{2} + 12 + ب$

$3ك^{2} = 4 \times 3$

$ك^{2} = \frac{12}{3} = 4$

$ك = 2$

2020 دورة أول/ إذا كان $و(4) = و(1)$ حيث هـ العدد النيبري، فما متوسط تغير الاقتران $ع(س) = \log_{هـ} و(س)$ في $[1, 4]$

ك/ $-\frac{1}{هـ}$ ب/ $\frac{1}{هـ}$ ج/ $-\frac{1}{3}$ د/ $\frac{1}{3}$

الحل/ $\frac{د ع(س)}{د س}$ في $[1, 4] = \frac{ع(4) - ع(1)}{4-1} = \frac{\log_{هـ} و(4) - \log_{هـ} و(1)}{3}$

$= \frac{\log_{هـ}(و(4) \div و(1))}{3} = \frac{\log_{هـ} و(4) - \log_{هـ} و(1)}{3}$

$= \frac{\log_{هـ} و(1) + \log_{هـ} 1 - \log_{هـ} و(1)}{3} = \frac{\log_{هـ}}{3} = \frac{1}{3}$

تذكر:
- $\log(ب^{ن}) = ن \log ب$
- $\log(\frac{ك}{ب}) = \log ك - \log ب$

2021 دورتان/ إذا كان متوسط تغير $و(س)$ في $[2, 2+ج]$ يساوي $(ج)$ فما قيمة التغير في $و(س)$

ك/ $\frac{ج}{2}$ ب/ $\frac{ج}{3}$ ج/ $2ج$ د/ $3ج$

الحل/ $\frac{د و(س)}{د س}$ في $[2, 2+ج] = \frac{و(2+ج) - و(2)}{2+ج-2} = ج$

$و(2+ج) - و(2) = 2ج$

$\Leftarrow د و(س) = 2ج$

• 2022 دور أول / إذا كان ق(س) = س² − ٨س + ١٨ ، ما متوسط تغير ق(س) في [٤، ٥]

أ/ ٢ ب/ ١ ج/ −١ د/ −٢

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [٤، ٥] = $\frac{ق(٥) - ق(٤)}{٥ - ٤}$ = (٥² − ٨×٥ + ١٨) − (٤² − ٨×٤ + ١٨)

= (٢٥ − ٤٠ + ١٨) − (١٦ − ٣٢ + ١٨) = (−١٥ + ١٨) − (−١٦ + ١٨) = ٣ − ٢ = ١

• 2023 دور ثاني / اذا كان ق(س) = { ٦ − س ، س ≤ ٢ ؛ س² + أس ، س > ٢ } ، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) في [١، ٣] يساوي (٥) ، ما قيمة الثابت أ

أ/ $\frac{١٣}{٢}$ ب/ ١٠ ج/ ٢ د/ $\frac{٩}{٢}$

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [١، ٣] = ٥ ⇐ $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$ = ٥ ⇐ (٣² + ٣أ) − (٦ − ١) = ١٠

⇐ ٩ + ٣أ − ٥ = ١٠ ⇐ ٣أ + ٤ = ١٠ ⇐ ٣أ = ٦ ⇐ أ = ٢

• 2024 دور أول / ما متوسط تغير الاقتران ل(س) = لو$_{هـ}$ ق(س) في [١، ٥] حيث ق(س) > ٠ ، س ∈ [١، ٥]

وكان ق(٥) = هـ ق(١) ، هـ عدد النيبيري :

أ/ $\frac{-هـ}{٤}$ ب/ $\frac{هـ}{٤}$ ج/ $\frac{١}{٤}$ د/ ١

الحل/ $\frac{\Delta ل(س)}{\Delta س}$ = $\frac{ل(٥) - ل(١)}{٥ - ١}$ = $\frac{لو_{هـ} ق(٥) - لو_{هـ} ق(١)}{٤}$

= $\frac{لو_{هـ}\left(\frac{ق(٥)}{ق(١)}\right)}{٤}$ = $\frac{لو_{هـ} هـ}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

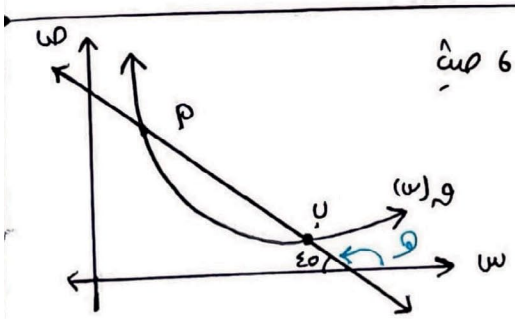
ق(٥) = هـ ق(١)
⇐ $\frac{ق(٥)}{ق(١)}$ = هـ

• 2024 دور ثاني / إذا كان متوسط تغير ق(س) في الفترة [−١، ٣] يساوي (٢) ما قيمة التغير في ق(س) على نفس الفترة :

أ/ $\frac{١}{٤}$ ب/ ٤ ج/ ٨ د/ ١٦

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [−١، ٣] = ٢ ⇐ $\frac{\Delta ق(س)}{٣ - −١}$ = ٢ ⇐ Δ ق(س) = ٨

• 2025 دور أول / يمثل الشكل المجاور منحنى ق(س) والقاطع أب ، حيث أ(١، ٥) ، ب(٤، ق(٤)) ما قيمة ق(٤)



أ/ ١ ب/ ٢ ج/ ٣ د/ ٨

الحل/ أ(١، ٥) ب(٤، ق(٤))

زاوية ميل القاطع = هـ = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥°

⇐ ظا هـ = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ⇐ ظا ١٣٥ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

⇐ −١ = $\frac{ق(٤) - ٥}{٤ - ١}$ ⇐ −٣ = ق(٤) − ٥ ⇐ ٢ = ق(٤)

• 2025 دور ثاني/ إذا كان متوسط تغير ق(س) في [١، ٣] يساوي (٤) ومقدار تغير في ق(س) في [٣، ٧] يساوي (-٥) ما قيمة ق(١) - ق(٧)

أ/ -٢ ب/ ٢ جـ/ -٣ د/ ٣

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [١، ٣] = ٤ ⇐ $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$ = ٤ ⇐ ق(٣) - ق(١) = ٨ — *

$\Delta ق(س)$ في [٣، ٧] = -٥ ⇐ ق(٧) - ق(٣) = -٥ — **

بجمع * و ** ⇐ (ق(٧) - ق(١) = ٣) × -١ ⇐ ق(١) - ق(٧) = -٣

• 2019 مديرية طولكرم/ إذا كان متوسط تغير ق(س) في [٢، ٥] يساوي (١٠) وكان ق(٢) ق(٥) = ١٥ فإن متوسط تغير ع(س) = $\frac{٩}{ق(س)}$ في نفس الفترة هو:

أ/ ٦ ب/ -٦ جـ/ ٩ د/ ١٨

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [٢، ٥] = ١٠ ⇐ $\frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢}$ = ١٠ ⇐ $\boxed{ق(٥) - ق(٢) = ٣٠}$

$\frac{\Delta ع(س)}{\Delta س}$ في [٢، ٥] = $\frac{ع(٥) - ع(٢)}{٥ - ٢}$ = $\frac{\frac{٩}{ق(٥)} - \frac{٩}{ق(٢)}}{٣}$ = $\frac{٩\left(\frac{١}{ق(٥)} - \frac{١}{ق(٢)}\right)}{٣}$ ← توحيد مقامات

= ٣ $\left(\frac{\boxed{ق(٢) - ق(٥)}}{ق(٢) ق(٥)}\right)$ = $\frac{٣ \times -٣٠}{١٥}$ = -٦

• 2019 طولكرم/ إذا كان متوسط تغير ق(س) = ٢س² + ٣س في [ب، ٣ب] يساوي ١١، ما قيمة الثابت ب:

أ/ -٢٢ ب/ -١ جـ/ ١ د/ ٢٢

الحل/ طريقة (١):

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [ب، ٣ب] = ١١ ⇐ $\frac{ق(٣ب) - ق(ب)}{٣ب - ب}$ = ١١ ⇐ $\frac{(٢(٣ب)^٢ + ٣(٣ب)) - (٢ب^٢ + ٣ب)}{٢ب}$ = ١١

⇐ $\frac{١٨ب^٢ + ٩ب - ٢ب^٢ - ٣ب}{٢ب}$ = ١١ ⇐ $\frac{١٦ب^٢ + ٦ب}{٢ب}$ = ١١ ⇐ $\frac{٢ب(٨ب + ٣)}{٢ب}$ = ١١ ، ب ≠ ٠

⇐ ٨ب + ٣ = ١١ ⇐ ٨ب = ٨ ⇐ ب = ١

طريقة (٢): أ = ٢ ، ب = ٣ ، س١ = ب ، س٢ = ٣ب

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ = أ(س١ + س٢) + ب ⇐ ١١ = ٢(ب + ٣ب) + ٣ ⇐ ١١ - ٣ = ٢ × ٤ب + ٣ - ٣

$\frac{٨}{٨} = \frac{٨ب}{٨}$ ⇐ ب = ١

• 2020 مديرية قلقيلية/ إذا كان ك(س) = $\sqrt{س}$ ق(س) وكان متوسط تغير ك(س) في [٤، ٩] يساوي ٨ ، ك(٩) = ١٨ ، فإن قيمة ق(٤) =

أ/ -٤٤ ب/ -١١ جـ/ -٢٢ د/ ٢٩

الحل/ $\frac{\Delta ك(س)}{\Delta س}$ في [٤، ٩] = ٨ ⇐ $\frac{ك(٩) - ك(٤)}{٩ - ٤}$ = ٨ ⇐ ١٨ - ك(٤) = ٤٠

-١٨ -٤٧ $\text{ق}(٤) = ٤٠$ $\Leftarrow$ $-٣\text{ق}(٤) = ٣٣$ $\Leftarrow$ $\text{ق}(٤) = -١١$

• 2020 حولبا-س/ إذا كان متوسط التغير في $\text{ق}(س) = -٣س^{٤} + \text{ع}$ في $[\text{ب}، ٢]$ هو (-٦) فما قيمة/قيم الثابت ب:

ع/ -٣٤ ب/ -٢ د/ -٤ ه/ -٣٤

الحل/ طريقة (١):

$\frac{\text{د}\,\text{ق}(س)}{\text{د}\,س}$ في $[\text{ب}، ٢] = -٦ \Leftarrow \frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(\text{ب})}{٢ - \text{ب}} = -٦ \Leftarrow \frac{(٣(٢)^{٤} + \text{ع}) - (٣\text{ب}^{٤} + \text{ع})}{٢ - \text{ب}} = -٦$

$\Leftarrow \frac{١٢ + \text{ع} - ٣\text{ب}^{٤} - \text{ع}}{٢ - \text{ب}} = -٦ \Leftarrow \frac{٣(٤ - \text{ب}^{٤})}{٢ - \text{ب}} = -٦ \Leftarrow \frac{٣(٢ - \text{ب})(٢ + \text{ب})}{(٢ - \text{ب})} = -٦ \quad ؛ \text{ب} \neq ٢$

$\Leftarrow \frac{٣}{٣}(٢ + \text{ب}) = \frac{-٦}{٣} \Leftarrow ٢ + \text{ب} = -٢ \Leftarrow \text{ب} = -٤$

طريقة (٢):

ع $= ٣$ $\quad$ ق$س_{١}$ $= \text{ب}$ $\quad$ ق$س_{٢}$ $= ٢$

$\frac{\text{د}\,\text{ق}(س)}{\text{د}\,س} = ٣(س^{٢} + \text{ع}) + \text{ب} \Leftarrow -٦ = ٣(٤ + ٢) \Leftarrow -٢ = \text{ب} + ٢ \Leftarrow \text{ب} = -٤$

• 2020 خاص يوسف/ ما قيمة متوسط تغير $\text{ق}(س) = |س - ١٢|$ في $[٣، ٢]$

أ/ ١ ب/ ٢ ج/ ٣ د/ ١-

الحل/ $\frac{\text{د}\,\text{ق}(س)}{\text{د}\,س}$ في $[٣، ٢] = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(٢)}{٣ - ٢} = \frac{|٣ - ١٢| - |٢ - ١٢|}{١} = \frac{١ - ١٠}{١} = ١$

• 2024 الخليل/ إذا كان متوسط التغير للاقتران $\text{ق}(س)$ في $[٢، ٤]$ يساوي (٥) وكان $\text{ق}(٢)\text{ق}(٤) = ٨$

$٣\text{ه}(س)\,\text{ق}(س) = ١$ حيث متوسط تغير $\text{ه}(س)$ على نفس الفترة:

أ/ $\frac{-٥}{١٦}$ ب/ $\frac{٥}{١٦}$ ج/ $\frac{-٥}{٨}$ د/ $\frac{٥}{٨}$

الحل/ $\frac{\text{د}\,\text{ق}(س)}{\text{د}\,س}$ في $[٢، ٤] = ٥ \Leftarrow \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٢)}{٤ - ٢} = ٥ \Leftarrow \boxed{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٢) = ١٠}$

$٣\text{ه}(س)\,\text{ق}(س) = ١ \Leftarrow \text{ه}(س) = \frac{١}{٣\text{ق}(س)}$

$\frac{\text{د}\,\text{ه}(س)}{\text{د}\,س}$ في $[٢، ٤] = \frac{\text{ه}(٤) - \text{ه}(٢)}{٤ - ٢} = \frac{\frac{١}{٣\text{ق}(٤)} - \frac{١}{٣\text{ق}(٢)}}{٢} = \frac{\frac{١}{٣}\left(\frac{١}{\text{ق}(٤)} - \frac{١}{\text{ق}(٢)}\right)}{٢}$

$= \frac{\frac{١}{٣}\left(\frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(٤)}{\text{ق}(٢)\,\text{ق}(٤)}\right)}{٢} = \frac{\frac{١}{٣} \times \frac{-١٠}{٨}}{٢} = \frac{-٥}{٨} \times \frac{١}{٢} = \frac{-٥}{١٦}$

• 2024 طولكرم / إذا كان متوسط تغير $\text{ق}(س)$، $\text{ه}(س)$ للفترة $[٣، ١]$ يساوي $\frac{-٥}{١٢}$ و ٥ على الترتيب وكان $\text{ه}(س) = \frac{١}{\text{ق}(س)}$ ما قيمة $\text{ق}(١)\,\text{ق}(٣)$

أ/ ٢٤ ب/ ١٢ ج/ ٦ د/ -٦

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في $[١،٣] = ٥ \Leftarrow \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = ٥ \Leftarrow \boxed{ق(٣) - ق(١) = ١٠}$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س}$ في $[١،٣] = \frac{-٥}{١٢} \Leftarrow \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{\cancel{٣ - ١}} = \frac{-٥}{\cancel{١٢}\,٦} \Leftarrow \frac{١}{ق(٣)} - \frac{١}{ق(١)} = \frac{-٥}{٦}$

$\Leftarrow \frac{\boxed{ق(١) - ق(٣)}}{ق(٣)ق(١)} = \frac{-٥}{٦} \Leftarrow \frac{\cancel{-١٠}\,٢}{ق(١)ق(٣)} = \frac{\cancel{-٥}}{٦} \Leftarrow ٢ \times ٦ = ق(١)ق(٣) \Leftarrow ١٢ = ق(١)ق(٣)$

• 2025 بيرزيت/ اذا كان الاقتران $ق(س) = س^٢ هـ(س)$ وكان متوسط تغير $هـ(س)$ في $[-٢،٢]$ يساوي (٣) ، ما مقدار التغير في $ق(س)$ على نفس الفترة :

أ/ ٣ ب/ ١٢ ج/ ٤٨ د/ ٥٦

الحل/ $\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٢) - هـ(-٢)}{٢ - -٢} = ٣ \Leftarrow \boxed{هـ(٢) - هـ(-٢) = ١٢}$

$\Delta ق(س)$ في $[-٢،٢] = ق(٢) - ق(-٢) = ٢^٢ هـ(٢) - (-٢)^٢ هـ(-٢)$

$= ٤هـ(٢) - ٤هـ(-٢)$

$= ٤(\boxed{هـ(٢) - هـ(-٢)}) = ٤ \times ١٢ = ٤٨$

• 2025 رام الله/ يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة انطلاقه بالأمتار تعطى بالعلاقة $ف(ن) = جتا(٢ن)$ وكانت سرعته المتوسطة في $[ن،ب]$ تساوي $\frac{-١}{٢ب}$ ، $ب \in]ن، \frac{\pi}{٢}[$ ما قيمة الثابت ب :

أ/ $\frac{\pi}{٦}$ ب/ $\frac{\pi}{٤}$ ج/ $\frac{\pi}{٣}$ د/ $\frac{٢\pi}{٣}$

الحل/ السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{-١}{٢ب} \Leftarrow \frac{ف(ب) - ف(ن)}{\cancel{ب}} = \frac{-١}{٢\cancel{ب}}$ ، $ب \neq ن$

$\Leftarrow جتا(٢ب) - جتا(٢ \times ن) = -\frac{١}{٢} \Leftarrow جتا(٢ب) - ١ = -\frac{١}{٢} \Leftarrow جتا(٢ب) = \frac{١}{٢}$

$٢ب = \frac{\pi}{٣} \Leftarrow ب = \frac{\pi}{٦} \in]ن، \frac{\pi}{٢}[$

• خارجي/ اذا كان $ق(س) = [ب س - ٣]$ ، $س \in [ن،٢]$ وكان متوسط تغير $ق(س)$ في نفس الفترة يساوي ٥ ما قيمة/قيم الثابت ب :

أ/ $[٥،٥٫٥]$ ب/ $]٥،٥٫٥[$ ج/ $[٥،٥٫٥[$ د/ $]٥،٥٫٥[$

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في $[ن،٢] = ٥ \Leftarrow \frac{ق(٢) - ق(ن)}{٢ - ن} = ٥ \Leftarrow ق(٢) - ق(ن) = ١٠$

$\Leftarrow [٢ب - ٣] - [ب \times ن - ٣] = ١٠$

$[٢ب] - \cancel{٣ - ٣} = ١٠$

$[٢ب] = ١٠$

$[١٠ \leq ٢ب < ١١] \times \frac{١}{٢}$

$٥ \leq ب < ٥٫٥ \Leftarrow ب \in [٥،٥٫٥[$

• مهم :
• $[أس + ب] = [أس] + ب$ ، $ب \in ص$
• $[س] = ن$ ، $ن \in ص$
$\Leftarrow ن \leq س < ن + ١$

• خارجي/ اذا كان $ص = هـ^{ن س} + ٤$ وكان $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ^{٨} - ١}{٤}$ ، $س \in [٠ ، ٤]$ ما قيمة ن :

أ/ ٢ ب/ ٤ جـ/ -٢ د/ ٨

الحل/ $ص = ق(س) = هـ^{ن س} + ٤$

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(٤) - ق(٠)}{٤} = \frac{هـ^{٨} - ١}{٤} \Leftarrow (هـ^{٤ن} + ٤) - (هـ^{٠} + ٤) = هـ^{٨} - ١$

$\Leftarrow هـ^{٤ن} + \cancel{٤} - \cancel{١} - \cancel{٤} = هـ^{٨} - \cancel{١} \Leftarrow \boxed{هـ^{٤ن} = هـ^{٨}}$ "اذا تساوت الأساسات ⇐ الأسس متساوية"

$\Leftarrow ٤ن = ٨ \Leftarrow ن = ٢$

• خارجي/ ما قاعدة كثير الحدود من الدرجة الأولى الذي متوسط تغيره في $[س_١ ، س_٢]$ هو ٤ ويمر بالنقطة $(-١ ، -١)$:

أ/ $ق(س) = ٤س - ٣$ ب/ $ق(س) = ٤س + ٣$ جـ/ $ق(س) = ٤س$

د/ $ق(س) = ٤س + ٤$

الحل/ نفرض $ق(س) = أس + ب$ ، $أ \neq ٠$:

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في $[س_١ ، س_٢] = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = ٤ \Leftarrow \frac{(أس_٢ + ب) - (أس_١ + ب)}{س_٢ - س_١} = ٤$

$\Leftarrow \frac{أس_٢ + \cancel{ب} - أس_١ - \cancel{ب}}{س_٢ - س_١} = ٤ \Leftarrow \frac{أ(س_٢ - س_١)}{(س_٢ - س_١)} = ٤$ ، $س_٢ \neq س_١ \Leftarrow أ = ٤$

$\therefore ق(س) = ٤س + ب$

$ق(س)$ يمر بـ $(-١ ، -١) \Leftarrow ق(-١) = -١ \Leftarrow -١ = -٤ + ب \Leftarrow ٣ = ب$

$\Leftarrow ق(س) = ٤س + ٣$

• ملاحظة : اذا كان $ق(س) = أس + ب$ ، $أ \neq ٠$ ∴ فإن متوسط تغيره في $[س_١ ، س_٢]$ دائماً = أ "معامل س"

لصنع دائرة فقط .

$\Leftarrow أ = ٤$ مباشرة ثم نكمل

• خارجي/ إذا كان $ل(س)$ كثير حدود من الدرجة ن وكان متوسط تغيره عند أي فترة دائماً يساوي $\sqrt[٣]{٧}$ ، فإن ن تساوي :

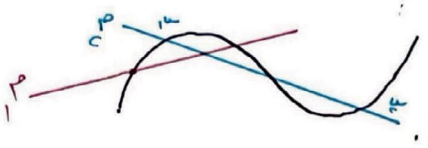
أ/ ١ ب/ ٢ جـ/ ٣ د/ ٤

الحل/ ✗ • لو فرضنا أن ن = صفر ⇐ $ل(س) = جـ$ (جـ ثابت) وبما أن متوسط التغير = ميل القاطع

⇐ متوسط التغير = صفر دائماً "لأن ص = جـ موازي لمحور السينات ⇐ ميله = صفر"

✓ • لو فرضنا أن ن = ١ ⇐ $ل(س) = أس + ب$ "خط مستقيم" ميله دائماً = أ

⇐ متوسط التغير دائماً أ ⇐ $ل(س) = \sqrt[٣]{٧}\, س + ب$



✗ • لو فرضنا أن ن > ١ ⇐ $ل(س)$ منحنى

ميله يتغير في كل فترة ⇐ متوسط التغير ليس ثابتاً .

• خارجي/ ما متوسط تغير ق(س) = $\frac{ك}{س}$ + جـ في [أ، ب] حيث أ، ب، جـ، ك ∈ ح، أ، ب ≠ ٠ :

أ/ $-\frac{ك}{أب}$ ب/ $\frac{ك}{أب}$ جـ/ $\frac{ك}{أب}$ + ٢جـ د/ $-\frac{ك}{أب}$ + ٢جـ

الحل/

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ} = \frac{\left(\frac{ك}{ب} + جـ\right) - \left(\frac{ك}{أ} + جـ\right)}{ب - أ} = \frac{\frac{ك}{ب} + \cancel{جـ} - \frac{ك}{أ} - \cancel{جـ}}{ب - أ}$$

$$= \frac{ك\left(\frac{1}{ب} - \frac{1}{أ}\right)}{ب - أ} = \frac{ك\left(\frac{أ - ب}{أب}\right)}{(ب - أ)} = \frac{ك\,\cancel{(أ - ب)}^{-1}}{أب} \times \frac{1}{\cancel{(ب - أ)}} = \frac{-ك}{أب}$$

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة الآتية :

• 2009/ إذا كان المستقيم القاطع لمنحنى ق(س) في النقطتين (١، ق(١)) ، (٣، ٥) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع محور السينات الموجب، احسب متوسط تغير الاقتران هـ(س) = $\frac{٢}{ق(س)}$ في [١، ٣]

الحل/

$(\overset{س_١}{١}، \overset{ص_١}{ق(١)})$ $(\overset{س_٢}{٣}، \overset{ص_٢}{٥})$ ⇐ ق(٣) = ٥

ميل القاطع = ظا هـ = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ⇐ ظا(١٣٥) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ⇐ $-١ = \frac{٥ - ق(١)}{٣ - ١}$ ⇐ $-٢ = ٥ - ق(١)$

⇐ ق(١) = ٥ + ٢ = ٧

$$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = \frac{\frac{٢}{ق(٣)} - \frac{٢}{ق(١)}}{٢} = \frac{\cancel{٢}\left(\frac{1}{ق(٣)} - \frac{1}{ق(١)}\right)}{\cancel{٢}} = \frac{1}{٥} - \frac{1}{٧} = \frac{٧ - ٥}{٥ \times ٧}$$

$$= \frac{٢}{٣٥}$$

• 2010/ إذا كان متوسط تغير ق(س) = $\sqrt{٤س + ١}$ ، س ∈ [٠، ب] يساوي (١)، ما قيمة الثابت ب؟

الحل/ طريقة (١) :

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(ب) - ق(٠)}{ب - ٠} = \frac{\sqrt{٤ب + ١} - \sqrt{٤(٠) + ١}}{ب} = ١ \Leftarrow ب = \sqrt{٤ب + ١} - ١$$

⇐ $(ب + ١ = \sqrt{٤ب + ١})^٢$ نربع الطرفين للتخلص من الجذر ⇐ $ب^٢ + ٢ب + \cancel{١} = ٤ب + \cancel{١}$

$ب^٢ - ٢ب = ٠$ ⇐ $ب(ب - ٢) = ٠$

إما ب = ٠ مرفوض $س_٢ \neq س_١$ أو $ب - ٢ = ٠$ ⇐ ب = ٢

طريقة (٢) :

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{\sqrt{٤ب + ١} - ١}{ب} = ١$$ "نضرب بمرافق البسط" ⇐ $\frac{(\sqrt{٤ب + ١} - ١)(\sqrt{٤ب + ١} + ١)}{ب(\sqrt{٤ب + ١} + ١)} = ١$

⇐ $\frac{(\sqrt{٤ب + ١})^٢ - (١)^٢}{ب(\sqrt{٤ب + ١} + ١)} = ١$ ⇐ $\frac{٤\cancel{ب} + \cancel{١} - \cancel{١}}{\cancel{ب}(\sqrt{٤ب + ١} + ١)} = ١$ ، ب ≠ ٠

$\frac{٤}{\sqrt{٤ب + ١} + ١} = ١$ ⇐ $\sqrt{٤ب + ١} + ١ = ٤$ ⇐ $(\sqrt{٤ب + ١} = ٣)^٢$ ⇐ $٤ب + ١ = ٩$ ⇐ $\frac{٤ب}{٤} = \frac{٨}{٤}$

⇐ ب = ٢

• 2014/ إذا كان متوسط تغير ق(س) على [-٢، ٢] يساوي (٥) ، ما متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) - ٢س على نفس الفترة.

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ على [-٢، ٢] = $\frac{ق(٢) - ق(-٢)}{٢ - -٢}$ = ٥ ⇐ $\boxed{ق(٢) - ق(-٢) = ٢٠}$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س}$ في [-٢، ٢] = $\frac{هـ(٢) - هـ(-٢)}{٢ - -٢}$ = $\frac{(٣ق(٢) - ٤) - (٣ق(-٢) + ٤)}{٤}$

= $\frac{٣ق(٢) - ٣ق(-٢) - ٤ - ٤}{٤}$ = $\frac{٣(\boxed{ق(٢) - ق(-٢)}) - ٨}{٤}$ = $\frac{٣ \times ٢٠ - ٨}{٤}$ = $\frac{٦٠ - ٨}{٤}$

= $\frac{٥٢}{٤}$ = ١٣

• 2015/ إذا كان متوسط تغير ق(س) على [١، ٢] يساوي (٤) ، متوسط تغير ق(س) على [٢، ٥] يساوي (٨) ، ما متوسط تغير ق(س) على [١، ٥]

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [١، ٢] = ٤ ⇐ $\frac{ق(٢) - ق(١)}{٢ - ١}$ = ٤ ⇐ ق(٢) - ق(١) = ٤ — ①

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [٢، ٥] = ٨ ⇐ $\frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢}$ = ٨ ⇐ ق(٥) - ق(٢) = ٢٤ — ②

بجمع ① + ② : ق(٥) - ق(١) = ٢٨

⇐ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [١، ٥] = $\frac{ق(٥) - ق(١)}{٥ - ١}$ = $\frac{٢٨}{٤}$ = ٧

• 2019 دور أول/ إذا كان س ل(س) = ق(س) + ٢ وكان متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من (١) إلى (١+هـ) يساوي هـ² + ٢هـ وكانت ق(١) = ١ أوجد متوسط تغير ل(س) عندما تتغير س من (١) إلى (١+هـ)

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ = $\frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{\cancel{١} + هـ - \cancel{١}}$ = $\frac{ق(١+هـ) - ١}{هـ}$ = هـ² + ٢هـ ⇐ ق(١+هـ) - ١ = هـ³ + ٢هـ²

⇐ ق(١+هـ) = هـ³ + ٢هـ² + ١

س ل(س) = ق(س) + ٢ ⇐ ل(س) = $\frac{ق(س) + ٢}{س}$

$\frac{\Delta ل(س)}{\Delta س}$ = $\frac{ل(١+هـ) - ل(١)}{\cancel{١} + هـ - \cancel{١}}$ = $\left(\frac{ق(١+هـ) + ٢}{١+هـ} - \frac{ق(١) + ٢}{١}\right) \times \frac{١}{هـ}$

توحيد مقامات

= $\left(\frac{هـ^٣ + ٢هـ^٢ + ١ + ٢}{١+هـ} - (١+٢)\right) \times \frac{١}{هـ}$ = $\left(\frac{هـ^٣ + ٢هـ^٢ + ٣}{١+هـ} - ٣\right) \times \frac{١}{هـ}$

= $\left(\frac{هـ^٣ + ٢هـ^٢ + \cancel{٣} - \cancel{٣} - ٣هـ}{هـ(١+هـ)}\right)$ = $\frac{\cancel{هـ}(هـ^٢ + ٢هـ - ٣)}{\cancel{هـ}(هـ+١)}$ = $\frac{هـ^٢ + ٢هـ - ٣}{هـ+١}$

• 2020 دور أول/ اذا كان ق(س) هـ(س) = ١ ، وكان كل من ق(س) ، هـ(س) > ٠ ، ∀س > ٠
وكان ق(٥) = ٣٢ ، ق(أ+ب) = ق(أ) ق(ب) ، أوجد متوسط تغير هـ(س) على [١ ، ٤] علماً بأن
متوسط التغير للاقتران ق(س) على [١ ، ٤] يساوي $\frac{١٤}{٣}$

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [١ ، ٤] = $\frac{ق(٤) - ق(١)}{٤ - ١} = \frac{١٤}{٣}$ ⇐ ق(٤) − ق(١) = ١٤

ق(س) هـ(س) = ١ ⇐ هـ(س) = $\frac{١}{ق(س)}$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س}$ في [١ ، ٤] = $\frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١} = \frac{\frac{١}{ق(٤)} - \frac{١}{ق(١)}}{٣}$

= $\frac{\frac{ق(١) - ق(٤)}{ق(٤) ق(١)}}{٣} = \frac{\frac{-١٤}{٣٢}}{٣} = \frac{-٧}{١٦} \times \frac{١}{٣}$

= $\frac{-٧}{٤٨}$

ق(أ+ب) = ق(أ) ق(ب)
ق(١+٤) = ق(١) ق(٤)
ق(٥) = ق(١) ق(٤)
٣٢ = ق(١) ق(٤)

• 2020 دور ثالث/ إذا كان ق(س) = { ٦ − س ، س < ٢ ؛ س² + أس ، س ≥ ٢ } ، وكان متوسط تغير ق(س) عندما تتغير
س من (١) إلى (أ) حيث أ > ٢ يساوي ٩ ، ما قيمة الثابت أ

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(أ) - ق(١)}{أ - ١} = ٩$ ⇐ $\frac{(أ^٢ + أ \times أ) - (٦ - ١)}{أ - ١} = ٩$

⇐ أ² + أ² − ٥ = ٩أ − ٩ ⇐ ٢أ² − ٥ = ٩أ − ٩ ⇐ ٢أ² − ٩أ + ٤ = ٠

⇐ (٢أ − ١)(أ − ٤) = ٠

إما ٢أ − ١ = ٠ ⇐ أ = $\frac{١}{٢}$ مرفوض أ > ٢

أو أ − ٤ = ٠ ⇐ أ = ٤

• 2021 دور أول/ إذا كان هـ(س) = (ق(س) + س)² وكان متوسط تغير ق(س) على [٢ ، ٥]
يساوي (٣) ومتوسط تغير هـ(س) في نفس الفترة (٤٠) ما قيمة ق(٥) + ق(٢)

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [٢ ، ٥] = ٣ ⇐ $\frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢} = ٣$ ⇐ ق(٥) − ق(٢) = ٩

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٥) - هـ(٢)}{٥ - ٢} = \frac{(ق(٥) + ٥)^٢ - (ق(٢) + ٢)^٢}{٣} = ٤٠$

فرق مربعين

⇐ (ق(٥) + ٥)² − (ق(٢) + ٢)² = ١٢٠ ⇐ (ق(٥) + ٥ + ق(٢) + ٢)(ق(٥) − ق(٢) + ٥ − ٢) = ١٢٠

⇐ (ق(٥) + ق(٢) + ٧)(ق(٥) − ق(٢) + ٣) = ١٢٠

(ق(٥) + ق(٢) + ٧)(٩ + ٣) = ١٢٠ ⇐ (ق(٥) + ق(٢) + ٧) × $\frac{١٢}{١٢}$ = $\frac{١٢٠}{١٢}$

(ق(٥) + ق(٢) + ٧) = ١٠ ⇐ ق(٥) + ق(٢) = ٣

• 2021 دور ثاني/ إذا كان متوسط تغير الاقتران $\Delta ص = ق(س) = \frac{1}{س^2 - س}$ في $[2، ب]$ يساوي $(-\frac{1}{3})$ ما قيمة/ قيم الثابت ب

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في $[2، ب] = -\frac{1}{3} \Leftarrow \frac{ق(ب) - ق(2)}{ب - 2} = -\frac{1}{3}$

$\Leftarrow \frac{\frac{1}{ب^2 - ب} - \frac{1}{2^2 - 2}}{(ب - 2)} = -\frac{1}{3} \Leftarrow \left(\frac{1}{ب^2 - ب} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{(ب - 2)} = -\frac{1}{3}$

$\Leftarrow \left[\frac{2 - ب^2 + ب}{2(ب^2 - ب)} \times \frac{1}{(ب - 2)} = -\frac{1}{3}\right] \times -1 \Leftarrow \frac{ب^2 - ب - 2}{2(ب^2 - ب)(ب - 2)} = \frac{1}{3}$

$\Leftarrow \frac{(ب + 1)(ب - 2)}{2(ب^2 - ب)(ب - 2)} = \frac{1}{3}$ ، $ب \neq 2 \Leftarrow \frac{ب + 1}{2ب^2 - 2ب} = \frac{1}{3} \Leftarrow 3ب + 3 = 2ب^2 - 2ب$

$\Leftarrow 2ب^2 - 5ب - 3 = 0 \Leftarrow (2ب + 1)(ب - 3) = 0$

إما $2ب + 1 = 0 \Leftarrow 2ب = -1 \Leftarrow ب = -\frac{1}{2}$ مرفوض $\because$ $س_2 < س_1$ لأنها على شكل فترة

أو $ب - 3 = 0 \Leftarrow ب = 3$

• 2022 دور ثاني/ إذا كان الاقتران $ق(س) = أ س^3 + ب س$ ، أثبت أن متوسط التغير للاقتران $ق(س)$ عندما تتغير س من (1) إلى (ن) يساوي $أ(ن^2 + ن + 1) + ب$

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(ن) - ق(1)}{ن - 1} = \frac{(أ ن^3 + ب ن) - (أ(1)^3 + ب(1))}{(ن - 1)} = \frac{أ ن^3 + ب ن - أ - ب}{(ن - 1)}$

$= \frac{(أ ن^3 - أ) + (ب ن - ب)}{(ن - 1)} = \frac{أ(ن^3 - 1) + ب(ن - 1)}{(ن - 1)} = \frac{أ(ن^3 - 1)}{(ن - 1)} + \frac{ب(ن - 1)}{(ن - 1)}$ ، $ن \neq 1$

$= \frac{أ(ن - 1)(ن^2 + ن + 1)}{(ن - 1)} + ب$

$= أ(ن^2 + ن + 1) + ب$ #

تذكر: $س^3 - ص^3 = (س - ص)(س^2 + س ص + ص^2)$

$س^3 + ص^3 = (س + ص)(س^2 - س ص + ص^2)$

• 2021 دور ثالث/ إذا كان متوسط تغير $ق(س)$ في $[2، 3]$ يساوي (5) ، ما متوسط التغير في الاقتران $ل(س) = 2س^2 - 4ق(س)$ في الفترة نفسها.

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في $[2، 3] = \frac{ق(3) - ق(2)}{3 - 2} = 5 \Leftarrow \boxed{ق(3) - ق(2) = 5}$

$\frac{\Delta ل(س)}{\Delta س} = \frac{ل(3) - ل(2)}{3 - 2} = (2(3)^2 - 4ق(3)) - (2(2)^2 - 4ق(2))$

$= 18 - 8 - 4ق(3) + 4ق(2)$

$= 10 - 4(\boxed{ق(3) - ق(2)})$

$= 10 - 4 \times 5 = 10 - 20 = -10$

• 2023 دور أول / إذا كان متوسط تغير ق(س) = ٤س² − جـ في [جـ، ٢] يساوي −٤ ما قيمة الثابت جـ

الحل / $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(٢) - ق(جـ)}{٢ - جـ} = \frac{(٤(٢)^٢ - جـ) - (٤جـ^٢ - جـ)}{٢ - جـ} = -٤$

$\Leftarrow \frac{١٦ - \cancel{جـ} - ٤جـ^٢ + \cancel{جـ}}{٢ - جـ} = -٤ \Leftarrow \frac{\cancel{٤}(٤ - جـ^٢)}{(٢ - جـ)} = \cancel{-٤}^{-١} \Leftarrow \frac{\cancel{(٢ - جـ)}(٢ + جـ)}{\cancel{(٢ - جـ)}} = -١$ ، جـ ≠ ٢

$\Leftarrow ٢ + جـ = -١ \Leftarrow جـ = -٣$

• 2023 دور ثاني / إذا كان مقدار التغير في ق(س) في [١، ٣] يساوي (٦) وكان هـ(س) = ٥ق(س) + س² − ٧ ما متوسط التغير هـ(س) في [١، ٣]

الحل / $\Delta ق(س)$ في [١، ٣] = ٦ ⇐ $\boxed{ق(٣) - ق(١) = ٦}$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س}$ في [١، ٣] = $\frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = \frac{(٥ق(٣) + ٩ - ٧) - (٥ق(١) + ١ - ٧)}{٢}$

$= \frac{٥ق(٣) + ٢ - ٥ق(١) + ٦}{٢} = \frac{(٥ق(٣) - ٥ق(١)) + (٢ + ٦)}{٢} = \frac{٥(\boxed{ق(٣) - ق(١)}) + ٨}{٢}$

$= \frac{٥(٦) + ٨}{٢} = \frac{٣٠ + ٨}{٢} = \frac{٣٨}{٢} = ١٩$

• 2023 دور ثالث / إذا كان ق(س) = أس + ب ، أ، ب ∈ ح ، ق(٣) = ٢ق(١) وكان متوسط تغير ق(س) في [١، ٣] يساوي (٤) ما قيمة كل من الثابتين أ، ب

الحل / $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [١، ٣] = ٤ ⇐ $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = ٤ \Leftarrow \frac{(٣أ + ب) - (أ + ب)}{٢} = ٤$

$\Leftarrow ٣أ + \cancel{ب} - أ - \cancel{ب} = ٨ \Leftarrow ٢أ = ٨ \Leftarrow أ = ٤$

$\Leftarrow ق(س) = ٤س + ب$

$ق(٣) = ٢ق(١) \Leftarrow ٤ \times ٣ + ب = ٢(٤ + ب) \Leftarrow ١٢ + ب = ٨ + ٢ب \Leftarrow ٤ = ب$

• 2024 دور أول / إذا كان متوسط التغير في ق(س) في [١، ٣] يساوي (٤) ، احسب متوسط تغير هـ(س) = س² ق(س) − ٢س في نفس الفترة ، علماً بأن منحنى هـ(س) يمر بالنقطة (٣، ١٢)

الحل / هـ(س) يمر بـ (٣، ١٢) ⇐ هـ(٣) = ١٢ ⇐ ٣² ق(٣) − ٢ × ٣ = ١٢ ⇐ ٩ق(٣) − ٦ = ١٢

٩ق(٣) = ١٨ ⇐ ق(٣) = ٢

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [١، ٣] = ٤ ⇐ $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = ٤ \Leftarrow ٢ - ق(١) = ٨ \Leftarrow ٢ - ٨ = ق(١)$

$\Leftarrow -٦ = ق(١)$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س}$ في [١، ٣] = $\frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = \frac{١٢ - (ق(١) - ٢)}{٢} = \frac{١٢ - (-٦ - ٢)}{٢}$

$= \frac{١٢ - -٨}{٢} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠$

• 2024 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = س² − ٣، جد متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ١+هـ

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{\cancel{١+هـ-١}} = \frac{((١+هـ)^٢ - ٣) - (١-٣)}{هـ} = \frac{(١+هـ)^٢ - ٣ + ٢}{هـ}$

$= \frac{(١+هـ)^٢ - ١}{هـ} = \frac{(١+هـ-١)(١+هـ+١)}{هـ} = \frac{\cancel{هـ}(هـ+٢)}{\cancel{هـ}}$ ، هـ ≠ ٠ ∴ = هـ + ٢

• 2024 دور ثالث (الضفة)/ إذا كان ق(س) = س ل(س) وكان ق(٤) = ٤ق(١) − ٨، أوجد متوسط تغير ل(س) في [١، ٤]

الحل/ ق(س) = س ل(س) ⇐ ل(س) = $\frac{ق(س)}{س}$

توحيد مقامات

$\frac{\Delta ل(س)}{\Delta س}$ في [١، ٤] = $\frac{ل(٤) - ل(١)}{٤ - ١} = \frac{\frac{ق(٤)}{٤} - ق(١)}{٣} = \frac{ق(٤) - ٤ق(١)}{٤} \times \frac{١}{٣}$

$= \frac{\cancel{٨}^{٢}}{\cancel{٤}} \times \frac{١}{٣} = \frac{-٢}{٣}$

• 2024 دور ثالث (مصر)/ إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) للفترة [−١، ٣] يساوي (٤) ما قيمة متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٢ق(س) + ٣س في الفترة نفسها.

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [−١، ٣] = ٤ ⇐ $\frac{ق(٣) - ق(-١)}{٣ - -١} = ٤$ ⇐ $\boxed{ق(٣) - ق(-١) = ١٦}$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٣) - هـ(-١)}{٣ - -١} = \frac{(٢ق(٣) + ٣×٣) - (٢ق(-١) + ٣×-١)}{٤} = \frac{٢ق(٣) + ٩ - ٢ق(-١) + ٣}{٤}$

$= \frac{(٢ق(٣) - ٢ق(-١)) + (٩+٣)}{٤} = \frac{٢(\boxed{ق(٣) - ق(-١)}) + ١٢}{٤} = \frac{٢×١٦ + ١٢}{٤}$

$= \frac{٣٢ + ١٢}{٤} = \frac{٤٤}{٤} = ١١$

• 2025 دور أول/ إذا كان ق(س) = $\sqrt{٢س+١}$، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من (ن) إلى (ب) يساوي $\frac{١}{٢}$، احسب قيمة الثابت ب، ب > ن

الحل/ طريقة (١):

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(ب) - ق(ن)}{ب - ن} = \frac{\sqrt{٢ب+١} - \sqrt{٢×ن+١}}{ب} = \frac{١}{٢}$ ⇐ $٢\sqrt{٢ب+١} - ٢ = ب$

⇐ $(٢\sqrt{٢ب+١} = ب + ٢)^٢$ ⇐ $٤(٢ب+١) = ب^٢ + ٤ب + ٤$ ⇐ $٨ب + \cancel{٤} = ب^٢ + ٤ب + \cancel{٤}$

⇐ $ب^٢ - ٤ب = ن$ ⇐ $ب(ب - ٤) = ن$

إما ب = ن مرفوض $س_١ \neq س_٢$ أو ب − ٤ = ن ⇐ ب = ٤

طريقة (٢): $\frac{\sqrt{٢ب+١} - ١}{ب} = \frac{١}{٢}$ بالضرب في مرافق البسط ⇐ $\frac{(\sqrt{٢ب+١} - ١)(\sqrt{٢ب+١} + ١)}{ب(\sqrt{٢ب+١} + ١)} = \frac{١}{٢}$

⇐ $\frac{\cancel{٢ب} + \cancel{١} - \cancel{١}}{\cancel{ب}(\sqrt{٢ب+١} + ١)} = \frac{١}{٢}$ ، ب ≠ ن ⇐ $\frac{٢}{\sqrt{٢ب+١} + ١} = \frac{١}{٢}$ ⇐ $٤ = \sqrt{٢ب+١} + ١$

⇐ $(3 = \sqrt{2ب+1})^2$ ⇐ $9 = 2ب+1$ ⇐ $\frac{8}{2} = \frac{2ب}{2}$ ⇐ $4 = ب$

• 2025 دورثاني/ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} 6-س ، & س < 2 \\ س^2+2س ، & س \geq 2 \end{cases}$ ، وكان متوسط تغير في $ق(س)$ في $[أ ، 2]$ يساوي (1) ، ما قيمة الثابت أ.

$أ < 2$

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في $[أ ، 2] = \frac{ق(2) - ق(أ)}{2-أ} = 1$ ⇐ $\frac{(2^2+2\times2) - (6-أ)}{2-أ} = 1$

⇐ $4+4-6+أ = 2-أ$ ⇐ $\cancel{2}+أ = \cancel{2}-أ$ ⇐ $أ = -أ$ ⇐ $2أ = 0$ ⇐ $أ = 0$

• 2020 الوسطى/ إذا كان $ق(س) = \frac{أ}{س-3} + 5هـ(س)$ ، متوسط التغير للاقتران $ق(س)$ في $[-1 ، 2]$ يساوي 9 ، والتغير في $هـ(س)$ في نفس الفترة يساوي (3) ، ما قيمة الثابت أ

الحل/ $\Delta هـ(س)$ في $[-1 ، 2] = 3$ ⇐ $\boxed{هـ(2) - هـ(-1) = 3}$

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في $[-1 ، 2] = 9$ ⇐ $\frac{ق(2) - ق(-1)}{2-(-1)} = 9$ ⇐ $\left(\frac{أ}{2-3} + 5هـ(2)\right) - \left(\frac{أ}{-1-3} + 5هـ(-1)\right) = 27$

⇐ $-أ + 5هـ(2) + \frac{أ}{4} - 5هـ(-1) = 27$

⇐ $(5هـ(2) - 5هـ(-1)) + \left(-أ + \frac{أ}{4}\right) = 27$ ⇐ $5(\boxed{هـ(2) - هـ(-1)}) + \frac{-3أ}{4} = 27$

⇐ $5\times3 + \frac{-3أ}{4} = 27$ ⇐ $\frac{-3أ}{4} = 27-15$ ⇐ $\frac{-3أ}{4} = 12$ ⇐ $أ = \frac{\cancel{12}^{-4}\times4}{\cancel{3}} = -16$

• 2021 شمال الخليل/ اذا كان $هـ(س) = أق(س) + 2س - 1$ ، جد قيمة الثابت أ علماً بأن متوسط تغير $هـ(س)$ في $[1 ، 3]$ يساوي (4) ، والمستقيم الواصل بين النقطتين $(1 ، ق(1))$ $(3 ، ق(3))$ يصنع زاوية $130°$ مع محور السينات الموجب

الحل/ $(1 ، ق(1))$ $(3 ، ق(3))$ ⇐ $ظاهـ = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ⇐ $ظا130 = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

⇐ $-1 = \frac{ق(3) - ق(1)}{3-1}$ ⇐ $\boxed{-2 = ق(3) - ق(1)}$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س}$ في $[1 ، 3] = 4$ ⇐ $\frac{هـ(3) - هـ(1)}{3-1} = 4$ ⇐ $هـ(3) - هـ(1) = 8$

⇐ $(أق(3) + 6 - 1) - (أق(1) + 2 - 1) = 8$ ⇐ $(أق(3) - أق(1)) + (5-1) = 8$

⇐ $أ(\boxed{ق(3) - ق(1)}) + 4 = 8$ ⇐ $أ(-2) = 4$ ⇐ $أ = -2$

• 2022 شمال غزة/ اذا كان متوسط تغير $هـ(س)$ في $[2 ، 5]$ يساوي (6) ، وكان $ق(س+1) = هـ(س+1) + س^2 + 6$ ، أوجد متوسط تغير $ق(س)$ في $[2 ، 5]$

الحل/ $\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س}$ في $[2 ، 5] = 6$ ⇐ $\frac{هـ(5) - هـ(2)}{5-2} = 6$ ⇐ $\boxed{هـ(5) - هـ(2) = 18}$

• عندما $س+1 = 5$ ⇐ $س = 4$

$ق(4+1) = هـ(4+1) + 4^2 + 6$

⇐ $ق(5) = هـ(5) + 22$

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(5) - ق(2)}{5-2} = \frac{(هـ(5) + 22) - (هـ(2) + 7)}{3}$

$= \frac{(\boxed{هـ(5) - هـ(2)} + (22-7)}{3} = \frac{18+15}{3} = \frac{33}{3} = 11$

⇐ عندما س + ١ = ٢ ⇐ س = ١

ق(١+١) = هـ(١+١) + ١ + ٦

ق(٢) = هـ(٢) + ٧

• 2022 شرق غزة/ اذا كان ق(س) = (س² + س)^-١ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى س₂ يساوي -١/٣ ما قيمة س₂ ، س₂ > ٠ :

الحل/ ق(س) = (س² + س)^-١ ⇐ ق(س) = ١/(س² + س)

تذكر/ أ^-ن = ١/أ^ن

Δق(س) = ق(س₂) - ق(١) = -١/٣ ⇐ ١/(س₂² + س₂) - ١/(١+١) = -١/٣

⇐ ١/(س₂² + س₂) - ١/٢ = -١/٣ ⇐ ١/(س₂² + س₂) = -١/٣ + ١/٢

⇐ ١/(س₂² + س₂) = ١/٦ ⇐ س₂² + س₂ = ٦ ⇐ س₂² + س₂ - ٦ = ٠

⇐ (س₂ + ٣)(س₂ - ٢) = ٠

إما س₂ + ٣ = ٠ ⇐ س₂ = -٣ مرفوض س₂ > ٠

أو س₂ - ٢ = ٠ ⇐ س₂ = ٢

• 2023 مديرية بيت لحم/ اذا كان ق(س) × هـ(س) = أ س² حيث هـ(س) ≠ ٠ وكان زاوية ميل القاطع لمنحنى ق(س) في [-٢ ، ٢] تساوي ١٣٠° ، وكان متوسط تغير هـ(س) في نفس الفترة [-٢ ، ٢] يساوي ٢ ، فإن قيمة الثابت أ إذا علمت أن هـ²(-٢) + هـ²(٢) = ٣٢أ

الحل/ Δهـ(س)/Δس في [-٢ ، ٢] = ٢ ⇐ (هـ(٢) - هـ(-٢))/(٢ - -٢) = ٢ ⇐ (هـ(٢) - هـ(-٢)) = ٨ ²

هـ²(٢) + هـ²(-٢) - ٢هـ(٢)هـ(-٢) = ٦٤

٣٢أ - ٢هـ(٢)هـ(-٢) = ٦٤

(٣٢أ - ٦٤ = ٢هـ(٢)هـ(-٢)) × ١/٢

١٦أ - ٣٢ = هـ(٢)هـ(-٢)

ق(س)هـ(س) = أ س² ⇐ ق(س) = أ س²/هـ(س)

Δق(س)/Δس = (ق(٢) - ق(-٢))/(٢ - -٢) = ظا هـ ⇐ (٤أ/هـ(٢) - ٤أ/هـ(-٢))/٤ = ظا ١٣٠ ⇐ ٤أ(١/هـ(٢) - ١/هـ(-٢))/٤ = -١

⇐ أ((هـ(-٢) - هـ(٢))/(هـ(٢)هـ(-٢))) = -١ ⇐ أ(-٨)/(١٦أ - ٣٢) = -١ ⇐ -٨أ/(٨(٢أ - ٤)) = -١

⇐ +(٢أ - ٤) = +أ ⇐ ٢أ - ٤ = أ ⇐ أ = ٤

• 2024 مديرية طوباس/ إذا كان متوسط تغير ق(س) = ٢س (لوهـ س)^(ن-٣) في الفترة [١ ، هـ²] هو هـ²/(٣٢(هـ² - ١)) ، جد قيمة ن .

الحل/ Δق(س)/Δس في [١ ، هـ²] = (ق(هـ²) - ق(١))/(هـ² - ١) = هـ²/(٣٢(هـ² - ١))

$\Leftarrow \quad ح_{ن-٣}(\log_{هـ} ٢) - ٢(\log_{هـ} ١)^{ن-٣} = \frac{ص}{٣٢} \Leftarrow ح_{ن-٣}(\log_{هـ} ٢) - ٢(\log_{هـ} \frac{١}{هـ})^{ن-٣} = \frac{ص}{٣٢}$

$\Leftarrow \frac{ح_{ن-٣}}{٣٢} = ٢^{ن-٣} \times ١ \Leftarrow \frac{ح_{ن-٣}}{٣٢} = ٢^{ن-٣+١} \Leftarrow \frac{١}{٣٢} = ٢^{ن-٢} \Leftarrow ن-٢=-٥ \Leftarrow ن=-٣$

• هوايته صعبة : $\log_{هـ} ١ =$ صفر ، $\log_{هـ} هـ = ١$ ، $ب^{ن} \times ب^{ص} = ب^{ن+ص}$

• مهم : السؤال رياضياً خاطئ : $(\log_{هـ} ١)^{ن-٣} = (ب)^{ن-٣}$ يجب أن تكون $ن \geq ٣$
لو كانت أقل من ٣ $\Leftarrow ن=٣ \Leftarrow (ب)^{٣-٣} = (ب)^{٠} = \frac{١}{١} = ∞$
$\Leftarrow$ ليصبح سؤال صحيح : اقتراح تعديل أن يذكر بالشروط أنه $ن \geq ٣$ وأنه يصبح
متوسط التغير $\frac{ح_{٣}هـ^{٢}}{(هـ^{٢}-١)} \Leftarrow ن=٧$

• 2024 صولبا س/ إذا كان متوسط تغير $ق(س)$ في $[-٢، ٥]$ يساوي ٩ وكان منحنى $ق(س)$ يمر بالنقطة $(-١٠، ٨)$ وكان $ق(أ) = ق(ب)$ و $ق(أ) = ق(ب)$ و $أ، ب \in [-٢، ٥]$ و $ب$ متوسط تغير $ه(س) = \frac{س^{٣}-٣س}{ق(س)}$ في الفترة نفسها.

الحل/

$\frac{د ق(س)}{د س}$ في $[-٢، ٥] = ٩ \Leftarrow \frac{ق(٥)-ق(-٢)}{٥-(-٢)} = ٩ \Leftarrow ق(٥)-ق(-٢) = ٧ \times ٩$

$ق(س)$ يمر بـ $(-١٠، ٨) \Leftarrow ق(-١٠) = ٨$

$\frac{د ه(س)}{د س}$ في $[-٢، ٥] = \frac{ه(٥)-ه(-٢)}{٥-(-٢)} = \left(\frac{٤+٦}{ق(٥)} - \frac{٥-١٥}{ق(-٢)}\right) \times \frac{١}{٨}$

$= \left(\frac{١٠}{ق(٥)} - \frac{١٠}{ق(-٢)}\right) \times \frac{١}{٨} = \frac{١٠}{٨}\left(\frac{١}{ق(٥)} - \frac{١}{ق(-٢)}\right) = \frac{١٠}{٨}\left(\frac{ق(-٢)-ق(٥)}{ق(-٢)ق(٥)}\right)$

$= \frac{٥}{٤} \times \frac{-٧٨}{٧ \times ٨} = \frac{-٥٤٠}{٤} = -١٣٥$

$ق(-١٠) = ق(٥)ق(-٢)$
$ق(٥ \times ٨) = ق(٥)ق(-٢)$
$ق(أ) = ق(ب)$ و $ق(أ) = ق(ب)$
$٨ = ق(٥)ق(-٢)$

2024. قلقيلية/ إذا كان $ه(س-٢) = س ق(٣س-١) + ٦$ وكان متوسط تغير $ه(س)$ على $[-١، ٢]$ هو (-٤) و $ق(١) = ٤$ و $ق$ متصلة على $ح$

الحل/

$\frac{د ه(س)}{د س} = \frac{ه(٢)-ه(-١)}{٢-(-١)} = -٤ \Leftarrow ه(٢)-ه(-١) = -١٢$

$\Leftarrow (٤ق(٨)+٦) - (ق(١)+٦) = -١٢$

$٤ق(٨) + ٦ - ق(١) - ٦ = -١٢$

$٤ق(٨) - ٤ = -١٢$

$٤ق(٨) = -٨ \Leftarrow ق(٨) = -٢$

• عندما $(س-٢) = ٢ \Leftarrow س = ٤$
$ه(٤-٢) = ٤ق(٣ \times ٤-١) + ٦$
$ه(٢) = ٤ق(١١) + ٦$
• عندما $س-٢ = -١ \Leftarrow س = ١$
$ه(١-٢) = ق(٣-١) + ٦$
$ه(-١) = ق(١) + ٦$

• 2025 أريحا/ قطع المستقيم ل منحنى ق(س) في النقطتين (١، أ)، (٣، ب) يصنع زاوية مقدارها ١٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، احسب متوسط تغير هـ(س) = ٣ق(س) + س² − ١ للفترة [١، ٣]

الحل/ (١، أ) ⇐ ق(١) = أ ، (٣، ب) ⇐ ق(٣) = ب

ظاهـ = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ⇐ ظا ١٣٠ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ⇐ −١ = $\frac{ب - أ}{٣ - ١}$ ⇐ $\boxed{-٢ = ب - أ}$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س}$ في [١، ٣] = $\frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١}$ = $\frac{(٣ق(٣) + ٩ - ١) - (٣ق(١) + \cancel{١ - ١})}{٢}$ = $\frac{٣ب + ٨ - ٣أ}{٢}$

= $\frac{٣(\boxed{ب - أ}) + ٨}{٢}$ = $\frac{٣ \times -٢ + ٨}{٢}$ = $\frac{-٦ + ٨}{٢}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١

• 2025 مديرية القدس/ جد متوسط تغير هـ(س) = ق²(س) − ٥ للفترة [٣، ٧] حيث

(ق(س) − ٢)(ق(س) + ٢) = $\frac{١ + ٦س}{٣}$

الحل/ (ق(س) − ٢)(ق(س) + ٢) = $\frac{١ + ٦س}{٣}$ ⇐ ق²(س) − ٤ = $\frac{١}{٣} + \frac{٦}{٣}س$

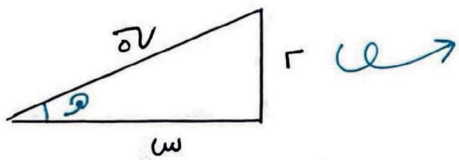
⇐ ق²(س) − ٤ = ٢س + $\frac{١}{٣}$ ⇐ ق²(س) − ٥ = ٢س − $\frac{٢}{٣}$ ⇐ هـ(س) = ٢س − $\frac{٢}{٣}$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س}$ في [٣، ٧] = $\frac{هـ(٧) - هـ(٣)}{٧ - ٣}$ = $\frac{(٢ \times ٧ - \frac{٢}{٣}) - (٢ \times ٣ - \frac{٢}{٣})}{٤}$ = $\frac{١٤ - \cancel{\frac{٢}{٣}} - ٦ + \cancel{\frac{٢}{٣}}}{٤}$

= $\frac{٨}{٤}$ = ٢

• 2025 ضواحي القدس/ إذا كان المستقيم ل يقطع منحنى ق(س) = أس² + ١ في النقطتين (−٢، ق(−٢))، (١، ق(١)) ويصنع زاوية حادة مع محور السينات الموجب مقدارها (هـ) فإذا علمت أن جاهـ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، ما قيمة الثابت أ

الحل/



باستخدام فيثاغورس:

(٢)² + (س)² = (√٥)² ⇐ ٤ + س² = ٥ ⇐ س² = ١

⇐ س = ١

⇐ ظاهـ = $\frac{مقابل}{مجاور}$ = $\frac{٢}{١}$ = ٢

ظاهـ = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ⇐ ٢ = $\frac{ق(١) - ق(-٢)}{١ - -٢}$ ⇐ ٦ = (أ + ١) − (٤أ + ١) ⇐ ٦ = أ + ١ − ٤أ − ١

٦ = −٣أ ⇐ −٢ = أ

• 2025 بيت لحم/ اذا كان ع(س) = (ق(س) + لوهـ س)² وكان متوسط تغير ق(س) في [١، هـ] يساوي (١) ومتوسط تغير ع(س) في [١، هـ] يساوي $\frac{هـ}{هـ - ١}$ ما قيمة المقدار ق(هـ) + ق(١).

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ = $\frac{ق(هـ) - ق(١)}{هـ - ١}$ = ١

⇐ $\boxed{ق(هـ) - ق(١) = هـ - ١}$

$\frac{د\,ع(س)}{د\,س} = \frac{ع(ه)-ع(1)}{ه-1} = \frac{ه-1}{ه-1} \Rightarrow (ف(ه)+ه ه)^2 - (ف(1)+ه)^2 = ه$

$\Rightarrow (ف(ه)+1)^2 - (ف(1))^2 = ه \Rightarrow (ف(ه)+1+ف(1))(\boxed{ف(ه)-ف(1)}+1) = ه$

$\Rightarrow (ف(ه)+ف(1)+1)(ه-1+1) = ه \Rightarrow (ف(ه)+ف(1)+1)\times ه = ه$

$\Rightarrow ف(ه)+ف(1)+1 = 1 \Rightarrow ف(ه)+ف(1) = $ صفر

• خارجي/ إذا كان متوسط تغير $ف(س)$ في $[2,9]$ يساوي 7 وكان $ف(0) = 8 - ف(2)$ ، ضد متوسط تغير $ه(س) = 3س + ف(س)$ في $[2,9]$

الحل/ $\frac{د\,ف(س)}{د\,س}$ في $[2,9] = 7 \Rightarrow \frac{ف(9)-ف(2)}{9-2} = 7 \Rightarrow ف(9)-ف(2) = 34$

$ف(0) = 8 - ف(2) \Rightarrow ف(0)+ف(2) = 8$

$\frac{د\,ه(س)}{د\,س}$ في $[2,9] = \frac{ه(9)-ه(2)}{9-2} = \frac{(3\times 9+ف(9))-(3\times 2+ف(2))}{3}$

$= \frac{30+ف(9)-16-ف(2)}{3} = \frac{(30-16)+(ف(9)-ف(2))}{3}$

$= \frac{34+(ف(9)-ف(2))(ف(9)+ف(2))}{3} = \frac{34+(34)(8)}{3} = \boxed{24}$

• خارجي/ إذا كان $3ف(س) = \frac{ف(س)+2}{2س+1} + 6$ ، ومتوسط تغير $ه(س)$ في الفترة $[2,9]$ علماً بأن $ه(س) = ع(س) - 3$

الحل/ $3ف(س) = \frac{ف(س)+2}{2س+1} + 6 \Rightarrow (3ف(س)-6) = \frac{ف(س)+2}{2س+1}$

$\Rightarrow (3ف(س)-6)(ف(س)+2) = 3(ف(س)-2)(ف(س)+2) = 2س+1$

$\Rightarrow \frac{3}{2}(ع(س)-3) = \frac{2س+1}{3} \Rightarrow ع(س)-3 = \frac{2}{3}س + \frac{1}{3} \Rightarrow ه(س) = 2س+\frac{1}{3}$

$\frac{د\,ه(س)}{د\,س}$ في $[2,9] = \frac{ه(9)-ه(2)}{9-2} = \frac{(9+\frac{1}{3})-(3+\frac{1}{3})}{9-2} = \frac{9-3}{9-2}$

$= \frac{2(9-3)}{(9-3)} = 2$ ، $9 \neq 3$

• خارجي/ إذا كان متوسط تغير $ف(س) = 2س^2+3س + أ$ للفترة $[-1,2]$ يساوي $\frac{11+أ}{2}$ ما قيمة الثابت $أ$

الحل/ $\frac{د\,ف(س)}{د\,س} = \frac{ف(2)-ف(-1)}{2+1} = \frac{(8+6+3+أ)-(2-3+أ)}{3} = \frac{11+أ}{2}$

$\Rightarrow \frac{8+أ-1-أ}{3} = \frac{11+أ}{2} \Rightarrow \frac{7+2أ}{3} = \frac{11+أ}{2}$

طريقة (١) : الضرب بمرافق البسط :

$$\frac{(\sqrt{٢ب+٣}-١)(\sqrt{٢ب+٣}+١)}{(ب+١)(\sqrt{٢ب+٣}+١)} = \frac{٢}{\sqrt{١١}+١} \Leftarrow \frac{٢ب+٣-١}{(ب+١)(\sqrt{٢ب+٣}+١)} = \frac{٢}{\sqrt{١١}+١}$$

$$\Leftarrow \frac{٢ب+٢}{(ب+١)(\sqrt{٢ب+٣}+١)} = \frac{٢}{\sqrt{١١}+١} \Leftarrow \frac{\cancel{٢}\cancel{(ب+١)}}{\cancel{(ب+١)}(\sqrt{٢ب+٣}+١)} = \frac{\cancel{٢}}{\sqrt{١١}+١} \quad ، ب \neq -١$$

$$\Leftarrow \sqrt{٢ب+٣}+١ = \sqrt{١١}+١ \Leftarrow (\sqrt{٢ب+٣} = \sqrt{١١})^{٢} \Leftarrow ٢ب+٣ = ١١ \Leftarrow \frac{٢}{٢}ب = \frac{٨}{٢} \Leftarrow ب = ٤$$

طريقة (٢) :

$$\left(\frac{(\sqrt{٢ب+٣}-١)}{(ب+١)} = \frac{٢}{\sqrt{١١}+١}\right) \times \frac{١}{٢} \Leftarrow \frac{\sqrt{٢ب+٣}-١}{٢ب+٢} = \frac{١}{\sqrt{١١}+١}$$

$$\Leftarrow \frac{\sqrt{٢ب+٣}-١}{٢ب+٣-١} = \frac{\sqrt{٢ب+٣}-١}{(٢ب+٣)-١} = \frac{١}{\sqrt{١١}+١}$$

نحلل المقام كفرق مربعين

$$\Leftarrow \frac{\cancel{\sqrt{٢ب+٣}-١}}{(\cancel{\sqrt{٢ب+٣}-١})(\sqrt{٢ب+٣}+١)} = \frac{١}{\sqrt{١١}+١} \quad ، ب \neq -١$$

$$\Leftarrow \sqrt{٢ب+٣}+١ = \sqrt{١١}+١ \Leftarrow ٢ب+٣ = ١١ \Leftarrow ٢ب = ٨ \Leftarrow ب = ٤$$

• خارجي/ اذا كان مقدار تغير $هـ(س) = لو_{هـ}(س^{٢}-١) - لو_{هـ}(س+١)$ للفترة $[٦ ، ٨]$ يساوي $لو_{هـ}\left(\frac{٣٤٣}{١٢٥}\right)^{ب}$ ما قيمة الثابت ب

الحل/ $هـ(س) = لو_{هـ}(س^{٢}-١) - لو_{هـ}(س+١) = لو_{هـ}(س-١)(س+١) - لو_{هـ}(س+١)$

$$\Leftarrow هـ(س) = لو_{هـ}(س-١) + \cancel{لو_{هـ}(س+١)} - \cancel{لو_{هـ}(س+١)}$$

$$\Leftarrow هـ(س) = لو_{هـ}(س-١)$$

$$\Delta هـ(س) = هـ(٨) - هـ(٦) \Leftarrow لو_{هـ}\left(\frac{٣٤٣}{١٢٥}\right)^{ب} = لو_{هـ}(٨-١) - لو_{هـ}(٦-١)$$

$$\Leftarrow ب\, لو_{هـ}\left(\frac{٧}{٥}\right)^{٣} = لو_{هـ}٧ - لو_{هـ}٥ \Leftarrow ٣ب\, \cancel{لو_{هـ}\left(\frac{٧}{٥}\right)} = \cancel{لو_{هـ}\left(\frac{٧}{٥}\right)} \Leftarrow ٣ب = ١ \Leftarrow ب = \frac{١}{٣}$$

• خارجي/ إذا كان متوسط تغير $ق(س)$ على $[٢ ، ٥]$ يساوي (-٦) وكان متوسط تغير الاقتران $ل(س) = أس + ق^{٢}(س)$ على نفس الفترة (-١٧) ، ما قيمة الثابت أ علماً بأن $ق(٢) + ق(٥) = ٤$

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في $[٢ ، ٥] = \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥-٢} = -٦ \Leftarrow \boxed{ق(٥) - ق(٢) = -١٨}$

$$\frac{\Delta ل(س)}{\Delta س} = \frac{ل(٥) - ل(٢)}{٥-٢} = -١٧ \Leftarrow ل(٥) - ل(٢) = -٥١$$

$$\Leftarrow (٥أ + ق^{٢}(٥)) - (٢أ + ق^{٢}(٢)) = -٥١$$

$$\Leftarrow ٥أ + ق^{٢}(٥) - ٢أ - ق^{٢}(٢) = -٥١ \Leftarrow ٣أ + ق^{٢}(٥) - ق^{٢}(٢) = -٥١$$

$$\Leftarrow ٣أ + (\boxed{ق(٥) - ق(٢)})(ق(٥) + ق(٢)) = -٥١ \Leftarrow ٣أ + -١٨ \times ٤ = -٥١$$

$$\Leftarrow ٣أ - ٧٢ = -٥١ \Leftarrow ٣أ = ٢١ \Leftarrow أ = ٧$$

• خارجي/ إذا علمت أن متوسط تغير $f(x)$ في $[1,3]$ يساوي (2) وكان $f^3(3) - f^3(1) = 16$ فأوجد متوسط تغير $g(x)$ في نفس الفترة علماً بأن $g(x) = \frac{8}{f(x)}$

الحل/ $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ في $[1,3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = 2 \Leftarrow f(3) - f(1) = 4$

$\Leftarrow f^2(3) - 3f(3)f(1) + f^2(1) = 16$ ——— (1)

$f^3(3) - f^3(1) = 16 \Leftarrow (f(3)-f(1))[f^2(3)+f(3)f(1)+f^2(1)] = 16$

$\Leftarrow (f^2(3) + f(3)f(1) + f^2(1)) \div 4 = 16 \div 4$

$\Leftarrow f^2(3) + f(3)f(1) + f^2(1) = 4$ ——— (2)

(2) − (1) : $4f(3)f(1) = -12 \Leftarrow f(3)f(1) = -3$

$$\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{g(3)-g(1)}{3-1} = \frac{\frac{8}{f(3)} - \frac{8}{f(1)}}{2} = \frac{8\left(\frac{1}{f(3)} - \frac{1}{f(1)}\right)}{2} = \frac{8\left(\frac{f(1)-f(3)}{f(1)f(3)}\right)}{2}$$

$$= \frac{8\left(\frac{4}{3}\right)}{2} = \frac{4}{1}$$

• خارجي/ إذا كان متوسط تغير $f(x) = 2x^3 + x - 1$ يساوي (4) وكان $\Delta x = 1$ وما قيمة x

الحل/ $\Delta x = 1 \Leftarrow x_2 - x_1 = 1 \Leftarrow x_2 = 1 + x_1$

$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{1} = 4 \Leftarrow f(1+x_1) - f(x_1) = 4$

$\Leftarrow 2(1+x_1)^3 + (1+x_1) - 1) - (2x_1^3 + x_1 - 1) = 4$

$2(1 + 3x_1 + 3x_1^2) + 1 + x_1 - 2x_1^3 - x_1 + 1 = 4$

$2 + 6x_1 + 6x_1^2 - 2x_1^3 + 1 = 4 \Leftarrow 3 + 6x_1 = 4 \Leftarrow 6x_1 = 1 \Leftarrow x_1 = \frac{1}{6}$

• خارجي/ إذا كان متوسط تغير الاقتران $g(x) = \sqrt[3]{f(x) - x^2 + 5}$ للفترة $[1,3]$ هو (4) وكان $(g(3)+g(1))^2 = 36$ و $g(3)g(1) = -8$ وما قيمة متوسط تغير $f(3x+1)$ على $[0,1]$

الحل/ $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{g(3)-g(1)}{3-1} = 4 \Leftarrow g(3) - g(1) = 8$

$\Leftarrow (g(3)+g(1))^2 = 36 \Leftarrow g^2(3) + 2g(3)g(1) + g^2(1) = 36$

$g^2(3) + g^2(1) + 2 \times -8 = 36 \Leftarrow g^2(3) + g^2(1) = 52$

$g(x) = \sqrt[3]{f(x) - x^2 + 5} \Leftarrow g^3(x) = f(x) - x^2 + 5$

$\Leftarrow g^3(x) + x^2 - 5 = f(x)$

نفرض $h(x) = f(3x+1)$

$$\frac{\Delta h(x)}{\Delta x} = \frac{h(1)-h(0)}{1-0} = \frac{f(3)-f(1)}{1} = (g^3(3)+9-5) - (g^3(1)+1-5)$$

$$= g^3(3) + 4 - g^3(1) + 4 = (g^3(3) - g^3(1)) + 8$$

$$= (g(3)-g(1))(g^2(3)+g(3)g(1)+g^2(1)) + 8$$

$$= 8(52 - 8) + 8 = 8 \times 44 + 8 = 360$$

• خارجي/ اذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س-١) في [-١، ٣] يساوي ٦ ، ما متوسط تغير الاقتران هـ(س) في [٠، ٨] علماً بأن هـ(٢س+٤) = س² ق(س) + ٢س

الحل/ نفرض ل(س) = ق(س-١)

$\frac{\Delta ل(س)}{\Delta س} = \frac{ل(٣) - ل(-١)}{٣ - -١} = ٦ \Leftarrow \boxed{ق(٢) - ق(-٢) = ٢٤}$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٨) - هـ(٠)}{٨ - ٠} = \frac{(٤ق(٢)+٤) - (٤ق(-٢) - ٤)}{٨}$

$= \frac{٤ق(٢) + ٤ - ٤ق(-٢) + ٤}{٨} = \frac{(٤ق(٢) - ٤ق(-٢)) + (٤+٤)}{٨}$

$= \frac{٤(\boxed{ق(٢) - ق(-٢)}) + ٨}{٨} = \frac{٤ \times ٢٤ + ٨}{٨} = ١٣$

• عندما ٢س + ٤ = ٨ ⇐ ٢س = ٤

⇐ س = ٢

هـ(٢×٢+٤) = ٢² ق(٢) + ٢×٢

هـ(٨) = ٤ق(٢) + ٤

• عندما ٢س + ٤ = ٠ ⇐ ٢س = -٤

س = -٢

هـ(٢×-٢+٤) = (-٢)² ق(-٢) - ٢×٢

هـ(٠) = ٤ق(-٢) - ٤

ثمّة فراغ في الأمة لن يملأ إلا بك

الدرس الثاني | قواعد الاشتقاق

• القسم الأول | اختر الاجابة الصحيحة :

• 2007/ اذا كان ق(س) = [س + ٠٫٨] فإن قَ(٥) تساوي :

أ/ صفر ب/ ١ جـ/ ٥ د/ غير موجودة

الحل/ • مهم : لضع دائرة : مشتقة اقتران [ ] عند س = أ

صفر
"عند النقط الداخلية"
⇐ نعوض (س=أ) داخل [ ]
اذا كان ناتج التعويض ∉ ص
فهي داخلية ⇐ ويكون متصل عندها

غير موجودة
"عند نقط التحول"
⇐ نعوض (س=أ) داخل [ ]
إذا كان ناتج التعويض ∈ ص
فهي تحول ويكون غير متصل عندها.

⇐ نعوض س = ٥ ⇐ ٥ + ٠٫٨ = ٥٫٨ ∉ ص
∵ عند س = ٥ نقطة داخلية ⇐ قَ(٥) = صفر

• 2007 إكمال/ إذا كان ق(س) متصلاً عند س = أ ، فإن :

أ/ قَ(أ) = صفر ب/ قَ(أ) موجودة جـ/ قَ(أ) غير موجودة د/ قَ(أ) قد تكون موجودة

الحل/ إذا كان ق(س) متصلاً عند (س = أ) ⟵ قَ(أ)⁺ = قَ(أ)⁻ ⇐ قَ(أ) موجودة
⟵ قَ(أ)⁺ ≠ قَ(أ)⁻ ⇐ قَ(أ) غ م

اذاً : قَ(أ) قد تكون موجودة .

• 2009/ إذا كان ق(س) + هـ(س) = ٨ ، ق(٢) = ٥ ، قَ(٢) = ١ فإن $\frac{د}{دس}$ (س + هـ(س)) عندما س = ٢ تساوي :

أ/ ١ ب/ صفر جـ/ ٨ د/ ٣

الحل/ $\frac{د}{دس}$ (س + هـ(س)) = ١ + هـَ(س) |س=٢ = ١ + هـَ(٢) = ؟

اشتقه

ق(س) + هـ(س) = ٨ باشتقاق الطرفين ⇐ قَ(س) + هـَ(س) = ؟ نعوض س = ٢
⇐ قَ(٢) + هـَ(٢) = ؟ ⇐ ١ + هـَ(٢) = ؟

• 2013/ إحدى العبارات الآتية صحيحة دائماً :

أ/ اذا كان قَ(أ) موجودة فإن قً(أ) موجودة
ب/ اذا كان ق(س) متصلاً عند (س = أ) فإن قَ(أ) موجودة
جـ/ إذا كان قَ(أ) غير موجودة فإن ق(س) ليس متصلاً عند س = أ
د/ إذا كان قَ(أ) موجودة فإن ق(س) تكون متصلاً عند س = أ

الحل/ أ/ اذا كانت قَ(أ) موجودة فإن ← قً(أ)$^+$ = قً(أ)$^-$ ← قً(أ) موجودة
← قً(أ)$^+$ ≠ قً(أ)$^-$ ← قً(أ) غير موجودة .

ب/ إذا كان ق(س) متصلاً عند س = أ فإن ← قَ(أ)$^+$ = قَ(أ)$^-$ ← قَ(أ) موجودة
← قَ(أ)$^+$ ≠ قَ(أ)$^-$ ← قَ(أ) غ م

جـ/ إذا كان قَ(أ) غير موجودة فإن ← ق(س) متصل عند س = أ و قَ(أ)$^+$ ≠ قَ(أ)$^-$
← ق(س) غير متصل عند س = أ

د/ اذا كانت قَ(أ) موجودة فإن ق(س) متصل عند س = أ

• 2016/ إذا كان ص = $\sqrt{س}$ فإن $\frac{د}{دس}$(ص صَ) يساوي :

أ/ $\frac{1}{\sqrt{س}}$ ب/ صفر جـ/ 1 د/ $\frac{1}{2س}$

الحل/ ص = $\sqrt{س}$ ← صَ = $\frac{1}{2\sqrt{س}}$

← ص صَ = $\sqrt{س} \times \frac{1}{2\sqrt{س}} = \frac{1}{2}$ / $\frac{د}{دس}$(ص صَ) = $\frac{د}{دس}\left(\frac{1}{2}\right)$ = صفر

• 2019 دور أول/ أي من الاقترانات التالية قابلاً للاشتقاق على ح :

أ/ ق(س) = [س − 2] ب/ ق(س) = |س − 2| − |س|

جـ/ ق(س) = $\sqrt{س^2 + 2س + 1}$ د/ ق(س) = [س − 2] − [س]

الحل/ أ/ ق(س) = [س − 2] مجاله ح .

• اقتران أكبر عدد صحيح غير متصل عند نقط تحوله وغير مشتق عندها. ✗

مجال قَ(س) ح/ {جميع نقط التحول} .

ب/ ق(س) = |س − 2| − |س| مجاله ح . ✗

• اقتران القيمة المطلقة متصل عند نقط التحول وغير مشتق عندها .

مجال قَ(س) ح/ {ن ، 2}

جـ/ ق(س) = $\sqrt{س^2 + 2س + 1}$ = $\sqrt{(س+1)^2}$ = |س + 1| ✗ • تذكر $\sqrt{أ^2}$ = |أ|

غير مشتق عند (س = −1) ← مجال قَ = ح/{−1}

د/ ق(س) = [س − 2] − [س] = [س] − 2 − [س] = −2 كثير حدود متصل ومشتق على ح .

• 2019 دور أول/ إذا كان ق(س) = س ل(س) ، ق(٢) = -٦ ، ل'(٢) = ٤ ، ما قيمة ق'(٢)

أ/ -٣ ب/ ٢ ج/ ٥ د/ ١١

الحل/ ق(س) = س ل(س) ⇐ ق(٢) = ٢ ل(٢) ⇐ -٦ = ٢ ل(٢) ⇐ -٣ = ل(٢)

ق(س) = س ل(س) نشتق

ق'(س) = س ل'(س) + ل(س)

ق'(٢) = ٢ ل'(٢) + ل(٢) = ٢×٤ + -٣ = ٨ - ٣ = ٥

• 2019 دور ثاني/ إذا كان ق(س) ، ل(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح ، بحيث ل'(س) = ق(س)

ق'(س) = - ل(س) ، ما قيمة ل^(٤)(س)

أ/ ق(س) ب/ - ق(س) ج/ - ل(س) د/ ل(س)

الحل/ ل'(س) = ق(س)

ل''(س) = ق'(س) = - ل(س) ⇐ ل''(س) = - ل(س)

ل^(٣)(س) = - ل'(س) = - ق(س) ⇐ ل^(٣)(س) = - ق(س)

ل^(٤)(س) = - ق'(س) = - - ل(س) = ل(س)

• 2019 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = { س² + ٢ ، س ≠ ٥ ؛ ٢٠ ، س = ٥ } ما قيمة ق'(٥):

أ/ صفر ب/ ٥ ج/ ١٠ د/ غير موجودة

الحل/ بما أن (س = ٥) نقطة تحول ، نبحث في الاتصال أولاً

نها س→٥ ق(س) = نها س→٥ (س² + ٢) = ٥² + ٢ = ٢٧

≠

ق(٥) = ٢٠

⇐ ق(س) غير متصل عند (س = ٥) ⇐ ق'(٥) غ م

• 2020 دور أول/ إذا كان ق(س) = { ٢س² + ٤ ، س ≠ ٢ ؛ ٦س ، س = ٢ } ، ما قيمة ق'(٢)

أ/ ٨ ب/ ٦ ج/ ١٢ د/ غير موجودة

الحل/ (س = ٢) عندها نقطة تحول ⇐ نبحث بالاتصال أولاً

نها س→٢ ق(س) = نها س→٢ (٢س² + ٤) = ٢(٢)² + ٤ = ٨ + ٤ = ١٢

=

ق(٢) = ٦ × ٢ = ١٢

⇐ ق(س) متصل عند (س = ٢)

ق'(س) = ٤س ⇐ ق'(٢) = ٤ × ٢ = ٨

« ثمّ .. إنك لن تحمل كلّ هذه الأثقال .. دون صلاة ! »

• 2020 دور ثالث/ إذا كان $ق(س) = [٣س + ٥]$ و ما قيمة $ق'(٤)$

أ/ صفر ب/ ٣ ج/ ٨ د/ غير موجودة

الحل/ نفرض $س = ٤ \Leftarrow ٣ \times ٤ + ٥ = ١٧ + ٥ = ٢٢ \notin ص$

$\Leftarrow$ عند $س = ٤$ نقطة داخلية $\Leftarrow ق'(٤) =$ صفر

• 2020 دور ثالث/ ليكن $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٣س + ١ & ، س \geq ١ \\ [س] + ٣س & ، س < ١ \end{cases}$ ما قيمة $ق'(١)^+$

أ/ صفر ب/ ٣ ج/ ٤ د/ غير معرف

الحل/ $[س] = \begin{cases} ٠ & ، ٠ \leq س < ١ \\ ١ & ، ١ \leq س < ٢ \end{cases}$

$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٣س + ١ & ، س \geq ١ \\ ١ + ٣س & ، ١ \leq س < ٢ \end{cases}$

$ق'(١)^+ = (١ + ٣س)' = ٣$

• 2021 دور أول/ اذا كان $ق(س) = \frac{[\frac{١}{٢}س + ١]}{|س - ٢|}$ ما قيمة $ق'(٣)$

أ/ ٣ ب/ ٢ ج/ -٢ د/ -٣

الحل/ لضيع دائرة/ مشتقة $|ق(س)|$ عند $س = ٣$

إذا كان ناتج تعويض $(س = ٣)$ داخل $(\ |\ )$ موجب نشتقه وما داخل المطلقة كما هو.

إذا كان ناتج تعويض $(س = ٣)$ داخل $(\ |\ )$ سالب نضرب وما داخل المطلقة بسالب ثم نشتقه

$\Leftarrow |س - ٢|$ عند $س = ٣ \Leftarrow ٣ - ٢ = ١ > ٠$ إذن سيبقى كما هو.

$\Leftarrow |س - ٢| = (س - ٢)$ عند $س = ٣$

$[\frac{١}{٢}س + ١] \Leftarrow \frac{١}{٢} \times ٣ + ١ = \frac{٣}{٢} + ١ = \frac{٥}{٢} \notin ص \Leftarrow [\frac{١}{٢}س + ١]'|_{س=٣} =$ صفر

$\Leftarrow ق(س) = \frac{[\frac{١}{٢}س + ١]}{س - ٢} \Leftarrow ق'(س) = \frac{(س - ٢)[\frac{١}{٢}س + ١]' - [\frac{١}{٢}س + ١]}{(س - ٢)^٢}$

$ق'(٣) = \frac{(٣ - ٢) \times ٠ - [\frac{٣}{٢} + ١]}{(٣ - ٢)^٢} = \frac{-٢}{١} = -٢$

• 2021 دور ثاني/ اذا كان $ق(س) = س \cdot ل(س) + ٦$ وكان $ق'(٣) = -١٢$ و $ل(٣) = ٢$ ما قيمة $ق'(٣)$

أ/ -٢ ب/ -٦ ج/ صفر د/ ٤

الحل/ $ق(س) = س \cdot ل(س) + ٦ \Leftarrow ق'(٣) = ٣ \cdot ل'(٣) + ٦ \Leftarrow -١٢ = ٣ \cdot ل'(٣) + ٦ \Leftarrow ل'(٣) = -٦$

ق(س) = س ل(س) + ٦ ⇐ قَ(س) = س لَ(س) + ل(س)

قَ(٣) = ٣ لَ(٣) + ل(٣) = ٣(٢) + -٦ = ٦ - ٦ = ٠

• 2022 دور أول / اذا كان ق(س) = { س³ + ٣س ، س ≥ ١ ، س + ٣س² ، س < ١ } ، ما قيمة قَ(١)

أ/ ٢ ب/ ٤ ج/ ٦ د/ غير موجودة

الحل/ عند (س = ١) تحول ⇐ نبحث بالاتصال أولاً

نها س→١⁺ ق(س) = نها س→١⁺ (س³ + ٣س) = ١ + ٣ = ٤ = ق(١)

نها س→١⁻ ق(س) = نها س→١⁻ (س + ٣س²) = ١ + ٣ = ٤

⇐ ق(س) متصل عند س = ١

قَ(س) = { ٣س² + ٣ ، س ≥ ١ ، ١ + ٦س ، س < ١ }

قَ(١)⁺ = ٣ + ٣ = ٦ ≠ ، قَ(١)⁻ = ١ + ٦ = ٧

⇐ قَ(١) غ م ⇐ قَ(١) غ م

أ.مي حواري

• 2022 دور أول / اذا كان هـ(س) = س² ق(س) وكان ق(٢) + قَ(٢) = ٦ ما قيمة هـَ(٢)

أ/ ٢٤ ب/ ١٢ ج/ ٨ د/ ٤

الحل/ هـَ(س) = س² قَ(س) + ق(س)(٢س)

هـَ(٢) = ٤ قَ(٢) + ٤ ق(٢) = ٤ (قَ(٢) + ق(٢)) = ٤ × ٦ = ٢٤

• 2022 دور أول / إذا كان ق(س) = (س + ١)(س - ١)(س² + ١) ما قيمة قَ(-٢)

أ/ ٣٢ ب/ ٢٤ ج/ -٢٤ د/ -٣٢

الحل/ (س + ١)(س - ١) = س² - ١

⇐ ق(س) = (س + ١)(س - ١)(س² + ١) = (س² - ١)(س² + ١)

ق(س) = (س²)² - ١ = س⁴ - ١

قَ(س) = ٤ س³ ⇐ قَ(-٢) = ٤(-٢)³ = ٤ × -٨ = -٣٢

• 2022 دور أول / اذا كان د/دس (س/ق(س)) = ب/س حيث ق(س) ، س ≠ ٠ وكان قَ(٤) = ١/٢

ق(٤) = ١ ما قيمة الثابت ب

أ/ -١/٤ ب/ -٤ ج/ ١/٤ د/ ١٦

الحل/ د/دس (س/ق(س)) = (ق(س) - س قَ(س))/ق²(س) = ب/س |س = ٤ ⇐ (ق(٤) - ٤ قَ(٤))/ق²(٤) = ب/٤

⇐ (١ - ٤ × ١/٢)/١ = ب/٤ ⇐ ١ - ٢ = ب/٤ ⇐ -٤ = ب

• 2023 دور أول/ اذا كان $ق(س) = \frac{[١٠س]}{|س|}$ ما قيمة $ق'(\frac{١}{٣})$

أ/ -٢٧ ب/ ٢٧ جـ/ صفر د/ غير موجودة

الحل/ $|س|$ عند $(س = \frac{١}{٣}) = س$ لأن $|\frac{١}{٣}| \leftarrow (+)$

$[١٠س] \Leftarrow ١٠ \times \frac{١}{٣} = \frac{١٠}{٣} \notin ص \Leftarrow [١٠س]'\Big|_{س=\frac{١}{٣}} = صفر$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{[١٠س]}{س} \Leftarrow ق'(س) = \frac{س[١٠س]' - [١٠س]}{س^٢} \Leftarrow ق'(\frac{١}{٣}) = \frac{\frac{١}{٣} \times ٠ - [\frac{١٠}{٣}]}{(\frac{١}{٣})^٢}$

$\Leftarrow ق'(\frac{١}{٣}) = \frac{-٣}{\frac{١}{٩}} = -٣ \times \frac{٩}{١} = -٢٧$

• 2023 دور ثاني/ اذا كان $ق(س) = \frac{ك(س)}{س^٢+١}$ وكان $ق(٢) = -١$ ، $ق'(٢) = ٣$ ما قيمة $ك'(٢)$

أ/ ١١ ب/ ٥ جـ/ -٥ د/ -١١

الحل/ $ق(س) = \frac{ك(س)}{س^٢+١} \Leftarrow ق(س)(س^٢+١) = ك(س)$

أ.مي حواري

$\Leftarrow ق(س)(٢س) + (س^٢+١)ق'(س) = ك'(س)$

$ق(٢) \times ٤ + (٤+١)ق'(٢) = ك'(٢) \Leftarrow ٤(-١) + ٥(٣) = ك'(٢)$

$\Leftarrow -٤ + ١٥ = ك'(٢) \Leftarrow ١١ = ك'(٢)$

• 2023 دور ثاني/ إذا كان $ص = ق(س)$ حيث $(ص')^٢ = أص + ٢$ ما قيمة الثابت أ التي تجعل $ص'' = ٣$ علماً بأن $ص' > ٠$ لجميع قيم س الممكنة:

أ/ ٦ ب/ $\frac{٣}{٢}$ جـ/ $\frac{٢}{٣}$ د/ -٦

الحل/ $(ص')^٢ = أص + ٢$ نشتق

$٢\cancel{(ص')}ص'' = أ\cancel{ص'}$ ، $ص' \neq ٠$

$٢ص'' = أ$

$٢ \times ٣ = أ$

$أ = ٦$

طريقة (١)

طريقة (٢): $(ص')^٢ = أص + ٢$ بأخذ الجذر التربيعي

$ص' = \sqrt{أص + ٢}$ نشتق

$ص'' = \frac{أص'}{٢\sqrt{أص+٢}} \Leftarrow ص'' = \frac{أ\cancel{ص'}}{٢\cancel{ص'}}$ ، $ص' \neq ٠$

$ص'' = \frac{أ}{٢} \Leftarrow ٣ = \frac{أ}{٢} \Leftarrow أ = ٦$

• 2023 دور ثاني/ أي من الاقترانات الآتية قابلاً للاشتقاق على مجاله:

أ/ $ق(س) = [س-٢]$ ب/ $ق(س) = |س-٢| - |س|$

جـ/ $ق(س) = \sqrt{س^٢+٢س+١}$ د/ $ق(س) = [س-٢] - [س]$

مكرر

" انتقِ سكان قلبك جيداً .. ولا تثقل عليه المسميات "

• 2023 دورثالث/ اذاكان $ق(س) = س^4 + أس^3 - 2$ و $ق'(1) = 12$ ماقيمة الثابت أ

أ/ -2 ب/ 3 ج/ 4 د/ 6

الحل/ $ق'(س) = 4س^3 + 3أس^2 \Leftarrow ق'(س) = 12س^2 + 6أس \Leftarrow ق''(س) = 24س + 6أ$

$ق''(1) = 24 + 6أ \Leftarrow 12 = 24 + 6أ \Leftarrow -12 = 6أ \Leftarrow أ = -2$

• 2024 دورثاني/ اذاكان $ه(س) = (2س^4 - 3)[س - 3و]$ ماقيمة $ه'(-1)$

أ/ 3 ب/ 8 ج/ 4 د/ غير موجودة

الحل/ $-1 - 3و = -3و1 \notin ص \Leftarrow$ صفر $= |[س - 3و]|_{س=-1}$

$ه'(س) = (2س^4 - 3)[س - 3و]' \Leftarrow ه'(س) = (2س^4 - 3)[س - 3و] + [س - 3و] \times 8س^3$

$ه'(-1) = (2 - 3) \times$ ث $+ [-1 - 3و] \times 8 \times -1 = -2 \times -4 = 8$

• 2024 دورثاني/ إذاكان $ه(س) = س^ن$ وكان $ق^{(3)}(س) = 24س^2$ ماقيمة الثابت أ

أ/ 15 ب/ 30 ج/ 20 د/ 1

الحل/ $ق'(س) = نس^{ن-1} \Leftarrow ق''(س) = ن(ن-1)س^{ن-2} \Leftarrow ق^{(3)}(س) = ن(ن-1)(ن-2)س^{ن-3}$

$\Leftarrow 24س^2 = ن(ن-1)(ن-2)س^{ن-3}$ بالمقارنة

$س^2 = س^{ن-3} \Leftarrow 2 = ن - 3 \Leftarrow 5 = ن$

$24 = ن(ن-1)(ن-2) \Leftarrow 24 = 5 \times 4 \times 3 \Leftarrow أ = 15$

• 2024 دورثالث/ إذاكان $ه(س) = \frac{6}{ك(س)}$ و $ك(س) \neq$ ث وكان $ك(1) = 3$ و $ق(1) = 6$ ما قيمة $ق'(1)$

أ/ -4 ب/ 4 ج/ 8 د/ -8

الحل/ $ه(س) = \frac{6}{ك(س)} \Leftarrow ه(س) ك(س) = 6 \Leftarrow ك(س) = \frac{6}{ه(س)} \Leftarrow ك'(س) = \frac{-6ق'(س)}{ه^2(س)}$

$ق'(1) = \frac{-6ق(1)}{ه^2(1)} = \frac{-6 \times 6}{3^2} = \frac{-36}{9} = -4$

• 2025 دوراول/ اذاكان $ه(س) = س^ن$ و $ن \in ص$ و $ن \neq$ ث وكان $ق^{(3)}(س) = 4س$ و ما قيمة الثابت أ

أ/ 12 ب/ 24 ج/ 40 د/ 96

الحل/ $ق'(س) = نس^{ن-1} \Leftarrow ق''(س) = ن(ن-1)س^{ن-2} \Leftarrow ق^{(3)}(س) = ن(ن-1)(ن-2)س^{ن-3}$

$\Leftarrow 4س = ن(ن-1)(ن-2)س^{ن-3}$ بالمقارنة

$س^1 = س^{ن-3} \Leftarrow 1 = ن - 3 \Leftarrow 4 = ن$

$أ = ن(ن-1)(ن-2) \Leftarrow أ = 4 \times 3 \times 2 = 24$

• 2025 دور ثاني / إذا كان ق(س) كثير حدود وكان قً(س) + ق(س) − س + س² = ٠
ما قيمة قَ(٠) + قً(٠)

أ/ −٢ ب/ صفر ج/ −١ د/ ٣

الحل/ قً(س) + ق(س) − س + س² = ٠

قً(س) + ق(س) = −س² + س

بما أن قً + ق من الدرجة الثانية ⇐ ق من الدرجة الثانية

نفرض ق(س) = −س² + ب س + جـ

قَ(س) = −٢س + ب

قً(س) = −٢

ق(س) + قً(س) = −س² + ب س + جـ − ٢ ⇐ −س² + ب س + (جـ − ٢) = −س² + س

ب س = س ⇐ ب = ١ ، جـ − ٢ = ٠ ⇐ جـ = ٢

قَ(س) = −٢س + ١ ⇐ قَ(٠) = ١

قً(س) = −٢ ⇐ قً(٠) = −٢

قَ(٠) + قً(٠) = ١ − ٢ = −١

أ.مي حواري

• 2019 قلقيلية / اذا كان ق(س) = $\frac{١}{جـ}$ س^ن وكان ق^(٣)(س) = (جـ + ٢) س ما قيمة الثابت جـ الموجبة :

أ/ ٤ ب/ ٦ ج/ ٨ د/ ٢

الحل/ قَ(س) = $\frac{ن}{جـ}$ س^(ن−١) ⇐ قً(س) = $\frac{ن(ن-١)}{جـ}$ س^(ن−٢) ⇐ قً(س) = $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{جـ}$ س^(ن−٣)

⇐ (جـ + ٢) س = $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{جـ}$ س^(ن−٣) بالمقارنة

س^١ = س^(ن−٣) ⇐ ١ = ن − ٣ ⇐ ٤ = ن

(جـ + ٢) = $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{جـ}$ ⇐ جـ² + ٢جـ = ٤ × ٣ × ٢ ⇐ جـ² + ٢جـ − ٢٤ = ٠

⇐ (جـ − ٤)(جـ + ٦) = ٠

إما جـ + ٦ = ٠ ⇐ جـ = −٦ سالبة ✗

أو جـ + −٤ = ٠ ⇐ جـ = ٤ موجبة .

• 2019 مديرية نابلس / اذا كان ق(س) = { [$\frac{١}{٢}$س] س ، ٣ ≤ س < ٤ ؛ أس² + ب س ، ٤ ≤ س ≤ ٥ } قابل للاشتقاق على]٠،٣[فإن قيم الثابتين أ، ب على التوالي هو :

أ/ ١، ٠ ب/ ١، ٢ ج/ صفر، ٢ د/ صفر، ١

الحل/ [$\frac{١}{٢}$س] = { ٠، ٠ ≤ س < ٢ ؛ ١، ٢ ≤ س < ٤ }

ل = $\frac{١}{١\frac{١}{٢}}$ = ٢

⇐ ق(س) = { س ، ٣ ≤ س < ٤ ؛ أس² + ب س ، ٤ ≤ س ≤ ٥ }

ق(س) مشتق على]٣،٥[⇐ ق(س) مشتق على (س = ٤) ⇐ قَ(٤)⁺ = قَ(٤)⁻

⇐ ٢أس + ب = ١ |_{س=٤} ⇐ ٨أ + ب = ١ — (١)

ق'(٤) موجودة ⇐ ق(س) متصل عند س = ٤

$\lim_{س \to ٤^+} أس^٢ + ب س = \lim_{س \to ٤^-} س$ ⇐ (١٦أ + ٤ب = ٤) ÷ ٤ ⇐ ٤أ + ب = ١ — (٢)

(١) − (٢) : ٤أ = ٠ ⇐ أ = ٠ نعوضها في (٢) ⇐ ٠ + ب = ١ ⇐ ب = ١

أ، ب = صفر، ١

• 2019 شمال غزة / لتكن $هـ(س) = \frac{[٢س+١]}{ل(س)}$ ، هـ(١/٣) = ٢ ، هـ'(١/٣) = −١ فإن ل'(١/٣) =

أ/ ١/٤ ب/ −١/٤ جـ/ ١/٩ د/ −١/٩

الحل/ $٢س+١ \Big|_{س=\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣}+١ = \frac{٥}{٣} \notin ص$ ⇐ $[٢س+١]' \Big|_{س=\frac{١}{٣}}$ = صفر

$هـ(س) = \frac{[٢س+١]}{ل(س)}$ ⇐ هـ(س) ل(س) = [٢س+١] ⇐ $ل(س) = \frac{[٢س+١]}{هـ(س)}$

$ل'(س) = \frac{هـ(س)[٢س+١]' - [٢س+١]هـ'(س)}{هـ^٢(س)}$ ⇐ $ل'(\frac{١}{٣}) = \frac{هـ(\frac{١}{٣}) \times ٠ - [\frac{٢}{٣}+١]هـ'(\frac{١}{٣})}{هـ^٢(\frac{١}{٣})}$

⇐ $ل'(\frac{١}{٣}) = \frac{-١ \times -١}{(٢)^٢} = \frac{١}{٤}$

• 2019 يطا / ق(٤) = ٥ ، ق'(٤) = −١ ، ق''(٤) = ٢ فإن $(\frac{ق}{ق'})'(٤)$

أ/ ١١ ب/ −٩ جـ/ −٦ د/ ٦

الحل/ $(\frac{ق}{ق'})'(٤) = \frac{ق'(٤)ق'(٤) - ق(٤)ق''(٤)}{(ق'(٤))^٢} = \frac{(-١)(-١) - ٥ \times ٢}{(-١)^٢} = \frac{١ - ١٠}{١} = -٩$

• 2019 غرب غزة / اذا كان ق(س) = $س^٤ + أس^٣ - ٣$ وكان $ق^{(٣)}(٢) = ١٨$ فإن قيمة الثابت أ

أ/ −٥ ب/ ٥ جـ/ ٣ د/ ٢

الحل/ $ق'(س) = ٤س^٣ + ٣أس^٢$ ⇐ $ق''(س) = ١٢س^٢ + ٦أس$ ⇐ $ق^{(٣)}(س) = ٢٤س + ٦أ$

$ق^{(٣)}(٢) = ٢٤ \times ٢ + ٦أ$ ⇐ ١٨ = ٤٨ + ٦أ ⇐ −٣٠ = ٦أ ⇐ −٥ = أ

• 2020 طوباس / اذا كان $\frac{د}{دس}\left(\frac{ق(س)}{س^٢+١}\right) = ٤س^٣$ ، ق(−١) = ٣ ، ق'(−١) =

أ/ −١١ ب/ −٥ جـ/ ٢١ د/ −٢١

الحل/

$\frac{د}{دس}\left(\frac{ق(س)}{س^٢+١}\right) = \frac{(س^٢+١)ق'(س) - ق(س)(٢س)}{(س^٢+١)^٢} = ٤س^٣ \Big|_{س=-١}$

⇐ $\frac{(١+١)ق'(-١) + ٢ق(-١)}{(١+١)^٢} = ٤(-١)^٣$ ⇐ $\frac{٢ق'(-١) + ٢ \times ٣}{٤} = -٤$ ⇐ ٢ق'(−١) + ٦ = −١٦

⇐ ٢ق'(−١) = −٢٢ ⇐ ق'(−١) = −١١

يا فتى! يُكلّفك الجلوس، ما لا يكلفك السّير المُتعِب!

• 2020 الوسطى/ اذا كان الاقتران ق(س) كثير حدود ، وكان ق(س) + قَ(س) = ٢س² − ٣س
ما قيمة قَ(١)

أ/ ١ ب/ ٢ ج/ ٤ د/ ٨

الحل/ ق(س) + قَ(س) = ٢س² − ٣س
بما أن ق(س) + قَ(س) من الدرجة الثانية ⇐ ق(س) من الدرجة الثانية
نفرض ق(س) = ٢س² + ب س + ج
قَ(س) = ٤س + ب
قَ(س) = ٤ ⇐ قَ(١) = ٤

• 2020 القدس/ اذا كان ق(س) = [س + ٧] + −[س] + |٢س| ، س ∈]−٥ ، −١[
ما قيمة قَ(−٣)

أ/ ٢ ب/ −٢ ج/ ١٣ د/ غير موجودة

الحل/ ق(س) = [س] + ٧ − [س] + |٢س|

⇐ ق(س) = ٧ + |٢س|
ق(س) = ٧ − ٢س
قَ(س) = −٢
قَ(−٣) = −٢

، |٢س| = |٢ × −٣| = |−٦| ← سالب
⇐ |٢س| = −٢س عند س = −٣

• 2020 نابلس/ إذا كان ص = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ فإن س²صً + سصَ =

أ/ $\frac{١}{ص}$ ب/ ١ ج/ ٣ص د/ ص

الحل/ ص = $\frac{١}{س}$ ⇐ صَ = $\frac{-١}{س^٢}$ = −س⁻² ⇐ صً = ٢س⁻³

المطلوب/ س²صً + سصَ = س² × $\frac{٢}{س^٣}$ + س × $\frac{-١}{س^٢}$ = $\frac{٢}{س}$ − $\frac{١}{س}$ = $\frac{١}{س}$ = ص

• 2021 الوسطى/ اذا كان ق(س) = س + [س + ١,٢] + √س² ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما س = −١

أ/ صفر ب/ ١ ج/ ٢ د/ غير موجودة

الحل/ √س² = |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ −س ، س < ٠ }
، [س + ١,٢] = { ٠ ، −١,٢ ≤ س < −٢و ؛ ١ ، −٢و ≤ س < ٨و }
ل = ١
س = −١,٢

⇐ ق(س) = س + ٠ − س = ٠ عند (س = −١)
قَ(س) = ٠ ⇐ قَ(−١) = ٠

• 2021 شمال غزة/ اذا كان ق(س) = [٢س + ١,٦] + |س − ٢| ما قيمة قَ(١)

أ/ ١ ب/ صفر ج/ −١ د/ غير موجودة

الحل/ [٢س + ١,٦] = [٢ + ١,٦] = [٢,٦] ← ∉ ص ⇐ [٢س + ١,٦]′ |س = ١ = ٠
|س − ٢| = |١ − ٢| = |−١| ← سالب ⇐ |س − ٢| = ٢ − س عند س = ١

⇐ ق(س) = [٢س + ٦و١] + ٢ − س ⇐ قَ(س) = [٢س + ٦و١]′ + −١

قَ(١) = ٠ − ١ = −١

• 2022 طولكرم / اذا كان ق(س) = |م س² + ٦س + ٩| ، جد قيمة م التي تجعل ق(س) قابلاً للاشتقاق على مجاله.

أ/ م = ١ ب/ م ≤ ١ جـ/ م > ١ د/ م < ١

الحل/ يكون الاقتران قابل للاشتقاق على مجاله إذا وفقط إذا كان مجال ق(س) = مجال قَ(س)

ويكون مجال ق(س) = |م س² + ٦س + ٩| ح ونعلم أن |هـ(س)| مشتق على ح/{ نقط التحول }

اذن يجب أن يكون ق(س) بدون نقاط تحول.

|أ س² + ب س + جـ| ، أ ≠ ٠ ، أ، ب، جـ ∈ ح

① اذا كان المميز > ٠
يوجد حلان مختلفان
لـ (أ س² + ب س + جـ)
نفس أ عكس أ نفس أ
□ ○
⇐ يوجد نقطتان تحول

② اذا كان المميز = ٠
يوجد حل واحد فقط
نفس أ نفس أ
□
لاحظ لم تتغير الاقتران
⇐ لا يوجد نقاط تحول

③ اذا كان المميز < ٠
لا يوجد حلول.
نفس اشارة أ
لا يوجد نقط تحول

وعليه لكي يكون |م س² + ٦س + ٩| بدون نقاط تحول ⇐ المميز ≤ ٠

ب² − ٤أ جـ ≤ ٠ ⇐ (٦)² − ٤ × م × ٩ ≤ ٠ ⇐ ٣٦ − ٣٦م ≤ ٠

⇐ ٣٦ ≤ ٣٦م ⇐ ١ ≤ م

• 2023 طوباس / إذا كان ق(س) = (س − ب) ل(س) حيث ل(س) اقتران متصل عند س = ب

ماذا تساوي قَ(ب) ⇐ يجب أن يقول أن ل(س) قابل للاشتقاق عند س = ب

أ/ ل(ب) ب/ لَ(ب) جـ/ ق(ب) د/ صفر

الحل/ ق(س) = (س − ب) ل(س) ⇐ قَ(س) = (س − ب) لَ(س) + ل(س)

قَ(ب) = (ب − ب) لَ(ب) + ل(ب) = ل(ب)

• 2024 الخليل / إذا كان ق(س) = √(س² − ١٠س + ٢٥) + [س/٢] فإن قً(١) =

أ/ −١ ب/ ٤ جـ/ ٠ د/ عم

الحل/ * [س/٢] = { ٠ ، ٠ ≤ س < ٢ ؛ ١ ، ٢ ≤ س < ٤ }

ل = ١/(١/٢) = ٢

* √(س² − ١٠س + ٢٥) = √((س − ٥)²) = |س − ٥|

⇐ |س − ٥| عند (س = ١) = |١ − ٥| = |−٤| ⇐ |س − ٥| = ٥ − س.

⇐ ق(س) = ٥ − س + ٠ ⇐ قَ(س) = −١ ⇐ قً(س) = ٠ ⇐ قً(١) = ٠

• 2025 جنوب نابلس/ أي من الاقترانات الآتية قابلاً للاشتقاق على مجاله:

أ/ ق(س) = [س − ٢] − [س] + √س² ب/ ك(س) = |س − ٢| − |س + ٢|

جـ/ هـ(س) = [س] + |س²| − [س − ٢] د/ م(س) = √(س − ٢)

الحل/ أ/ ق(س) = [س − ٢] − [س] + √س²

✗ ق(س) = [س] − ٢ − [س] + |س| = −٢ + |س| مجاله ح .

ق(س) غير مشتق عند (س = ٠) نقطة التحول ⇐ مجال قَ(س) = ح/{٠} .

✗ ب/ ك(س) = |س − ٢| − |س + ٢| المجال ح

ك(س) غير مشتق عند نقط التحول ⇐ س = ٢، −٢ ⇐ مجال كَ = ح/{٢، −٢}

✓ جـ/ هـ(س) = [س] + |س²| − [س − ٢]

هـ(س) = [س] + س² − [س] + ٢ = س² + ٢ كثير حدود مشتق على ح .

✗ د/ م(س) = √(س − ٢) مجال س − ٢ ≥ ٠ ⇐ س ≥ ٢

مَ(س) = ١ / (٢√(س − ٢)) مجاله س > ٢ "لاحظ س = ٢ صفراً للمقام"

• ملاحظة: |س^ن| = { س^ن ، ن عدد زوجي ؛ |س|^ن ، ن فردي }

• خارجي/ ق(س) كثير حدود وكان ق(س) − (ق + قَ)′(س) = ٤س² + ١٧س + ٢١ ما قيمة ق(−١)

أ/ ٨ ب/ −٨ جـ/ ٣٣ د/ ٢١

الحل/ ق(س) − (قَ + قً)(س) = ٤س² + ١٧س + ٢١

ق(س) − قَ(س) − قً(س) = ٤س² + ١٧س + ٢١

بما أن ق − قَ − قً من الدرجة الثانية ⇐ ق من الدرجة الثانية

نفرض ق(س) = ٤س² + ب س + جـ

قَ(س) = ٨س + ب

قً(س) = ٨

⇐ ق − قَ − قً = ٤س² + ب س + جـ − ٨س − ب − ٨

٤س² + ١٧س + ٢١ = ٤س² + (ب س − ٨س) + (جـ − ب − ٨) بالمقارنة

١٧س = (ب − ٨) س ٢١ = جـ − ب − ٨ ⇐ ٢١ = جـ − ٢٥ − ٨

١٧ = ب − ٨ ٢١ = جـ − ٣٣

٢٥ = ب ٥٤ = جـ

⇐ ق(س) = ٤س² + ٢٥س + ٥٤ ⇐ ق(−١) = ٤ − ٢٥ + ٥٤ = ٣٣

• خارجي/ اذا كان ق(س) = { |٢س - ٤| + أ س² ، -١ ≤ س ≤ ١ ؛ [٣ - س] + ب س ، ١ < س ≤ ٢ } ما قيمة كل من الثابتين أ ، ب علماً بأن ق'(س) موجودة

أ/ ٢ ، ٠ ب/ ٠ ، ٢ ج/ ٢ ، ١ د/ ٣ ، ٤

الحل/ |٢س - ٤| = { ٢س - ٤ ، س ≥ ٢ ؛ ٤ - ٢س ، س < ٢ } ← [-١ ، ١] ⊂]-∞ ، ٢[

[٣ - س] = { ٢ ، ٠ < س ≤ ١ ؛ ١ ، ١ < س ≤ ٢ }

∵ ق(س) = { ٤ - ٢س + أ س² ، -١ ≤ س ≤ ١ ؛ ١ + ب س ، ١ < س ≤ ٢ }

ق'(١) موجودة

ق'(١)⁺ = ق'(١)⁻ ← ق(س) متصل عند س = ١

ب = -٢ + ٢أ س |س = ١

ب = -٢ + ٢أ ——— (١)

نها س ← ١⁺ (١ + ب س) = نها س ← ١⁻ (٤ - ٢س + أ س²)

١ + ب = ٤ - ٢ + أ

١ + ب = ٢ + أ ⇐ ب = ١ + أ ——— (٢)

(١) - (٢) : ٠ = -٣ + أ ⇐ ٣ = أ نعوضها في (٢)

ب = ١ + أ ⇐ ب = ١ + ٣ ⇐ ب = ٤ (أ ، ب) = (٣ ، ٤)

• خارجي/ إذا كان ق(س) = |٢س/ب + ٤| ما قيمة الثابت ب الذي يجعل ق'(٢) غير موجودة :

أ/ -٤ ب/ ٤ ج/ ١ د/ -١

الحل/ |أ س + ب| غير مشتق عند نقطة تحوله " نقط تحوله = صفره "

اذن (س = ٢) صفراً لـ (٢س/ب + ٤) ⇐ ٢×٢/ب + ٤ = ٠ ⇐ ٤/ب = -٤ ⇐ ب = -١

• خارجي/ ما قيمة د/دس (س² د²/دس² (١/(١ + س))) عند س = ١

أ/ ١/٨ ب/ -١/٨ ج/ -٨ د/ ٨

الحل/ نجد أولاً المشتقة الثانية لـ ١/(١ + س) = هـ(س)

هـ'(س) = -١/(١ + س)² = -(١ + س)⁻² ⇐ هـ''(س) = ٢(١ + س)⁻³ = ٢/(١ + س)³

⇐ المطلوب/ د/دس (س² × ٢/(١ + س)³) = د/دس (٢س²/(١ + س)³)

= |س = ١ ((١ + س)³ × ٤س - ٢س² × ٣(١ + س)²)/(١ + س)⁶) = (٢³ × ٤ - ٦ × ٢²)/٢⁶ = (٣٢ - ٢٤)/٦٤ = ٨/٦٤

= ١/٨

• خارجي/ اذا كان $ق(س) = س^3 |س| [س]$ ما قيمة $ق'(-1.5)$

الحل/ $|س| = \begin{cases} -س & ، س < 0 \\ س & ، س \geq 0 \end{cases}$ ، $[س] = \begin{cases} -2 & ، -2 \leq س < -1 \\ -1 & ، -1 \leq س < 0 \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} -س^4 & ، س < 0 \\ س^4 & ، س \geq 0 \end{cases}$ ، $ق'(س) = \begin{cases} -4س^3 & ، س < 0 \\ 4س^3 & ، س \geq 0 \end{cases}$

عندما $س = -1.5$ ⇐ $ق'(س) = 4س^3$

$ق'(-1.5) = 4 \times (-\frac{3}{2})^3 = 4 \times \frac{9}{4} \times (-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{2}$

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة الآتية :

• 2019 دور ثاني/ اذا كان $ص = 4س^5 + \frac{5}{س^4}$ ، $س \neq 0$ أثبت أن $ص' = \frac{س ص}{س^5}$

الحل/ $ص = 4س^5 + 5س^{-4}$

$\frac{ص}{س} = 4س^4 - \frac{5}{س^4}$ ⇐ $ص' = 20س^3 + 20س^{-5}$ ⇐ $ص' = 4(5س^3 + 5س^{-5})$

$ص' س^4 = 20(س^5 + 5س^{-4})$ ⇐ $ص' س^4 = 20ص$ ⇐ $ص' = \frac{20ص}{س^4}$ #

• 2020 دور ثاني/ ليكن الاقتران $ق$ ، $هـ$ اقترانين يحققان المعادلتين $ق(س) + هـ(س) = 0$ ، $ق(س) - هـ(س) = 0$ وكان كل من $ق(س)$ ، $هـ(س) \neq 0$ أثبت أن $ل(س) = 1 + ل^2(س)$ حيث $ل(س) = \frac{هـ(س)}{ق(س)}$

الحل/ $ق(س) + هـ(س) = 0$ ⇐ $ق(س) = -هـ(س)$

$هـ(س) - ق(س) = 0$ ⇐ $هـ(س) = ق(س)$

$ل(س) = \frac{هـ(س)}{ق(س)}$ ⇐ $ل'(س) = \frac{ق(س) هـ'(س) - هـ(س) ق'(س)}{ق^2(س)} = \frac{ق(س) ق'(س) - هـ(س) \times -هـ(س)}{ق^2(س)}$

$ل'(س) = \frac{ق^2(س) + هـ^2(س)}{ق^2(س)}$ ⇐ $ل'(س) = \frac{ق^2(س)}{ق^2(س)} + \frac{هـ^2(س)}{ق^2(س)}$

⇐ $ل'(س) = 1 + (\frac{هـ(س)}{ق(س)})^2 = 1 + ل^2(س)$ #

• 2021 دور أول/ إذا كان $قَ(س) = س ق(س) + ق(3)$ وكان $قَ(3) = -4$ ما قيمة $قَ'(3)$

الحل/ $قَ(س) = س ق(س) + ق(3)$ ⇐ $قَ'(3) = 3ق(3) + ق'(3)$ ⇐ $-4 = 4ق(3)$ ⇐ $ق(3) = -1$

$قَ(س) = س ق(س) + ق(3)$

$قَ'(س) = س قَ'(س) + ق(س)$ ⇐ $قَ'(3) = 3قَ'(3) + ق(3)$

$= 12 - 4 - 1 = -13$

• 2021 دور أول/ إذا كانت $ق(س) = \begin{cases} 4س^2 + ب س + 3 & ، س \leq 2 \\ س^2 + 12س - 10 & ، س > 2 \end{cases}$ وكانت $ق'(2)$ موجودة

ما قيم كل من الثابتين $ب$ ، $ج$.

الحل/ ق(٢) موجودة ⟵ ق(س) متصل عند (س = ٢)

ق(٢)⁺ = ق(٢)⁻

٢أس + ب = ٢س + ١٢ | س = ٢

٤أ + ب = ٤ + ١٢

٤أ + ب = ١٦ ——— (١)

نها (س ← ٢⁺) أس² + بس + ٢ = نها (س ← ٢⁻) س² + ١٢س − ١٠

٤أ + ٢ب + ٢ = ٤ + ٢٤ − ١٠

٤أ + ٢ب = ١٦ ——— (٢)

(٢) − (١) : ب = ∴ نعوضها في (١) ⟸ ٤أ = ١٦ ⟸ أ = ٤

⟸ أ، ب = ٤، صفر

• 2021 دور ثاني/ اذا كان هـ(س) = (س − ١)(س + ١)(س² + س + ١)(س² − س + ١) ما قيمة هـ′(٢)

الحل/ هـ(س) = (س − ١)(س² + س + ١)(س + ١)(س² − س + ١)

هـ(س) = (س³ − ١)(س³ + ١) = س⁶ − ١

هـ′(س) = ٦س⁵ ⟸ هـ′(٢) = ٦ × ٢⁵ = ٦ × ٣٢ = ١٩٢

• 2023 دور أول/ إذا كان ق′(س) = √س ق(س) + ق(٤) بحيث ق′(٤) = ٦ ما قيمة ق″(٤)

الحل/ ق′(س) = √س ق(س) + ق(٤) ⟸ ق′(٤) = √٤ ق(٤) + ق(٤) ⟸ ٦ = ٢ق(٤) + ق(٤)

٦ = ٣ق(٤) ⟸ ٢ = ق(٤)

ق′(س) = √س ق(س) + ق(٤)

ق″(س) = √س ق′(س) + ق(س)/(٢√س) ⟸ ق″(٤) = √٤ ق′(٤) + ق(٤)/(٢√٤)

⟸ ق″(٤) = ٢ × ٦ + ٢/(٢ × ٢) = ١٢ + ١/٢ = (٢٤ + ١)/٢ = ٢٥/٢

• 2024 دور ثاني/ إذا علمت أن ق(س) = { س² + أس ، س < ٢ ؛ ب س² + ٢ ، س ≥ ٢ } قابلاً للاشتقاق على ح

ما قيمة كل من الثابتين أ، ب

الحل/ ق(س) قابلاً للاشتقاق على ح ⟵ ق(س) قابل للاشتقاق عند (س = ٢)

ق′(٢) موجودة ⟵ ق(س) متصل عند (س = ٢)

ق′(٢)⁺ = ق′(٢)⁻

٢ب س = ٢س + أ | س = ٢

٤ب = ٤ + أ ——— (١)

نها (س ← ٢⁺) (ب س² + ٢) = نها (س ← ٢⁻) (س² + أس)

٤ب + ٢ = ٤ + ٢أ

٤ب = ٢ + ٢أ ——— (٢)

(٢) − (١) : ∴ = −٢ + أ ⟸ أ = ٢ نعوضها في ١

٤ب = ٤ + ٢ ⟸ ٤ب = ٦ ⟸ ب = ٦/٤ ⟸ ب = ٣/٢

يا فتى! في الهجرة؛ اهجر ذاتاً قديمة، وابدأ بإعداد قلب سليم يُحبّه الله!

• 2024 دور ثالث (مصر) / إذا كان $ص = ٣س^{ن} + ٢س^{١-ن}$ حيث $ن \in ط$ ، $ن \geq ٢$

أثبت أن $س^{٢}\frac{دص}{دس} = ن(ن-١)ص$

الحل/ $ص = ٣س^{ن} + ٢س^{١-ن} \Leftarrow ص' = ٣ن س^{ن-١} + ٢(١-ن) س^{١-ن-١}$

$\Leftarrow ص' = ٣ن س^{ن-١} + ٢(١-ن) س^{-ن}$

$ص'' = ٣ن(ن-١) س^{ن-٢} + ٢(١-ن) \times -ن س^{-ن-١}$

$ص'' = ٣ن(ن-١) س^{ن-٢} + ٢(ن-١)(ن) س^{-ن-١}$ اخراج $(ن)(ن-١)$ عامل مشترك .

$س^{٢} \times ص'' = ن(ن-١)(٣س^{ن-٢} + ٢س^{-ن-١}) \times س^{٢}$

$س^{٢}ص'' = ن(ن-١)(٣س^{ن-٢} \times س^{٢} + ٢س^{-ن-١} \times س^{٢})$

$س^{٢}ص'' = ن(ن-١)(٣س^{ن-٢+٢} + ٢س^{-ن-١+٢})$

$س^{٢}ص'' = ن(ن-١)(٣س^{ن} + ٢س^{-ن+١}) \Leftarrow س^{٢}ص'' = ن(ن-١)ص$ #

• 2023 جنوب الخليل / اذا كان $ق(س) = س\,هـ(س)$ وكان $هـ^{(٢٠٠)}(٢) = ٢$ ، $هـ^{(١٩٩)}(٢) = ٣$

ما قيمة $ق^{(٢٠٠)}(٢)$

اكتشاف نمط

الحل/ $ق(س) = س\,هـ(س)$

* $ق'(س) = س\,هـ'(س) + هـ(س)$

$ق''(س) = س\,هـ''(س) + هـ'(س) + هـ'(س)$

* $\Leftarrow ق''(س) = س\,هـ''(س) + ٢هـ'(س)$

$ق'''(س) = س\,هـ'''(س) + هـ''(س) + ٢هـ''(س)$

* $\Leftarrow ق^{(٣)}(س) = س\,هـ^{(٣)}(س) + ٣هـ''(س)$

⋮

$ق^{(ن)}(س) = س\,هـ^{(ن)}(س) + ن\,هـ^{(ن-١)}(س)$

$\Leftarrow ق^{(٢٠٠)}(٢) = ٢هـ^{(٢٠٠)}(٢) + ٢٠٠\,هـ^{١٩٩}(٢) = ٢ \times ٢ + ٢٠٠ \times ٣ = ٤ + ٦٠٠ = ٦٠٤$

• 2024 مديرية رام الله / إذا كان $ق(س) = س^{٣} + ق'(١)س^{٢} + ق''(٢)س + ق''(٣)$ ما قيمة $ق(٥)$

الحل/ نفرض $أ = ق'(١)$ / $ب = ق''(٢)$ / $جـ = ق''(٣)$

$ق(س) = س^{٣} + أس^{٢} + ب س + جـ$

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢أس + ب$

$ق''(س) = ٦س + ٢أ$

$ق''(٢) = ٦ \times ٢ + ٢أ$

$ب = ١٢ + ٢أ$

$-١٢ = ٢أ - ب$ — $\boxed{١}$

$ق''(٣) = ٦ \times ٣ + ٢أ$

$جـ = ١٨ + ٢أ$ — $\boxed{٢}$

$ق'(١) = ٣ + ٢أ + ب$

$أ = ٣ + ٢أ + ب$

$-٣ = أ + ب$ — $\boxed{٣}$

$\boxed{١} + \boxed{٣}$ / $-١٥ = ٣أ \Leftarrow أ = -٥$ نعوضها في $\boxed{٢} \Leftarrow جـ = ١٨ + ٢ \times -٥ = ١٨ - ١٠ = ٨$

نعوض أ في $\boxed{٣} \Leftarrow -٣ = -٥ + ب \Leftarrow ٢ = ب$

$\Leftarrow$ ق(س) = س^{٣} − ٥س^{٢} + ٢س + ٨

ق(٥) = ١٢٥ − ٥×٢٥ + ١٠ + ٨ = ١٨

• 2024 مديرية طولكرم / إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}+٢}{\text{٢س}-١}$ ، س ≠ $\frac{١}{٢}$ جد قيم س حيث ق'(س) = −٤

الحل/ ق'(س) = $\frac{(\text{٢س}-١)(\text{٢س})-(\text{س}^{٢}+٢)(٢)}{(\text{٢س}-١)^{٢}}$

$\Leftarrow$ −٤ = $\frac{\text{٤س}^{٢}-\text{٢س}-\text{٢س}^{٢}-٤}{(\text{٢س})^{٢}-٢(\text{٢س})+١}$ $\Leftarrow$ −٤ = $\frac{\text{٢س}^{٢}-\text{٢س}-٤}{\text{٤س}^{٢}-\text{٤س}+١}$

$\Leftarrow$ $\frac{-٤}{٢}$(٤س^{٢} − ٤س + ١) = $\frac{٢}{٢}$(س^{٢} − س − ٢) $\Leftarrow$ −٢(٤س^{٢} − ٤س + ١) = س^{٢} − س − ٢

$\Leftarrow$ −٨س^{٢} + ٨س − ~~٢~~ = س^{٢} − س − ~~٢~~ $\Leftarrow$ ٩س^{٢} − ٩س = ٠ $\Leftarrow$ ٩س(س − ١) = ٠

إما ٩س = ٠ $\Leftarrow$ س = ٠ أو س − ١ = ٠ $\Leftarrow$ س = ١

$\Leftarrow$ س = {٠ ، ١}

• 2025 مديرية جنين / اذا كان ق(س) = $\begin{cases} |\text{٣}-\text{س}|+\text{٢س} & ، \text{٠} \le \text{س} \le \text{٢} \\ \text{س}^{٣}+١ & ، \text{س} > \text{٢} \end{cases}$ ، ابحث في قابلية اشتقاق ق(س) على مجاله

الحل/ مجال ق(س) ، س ∈ [٠ ، ∞[

|٣ − س| = |س − ٣| = $\begin{cases} \text{س}-٣ & ، \text{س} \ge ٣ \\ \boxed{\text{٣}-\text{س} ، \text{س} < ٣} \end{cases}$

$\boxed{|\text{أ}-\text{ب}| = |\text{ب}-\text{أ}|}$

$\Leftarrow$ ق(س) = $\begin{cases} \text{٣}-\text{س}+\text{٢س} & ، \text{٠} \le \text{س} \le \text{٢} \\ \text{س}^{٣}+١ & ، \text{س} > \text{٢} \end{cases}$ $\Leftarrow$ ق(س) = $\begin{cases} \text{٣}+\text{س} & ، \text{٠} \le \text{س} \le \text{٢} \\ \text{س}^{٣}+١ & ، \text{س} > \text{٢} \end{cases}$

أولاً : الفترات المفتوحة :

• عندما ٠ < س < ٢ $\Leftarrow$ ق(س) = ٣ + س كثير حدود متصل ومشتق $\Leftarrow$ ق'(س) = ١

• عندما س > ٢ $\Leftarrow$ ق(س) = س^{٣} + ١ كثير حدود متصل ومشتق $\Leftarrow$ ق'(س) = ٣س^{٢}

ثانياً : عند النقط الطرفية (س = ٠) ق'(٠) غ م (طرفية)

ثالثاً : نقاط التحول (س = ٢) نبحث بالاتصال :

$\lim_{\text{س}\to ٢^{+}}$ (س^{٣} + ١) = ٢^{٣} + ١ = ٩ ≠ $\lim_{\text{س}\to ٢^{-}}$ (٣ + س) = ٣ + ٢ = ٥ = ق(٢)

ق(س) غير متصل عند (س = ٢) $\Leftarrow$ ق'(٢) غ م

$\Leftarrow$ ق'(س) = $\begin{cases} ١ & ، \text{٠} < \text{س} < \text{٢} \\ \text{٣س}^{٢} & ، \text{س} > \text{٢} \\ \text{غ م} & ، \text{س} = \{\text{٠} ، \text{٢}\} \end{cases}$

• خارجي/ ليكن ق(س) = [س] |س| ، س ∈]-٣ ، -٢[ما قيمة قَ(-٥/٢)

الحل/ |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ -س ، س < ٠ }

[س] = { -٣ ، -٣ ≤ س < -٢ ؛ -٢ ، -٢ ≤ س < -١ ؛ -١ ، -١ ≤ س < ٠ }

⇐ ق(س) = -٣ × -س = ٣س ، س ∈]-٣ ، -٢[

قَ(س) = ٣ ⇐ قَ(-٥/٢) = ٣

• خارجي/ إذا كان ق(س) = ١/(٣ + أس) ، س ≠ -٣/أ وكانت قَ(١) = ٢ ، ما قيمة الثابت أ

الحل/

قَ(س) = -أ/(٣ + أس)² ⇐ قَ(١) = -أ/(٣ + أ)² ⇐ ٢ = -أ/(٩ + ٦أ + أ²) ⇐ ٢أ² + ١٢أ + ١٨ = -أ

⇐ ٢أ² + ١٣أ + ١٨ = ٠ ⇐ (٢أ + ٩)(أ + ٢) = ٠

إما أ + ٢ = ٠ ⇐ أ = -٢ أو ٢أ + ٩ = ٠ ⇐ أ = -٩/٢

⇐ أ = {-٢ ، -٩/٢}

• خارجي/ اذا كان ق(س) = { س³ ، س < ١ ؛ أس² + بس + جـ ، س ≥ ١ } وكان قً(١) موجودة

ما قيم كل من الثوابت أ ، ب ، جـ

الحل/ قً(١) موجودة ⟵ قَ(١) موجودة ⟵ ق(س) متصل عند (س = ١)

قً(١)⁺ = قً(١)⁻
٢أ = ٦س |س = ١
٢أ = ٦
أ = ٣

قَ(١)⁺ = قَ(١)⁻
٢أس + ب = ٣س² |س = ١
٢ × ٣ + ب = ٣
ب = -٣

نها(س ← ١⁺) (أس² + بس + جـ) = نها(س ← ١⁻) (س³)
أ + ب + جـ = ١
٣ - ٣ + جـ = ١
جـ = ١

• خارجي/ اذا كان ق(س) = { س² + بس + ٣ ، س < ٢ ؛ أس + جـ ، س ≥ ٢ } اقتران قابل للاشتقاق عند (س = ٢)

وكان متوسط تغير ق(س) للفترة [٠ ، ١] يساوي (٣) ما قيمة كل من الثابتين أ ، ب ، جـ

الحل/ Δق(س)/Δس = (ق(س₂) - ق(س₁))/(س₂ - س₁) = (ق(٥) - ق(١))/(٥ - ١) = ٣ ⇐ (٥أ + جـ) - (١ + ب + ٣) = ١٢

⇐ ٥أ + جـ - ب - ٤ = ١٢ ⇐ ٥أ - ب + جـ = ١٦ — (١)

قَ(٢) موجودة ⟵ ق(س) متصل عند (س = ٢)

قَ(٢)⁺ = قَ(٢)⁻
أ = ٢س + ب |س = ٢
أ - ب = ٤

نعوضها

نها(س ← ٢⁺) (أس + جـ) = نها(س ← ٢⁻) (س² + بس + ٣)
٢أ + جـ = ٤ + ٢ب + ٣
٢أ - ٢ب + جـ = ٧
٢(أ - ب) + جـ = ٧ ⇐ ٨ + جـ = ٧
جـ = -١

نعوض ج في ① ← $16 = 1 - ب - 25$ ← $ب + 25 = 17$

$- \quad ب + 9 = 4$

$24 = 8$ ← $8 = \frac{24}{3}$

← $ب = 4 - 8 = 4 - \frac{24}{3} = \frac{12-24}{3} = \frac{-12}{3} = -4$

• خارجي/ لتكن $د(س) = 2س^3 - 3ب س^2 - 9س^2 + ب$ حيث $س \in [0, ب]$ وكان متوسط تغير $د(س)$ في $[0, ب]$ يساوي $هـ(0)$ ما قيمة الثابت ب

الحل $د(س) = 2س^3 - 3ب س^2 - 9س^2 + ب$

$هـ(س) = \frac{د(س)}{س}$ ← $هـ(0) = \frac{ب}{ب - 0} = \frac{5}{3}$

$\therefore$ ← $\frac{د(ب) - د(0)}{ب - 0} = هـ(0)$ ← $\frac{(2ب^3 - 3ب ب^2 - 9ب^2 + ب) - (ب)}{ب - 0} = \frac{5}{3}$

← $\frac{2ب^3 - 3ب^3 - 9ب^2 + ب - ب}{ب} = \frac{5}{3}$

← $\frac{-ب^3 - 9ب^2}{ب} = \frac{5}{3}$

← $\frac{-ب(ب + 9)}{ب} = \frac{5}{3}$

← $-ب - 9 = \frac{5}{3}$

← $-3ب - 27 = 5$

← $-3ب = 32$

← $ب = -\frac{32}{3}$

• خارجي/ إذا علمت أن $د(س)$ تشكل صيغة $(2ق(س) + د(س))' = 3س^3 + 12س + 8$

أجد قاعدة $د(س)$ علمًا بأن مقطعه الصادي يساوي (-4)

الحل $2ق(س) + د(س) = 3س^3 + 12س + 8$ $(س^3 \in د(س))$

بما أن $2ق + د$ من الدرجة الثانية ← $د$ من الدرجة الثانية ← فرض الدرجة الثالثة

نفرض $د(س) = أس^3 + ب س^2 + جـ س + د$ حيث $أ \neq 0$

المقطع الصادي $= -4$ ← $د(0) = -4$ ← $د = -4$

$د(س) = أس^3 + ب س^2 + جـ س - 4$

$ق(س) = 3أس^2 + 2ب س + جـ$

$ق(س) = 6أ س + 2ب$ ← $2ق(س) = 12أ س + 4ب$

← $2ق(س) + د(س) = 3أس^2 + 2ب س + 12أ س + 4ب + جـ$

$3س^2 + 12س + 8 = 3أس^2 + (2ب + 12أ)س + (جـ + 4ب)$ بالمقارنة

$3 = 3أ$ ← $أ = 1$ / $12 = 2ب + 12أ$ ← $12 = 2ب + 12$ ← $2ب = 0$ ← $ب = 0$

$جـ + 4ب = 8$ ← $جـ + 0 = 8$ ← $جـ = 8$

← $د(س) = س^3 + 8س - 4$

الدرس الثالث | مشتقات الاقترانات المثلثية

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2012 / إذا كان الاقتران ص = قاس + ظاس فإن $\frac{ص'}{ص}$ =

أ/ قاس ب/ قتاس ج/ − قاس د/ − قتاس

الحل/ ص = قاس + ظاس ⇐ ص' = قاس ظاس + قا²س ⇐ ص' = قاس (ظاس + قاس)

⇐ ص' = قاس ص ⇐ $\frac{ص'}{ص}$ = قاس

• 2020 دور ثاني / إذا كان ق(س) = $\frac{\text{قتاس}}{\text{١ − جاس}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ تساوي

أ/ $\frac{١}{\text{١ − جاس}}$ ب/ $\frac{\text{جاس − ١}}{(\text{١ − جاس})^٢}$ ج/ $\frac{\text{١ + جاس}}{\text{١ − جاس}}$ د/ $\frac{-(\text{١ + جاس})}{(\text{١ − جاس})^٢}$

الحل/

ق'(س) = $\frac{(\text{١ − جاس})(\text{− جاس}) - \text{قتاس} \times \text{− قتاس}}{(\text{١ − جاس})^٢}$ = $\frac{\text{− جاس} + (\text{جا}^٢\text{س} + \text{قتا}^٢\text{س})}{(\text{١ − جاس})^٢}$ = $\frac{\text{١ − جاس}}{(\text{١ − جاس})^٢}$

⇐ ق'(س) = $\frac{١}{\text{١ − جاس}}$

• 2018 دور ثاني + 2021 دور ثالث / اذا كان ص = جاس + قتاس فإن ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ =

أ/ ١ ب/ جا²س − قتا²س ج/ جا٢س د/ قتا²س − جا²س

الحل/ ص = جاس + قتاس ⇐ ص' = قتاس − جاس

ص'ص = (قتاس − جاس)(قتاس + جاس) = قتا²س − جا²س = قتا(٢س)

• 2023 دور ثاني / إذا كان ص = $\frac{\text{ظاس}}{\text{قاس}}$ ما قيمة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

أ/ جاس ب/ − جاس ج/ − قتاس د/ قتاس

الحل/ ص = ظاس × $\frac{١}{\text{قاس}}$ = $\frac{\text{جاس}}{\text{قتاس}}$ × قتاس ⇐ ص = جاس ⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = قتاس

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية :

• 2020 دور ثاني / اذا كان ص = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠ أثبت أن ص'' + $\frac{٢}{\text{س}}$ ص' + ص = ٠

الحل/ ص = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ⇐ ص س = جاس نشتق بالنسبة لـ س

ص(١) + س ص' = قتاس نشتق مرة أخرى لـ س

ص' + س ص'' + ص' = − جاس

س ص'' + ٢ص' + جاس = ٠ بالقسمة على س

$\frac{\text{س ص''}}{\text{س}}$ + $\frac{٢}{\text{س}}$ ص' + $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ = ٠

ص'' + $\frac{٢}{\text{س}}$ ص' + ص = ٠ #

أ.مي حواري

• 2021 دور ثاني / إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٤}$ س² + قتاس ، س ∈ [٠ ، π] ، جد مجموعة قيم س التي تجعل ق''(س) = ٠

الحل/ ق'(س) = $\frac{٢}{٤}$ س − جاس ⇐ ق''(س) = $\frac{١}{٢}$ − قتاس = ٠ ⇐ قتاس = $\frac{١}{٢}$

في الربع الأول / س = $\frac{\pi}{٣}$

• 2022 دور ثاني / إذا كان ص = ٣ جتاس − ٤ جاس ، بين أن (ص″)² + (ص′)² = ٢٥

الحل / ص = ٣ جتاس − ٤ جاس ← ص′ = −٣ جاس − ٤ جتاس ← ص″ = −٣ جتاس + ٤ جاس

المطلوب / (ص″)² + (ص′)² = (٤ جاس − ٣ جتاس)² + (−(٣ جاس + ٤ جتاس))²

= ١٦ جا²س + ٩ جتا²س − ٢٤ جاس جتاس + ٩ جا²س + ١٦ جتا²س + ٢٤ جاس جتاس

= (١٦ جا²س + ٩ جا²س) + (٩ جتا²س + ١٦ جتا²س)

= ٢٥ جا²س + ٢٥ جتا²س

= ٢٥ (جا²س + جتا²س) = ٢٥ × ١ = ٢٥ #

• 2023 دور ثالث / إذا كان ص = س ظاس أثبت أن ص″ = ٢ قا²س (١ + ص)

الحل / ص′ = س قا²س + ظاس

ص″ = س × ٢ قاس قاس ظاس + قا²س × ١ + قا²س

⇐ ص″ = ٢س قا²س ظاس + ٢ قا²س اخراج (٢ قا²س) عامل مشترك .

ص″ = ٢ قا²س (س ظاس + ١) = ٢ قا²س (ص + ١) #

• 2024 دور ثالث / إذا كان ص = (س + ١)(١ − ٣س) / جتا²س ما قيمة ص′ عندما (س = ٠)

الحل /

(س + ١)(١ − ٣س) = س − ٣س² + ١ − ٣س = −٣س² − ٢س + ١

⇐ ص = (−٣س² − ٢س + ١) × ١/جتا²س ⇐ ص = (−٣س² − ٢س + ١) قا²س .

ص′ = (−٣س² − ٢س + ١) × ٢ قاس قاس ظاس + (قا²س)(−٦س − ٢) |س = ٠

ص′ |س = ٠ = (٠ − ٠ + ١) × ٢ قا²(٠) ظا(٠) + قا²(٠)(٠ − ٢)

= ١ × ٢ × ١ × ٠ + ١ × −٢ = −٢

أ.مي حواري

• 2025 دور أول / إذا كان ص = س / (قتاس + ظتاس) أثبت أن ص′ = (١ + س قتاس) / (قتاس + ظتاس)

الحل /

عامل مشترك

ص′ = ((قتاس + ظتاس) − س(−قتاس ظتاس − قتا²س)) / (قتاس + ظتاس)² = ((قتاس + ظتاس) + س قتاس (ظتاس + قتاس)) / (قتاس + ظتاس)²

ص′ = (قتاس + ظتاس)(١ + س قتاس) / (قتاس + ظتاس)² ⇐ ص′ = (١ + س قتاس) / (قتاس + ظتاس) #

• 2025 دور ثاني / اذا كان ص = قتاس ظتاس أثبت أن ص′ = قتاس − ٢ قتا³س .

الحل / ص = قتاس ظتاس ⇐ ص′ = قتاس × −قتا²س + ظتاس × −قتاس ظتاس

⇐ ص′ = −قتا³س − قتاس ظتا²س .

ص′ = −قتا³س − قتاس (قتا²س − ١)

⇐ ص′ = −قتا³س − قتا³س + قتاس = قتاس − ٢ قتا³س #

• تذكر / ظتا²س + ١ = قتا²س

⇐ ظتا²س = قتا²س − ١

• غرب غزة 2023/ إذا كان ص = قاس أثبت أن $\left(ص \times \frac{د^2ص}{دس^2}\right) + \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 = ص^2(3ص^2 - 2)$

الحل/ ص = قاس ⇐ ص' = قاس ظاس ⇐ $(ص')^2 = قا^2س\,ظا^2س$

⇐ $(ص')^2 = قا^2س(قا^2س - 1) = قا^4س - قا^2س = ص^4 - ص^2$ ⇐ $(ص')^2 = ص^4 - ص^2$

ص' = قاس ظاس ⇐ ص'' = قاس × قا²س + ظاس قاس ظاس

ص'' = قا³س + قاس ظا²س = ص³ + ص(قا²س − 1) ⇐ ص'' = ص³ + ص(ص² − 1)

⇐ ص'' = ص³ + ص³ − ص = 2ص³ − ص

المطلوب/ ص ص'' + $(ص')^2$ = ص(2ص³ − ص) + ص⁴ − ص²

= 2ص⁴ − ص² + ص⁴ − ص² = 3ص⁴ − 2ص² = ص²(3ص² − 2) #

• 2024 طولكرم/ إذا كان ص = جاس + قباس أثبت أن ص ص'' + 1 = −جا(2س)

الحل/ ص' = قباس − جاس ⇐ ص'' = −جاس − قباس = −(جاس + قباس)

الطرف الأيمن/ ص ص'' + 1 = −(جاس + قباس)(جاس + قباس) + 1

ص ص'' + 1 = −(جاس + قباس)² + 1

ص ص'' + 1 = −(جا²س + قبا²س + 2جاس قباس) + 1

ص ص'' + 1 = −(1 + جا2س) + 1

ص ص'' + 1 = ~~−1~~ − جا(2س) + ~~1~~

ص ص'' + 1 = −جا(2س) #

• تذكر/
جا²س + قبا²س = 1
جا2س = 2جاس قباس

• 2025 تجريبي مدرسة خاصة/ اذا كان ق(س) = { ظاس + أس ، س ≤ $\frac{\pi}{4}$ ؛ ب − √2 قباس ، س > $\frac{\pi}{4}$ }

ما قيمة كل من الثابتين أ، ب علماً بأن ق(س) قابلاً للاشتقاق في [ن ، $\frac{\pi}{2}$]

الحل/ ق($\frac{\pi}{4}$) موجودة ⟵ ق(س) متصل عند (س = $\frac{\pi}{4}$)

ق($\frac{\pi}{4}$)⁺ = ق($\frac{\pi}{4}$)⁻

قا²س + أ = −√2 × جاس ، س = $\frac{\pi}{4}$

قا²($\frac{\pi}{4}$) + أ = √2 جا($\frac{\pi}{4}$)

(√2)² + أ = ~~√2 × $\frac{1}{\sqrt{2}}$~~

2 + أ = 1

أ = −1

نها (ظاس + أس) = نها (ب − √2 قباس)
س ← $\frac{\pi}{4}^+$ ، س ← $\frac{\pi}{4}^-$

ظا($\frac{\pi}{4}$) + أ $\frac{\pi}{4}$ = ب − √2 × قبا $\frac{\pi}{4}$

1 + −$\frac{\pi}{4}$ = ب − √2 × $\frac{1}{\sqrt{2}}$

1 − $\frac{\pi}{4}$ = ب − 1

2 − $\frac{\pi}{4}$ = ب

أ.مي حواري

• خارجي/ اذا كان ق(س) = $\frac{س}{1 + ل\,قباس}$ ، قباس ≠ $\frac{-1}{ل}$ ، ل ≠ ن وكان ق'(ن) = 2

ما قيمة الثابت ل.

الحل/ ق'(س) = $\frac{(1 + ل\,قباس) - س \times -ل\,جاس}{(1 + ل\,قباس)^2}$ ⇐ ق'(ن) = $\frac{(1 + ل\,قبا(ن)) + ن \times ل \times جا(ن)}{(1 + ل\,قبا(ن))^2}$

⇐ 2 = $\frac{1 + ل}{(1 + ل)^2}$ ، ل ≠ −1 ⇐ 2 = $\frac{1}{ل + 1}$ ⇐ 2ل + 2 = 1 ⇐ 2ل = −1

ل = $\frac{-1}{2}$

• خارجي/ إذا كان $ق(س) = جاس - ب جتاس$ ، ما قيمة ب التي تجعل $ق(\frac{\pi}{4}) = \frac{6}{\sqrt{2}}$

الحل/ $ق(س) = جتاس + ب جاس$

$ق(\frac{\pi}{4}) = جتا(\frac{\pi}{4}) + ب جا(\frac{\pi}{4}) \Leftarrow \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{ب}{\sqrt{2}}$ ... $\times \sqrt{2}$

$\Leftarrow 6 = 1 + ب \Leftarrow ب = 5$

• خارجي/ اذا كان $ص = \frac{1 - ظتاس}{1 + ظتاس}$ أثبت أن $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{2}{1 + جا(2س)}$

الحل/

$ص = \frac{1 - \frac{جتاس}{جاس}}{1 + \frac{جتاس}{جاس}} \Leftarrow ص = \frac{\frac{جاس - جتاس}{جاس}}{\frac{جاس + جتاس}{جاس}} \Leftarrow ص = \frac{جاس - جتاس}{جاس} \times \frac{جاس}{جاس + جتاس}$

$\Leftarrow ص = \frac{جاس - جتاس}{جاس + جتاس} \Leftarrow ص' = \frac{(جاس + جتاس)(جتاس + جاس) - (جاس - جتاس)(جتاس - جاس)}{(جاس + جتاس)^2}$ ← اضراج (-1) كعامل مشترك

$\Leftarrow ص' = \frac{(جاس + جتاس)^2 - (جتاس - جاس)(جتاس - جاس)}{جا^2س + جتا^2س + 2جاس جتاس}$

$\Leftarrow ص' = \frac{جا^2س + جتا^2س + 2جاس جتاس) + (جتاس - جاس)^2}{1 + جا(2س)} = \frac{1 + جا(2س) + جا^2س + جتا^2س - 2جاس جتاس}{1 + جا(2س)}$

$ص' = \frac{1 + جا(2س) + 1 - جا(2س)}{1 + جا(2س)} = \frac{2}{1 + جا(2س)}$ #

ذَنبُكَ الذي اعتدت ، تعلَمُ أنّه يتبعك ، ويأخذ أجملَ ملامحك ،
ويزاحم وقت خلوتك ، ويَسلبُ منك همّتك ، أما آن له ؟!

أ.مَيّ حوّاري

الدرس الرابع | قاعدة لوبيتال ، ومشتقة الاقتران الأسي واللوغاريتمي

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2008/ اذا كانت $ق(س) = ٢س^٢ + ٤$ ، فإن $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(٣) - ق(س)}{-٣ + س}$

أ/ -٢٢ ب/ -١٢ جـ/ ١٢ د/ ٢٢

الحل/ $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(٣) - ق(س)}{س - ٣} = \frac{ق(٣) - ق(٣)}{٣ - ٣} = \frac{٠}{٠}$

$ق(س) = ٢س^٢ + ٤$

$ق'(٣) = ٢ \times ٩ + ٤ = ١٨ + ٤$

$ق'(٣) = ٢٢$

⇐ باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٣} \frac{٠ - ق'(س)}{١} = -ق'(٣) = -٢٢$

• 2008 إكمال/ أوجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جتا(٢س - هـ) - جتا(٢س)}{هـ}$

أ/ $-٢جا(٢س)$ ب/ $جا(٢س)$ جـ/ $٢جا(٢س)$ د/ $-جا(٢س)$

الحل/ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جتا(٢س - هـ) - جتا(٢س)}{هـ} = \frac{جتا(٢س) - جتا(٢س)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

ثابت

المتغير

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{-جا(٢س - هـ) \times -١ - ٠}{١} = جا(٢س)$

• 2010/ أوجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا(٢س - هـ) - ظا(٢س)}{هـ}$

أ/ $قا^٢(٢س)$ ب/ $-قا^٢(٢س)$ جـ/ $٢قا^٢(٢س)$ د/ $-٢قا^٢(٢س)$

الحل/ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا(٢س - هـ) - ظا(٢س)}{هـ} = \frac{ظا(٢س) - ظا(٢س)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

⇐ باستخدام لوبيتال/ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{قا^٢(٢س - هـ) \times -١ - ٠}{١} = -قا^٢(٢س)$

• 2010 إكمال/ إذا كان $ق(س) = \frac{٢}{س^٢ + ١}$ فإن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ} =$

أ/ ١ ب/ -١ جـ/ $\frac{١}{٢}$ د/ $-\frac{١}{٢}$

الحل/ $ق'(س) = \frac{-٢ \times ٢س}{(س^٢ + ١)^٢} = \frac{-٤س}{(س^٢ + ١)^٢}$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ} = \frac{ق(١) - ق(١)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

⇐ باستخدام لوبيتال/ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق'(١ + هـ)}{١} = ق'(١) = \frac{-٤ \times ١}{(١ + ١)^٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$

• 2012/ إذا كان $ق(س) = هـ^س + لو_هـ(س^٢ + ١)$ فإن $ق'(٠) =$

أ/ -٤ ب/ ١ جـ/ ٣ د/ $هـ$

الحل/ $ق'(س) = هـ^س + \frac{٢س}{س^٢ + ١}$ ⇐ $ق'(٠) = هـ^٠ + \frac{٢ \times ٠}{٠ + ١} = ١$

• 2012/ اذا كانت $ق(س) = س^٣ - س^٢$ ، فإن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ}$

أ/ ٠ ب/ ١ ج/ ٤ د/ غ.م

الحل/ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ} = \frac{ق(١) - ق(١)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

$ق(س) = س^٣ - س^٢ \Leftarrow ق'(س) = ٣س^٢ - ٢س$

$ق''(س) = ٦س - ٢$

$ق''(١) = ٦ - ٢ = ٤$

⇐ باستخدام لوبيتال/ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق''(١+هـ)}{١} = ق''(١) = ٤$

• 2014/ اذا كان $ق(س) = لو_هـ هـ^س - لو_هـ(هـ^س + ١)$ ، فإن $ق'(٠)$

أ/ $\frac{١}{هـ+١}$ ب/ $١ - لو_هـ ٢$ ج/ -١ د/ $\frac{١}{٢}$

• $لو_هـ هـ^س = س$

الحل/ $ق(س) = س - لو_هـ(هـ^س + ١)$

$ق'(س) = ١ - \frac{هـ^س}{هـ^س + ١}$

$ق'(٠) = ١ - \frac{هـ^٠}{هـ^٠ + ١} = ١ - \frac{١}{١+١} = ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

• 2017 دور ثاني/ اذا كان $ص = لو_هـ(لو_هـ س)$ فإن $ص'$ عندما $س = هـ$ تساوي:

أ/ هـ ب/ ١ ج/ $\frac{١}{هـ}$ د/ $\frac{١}{هـ^٢}$

الحل/ $ص = لو_هـ(لو_هـ س) \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{\frac{١}{س}}{لو_هـ س} \Leftarrow \left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=هـ} = \frac{\frac{١}{هـ}}{لو_هـ هـ} = \frac{١}{هـ}$

• 2019 دور أول/ ما قيمة $\lim_{س \to ١} \frac{هـ^س - هـ}{لو_هـ س}$ حيث هـ العدد النيبري:

أ/ $-هـ$ ب/ -١ ج/ ١ د/ هـ

الحل/ $\lim_{س \to ١} \frac{هـ^س - هـ}{لو_هـ س} = \frac{هـ^١ - هـ}{لو_هـ ١} = \frac{١ - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

⇐ باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ١} \frac{هـ^س}{\frac{١}{س}} = \frac{هـ^١}{١} = هـ$

أ.مي حواري

• 2019 دور ثاني/ ما قيمة $\lim_{س \to ١} \frac{لو_هـ س}{س^٢ - ١}$ ، حيث هـ العدد النيبري:

أ/ $\frac{١}{٢}$ ب/ -١ ج/ ٢ د/ ٤

الحل/ $\lim_{س \to ١} \frac{لو_هـ س}{س^٢ - ١} = \frac{لو_هـ ١}{١^٢ - ١} = \frac{٠}{٠}$

⇐ باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س}}{٢س} = \frac{١}{٢}$

• 2020 دور أول/ إذا كان $ص = س^٢ لو_هـ س$ حيث $س > ٠$ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = هـ$

أ/ ٣هـ ب/ $\frac{هـ}{٣}$ ج/ $\frac{٣}{هـ}$ د/ ٣

الحل/ $\frac{دص}{دس} = س^٢ \times \frac{١}{س} + (لو_هـ س) \times ٢س$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=هـ} = هـ + ٢هـ لو_هـ هـ = هـ + ٢هـ = ٣هـ$

• 2020 دور أول / ما قيمة $\lim_{س \to ن} \frac{هـ^{س} - س - ١}{س^{٢}}$

أ/ $-\frac{١}{٢}$ ب/ $\frac{١}{٢}$ جـ/ -١ د/ ١

الحل/

$\lim_{س \to ن} \frac{هـ^{س} - س - ١}{س^{٢}} = \frac{هـ^{ن} - ن - ١}{ن} = \frac{١ - ١}{ن} = \frac{ن}{ن}$

⇐ باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ن} \frac{هـ^{س} - ١}{٢س} = \frac{هـ^{ن} - ١}{٢ \times ن} = \frac{١ - ١}{ن} = \frac{ن}{ن}$

⇐ لوبيتال مرة ثانية/ $\lim_{س \to ن} \frac{هـ^{س}}{٢} = \frac{هـ^{ن}}{٢} = \frac{١}{٢}$

• 2020 دور ثالث/ إذا كان $ص = ق(لو_{هـ} س)$ ما ناتج $\frac{دص}{دس}$:

أ/ $\frac{١}{س} ق(س)$ ب/ $\frac{١}{س} ق(لو_{هـ} س)$ جـ/ $ق(\frac{١}{س})$ د/ $\frac{١}{س} ق(لو_{هـ} س)$

الحل/ $ص' = ق(لو_{هـ} س) \times \frac{١}{س}$

• 2020 دور ثالث/ إذا كانت $ص = لو_{هـ}(قاس + ظاس)$ ، ما ناتج $\frac{دص}{دس}$

أ/ ظاس ب/ قاس جـ/ $ظا^{٢}س$ د/ قتاس

الحل/ $\frac{دص}{دس} = \frac{قاس ظاس + قا^{٢}س}{(قاس + ظاس)} = \frac{قاس(ظاس + قاس)}{(قاس + ظاس)} = قاس$

• 2022 دور أول/ ما قيمة $\lim_{س \to ن} \frac{قاس - ١}{س}$

أ/ صفر ب/ $\frac{١}{٢}$ جـ/ ١ د/ -١

الحل/ $\lim_{س \to ن} \frac{قاس - ١}{س} = \frac{قا(ن) - ١}{ن} = \frac{١ - ١}{ن} = \frac{ن}{ن}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ن} \frac{قاس ظاس}{١} = قا(ن) \times ظا(ن) = ١ \times ن = ن$

• 2023 دور أول/ ما قيمة $\lim_{س \to ن} \frac{لو_{هـ}(س + ١)}{ظاس}$

أ/ ١ ب/ $ن$ جـ/ -١ د/ غير موجودة

الحل/ $\lim_{س \to ن} \frac{لو_{هـ}(س + ١)}{ظاس} = \frac{لو_{هـ} ١}{ظا(ن)} = \frac{ن}{ن}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ن} \frac{\frac{١}{س + ١}}{قا^{٢}(س)} = \frac{١}{قا^{٢}(ن)} = \frac{١}{١} = ١$

أ.مي حواري

• 2024 دور أول/ إذا كان $ق(س) = هـ^{س} + س^{٢} - ٧$ حيث هـ العدد النيبري ما قيمة/ قيم س التي تجعل $ق''(س) = ق(س)$:

أ/ $\pm\sqrt{٥}$ ب/ ± ٣ جـ/ ٩ د/ $ن$

الحل/ $ق'(س) = هـ^{س} + ٢س \Leftarrow ق''(س) = هـ^{س} + ٢$

$ق''(س) = ق(س) \Leftarrow \cancel{هـ^{س}} + ٢ = \cancel{هـ^{س}} + س^{٢} - ٧ \Leftarrow ٢ = س^{٢} - ٧ \Leftarrow ٩ = س^{٢}$

$٣ ، -٣ = س$

• 2024 دور أول/ إذا كان ق(س) ، م(س) اقترانين متصلين وقابلين للاشتقاق عندما س > ٠
وكان ق(٤) = ١٠ ، قَ(٤) = ٢ ، ق(س) = $\frac{م(س)}{س}$ ما قيمة $\lim_{س \to ٤} \frac{٣م(س) - ٣م(٤)}{٢س - ٨}$

أ/ ٢٧ ب/ ٩ ج/ ٦ د/ ١٨

الحل/ $\lim_{س \to ٤} \frac{٣م(س) - ٣م(٤)}{٢س - ٨} = \frac{٣م(٤) - ٣م(٤)}{٢ \times ٤ - ٨} = \frac{٠}{٠}$

⇐ باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٤} \frac{٣مَ(س)}{٢} = \frac{٣}{٢} مَ(٤)$

$= \frac{٣}{٢} \times ١٨ = ٢٧$

ق(س) = $\frac{م(س)}{س}$ ⇐ س ق(س) = م(س)

س قَ(س) + ق(س) = مَ(س)

٤ قَ(٤) + ق(٤) = مَ(٤)

٤ × ٢ + ١٠ = ١٨ = مَ(٤)

• 2024 دور ثاني/ ما قيمة $\lim_{س \to ١} \frac{٢س \, لو_{هـ} س}{س - ١}$

أ/ -١ ب/ $\frac{١}{٢}$ ج/ ١ د/ ٢

الحل/ $\lim_{س \to ١} \frac{٢س \, لو_{هـ} س}{س - ١} = \lim_{س \to ١} (٢س) \times \lim_{س \to ١} \frac{لو_{هـ} س}{س - ١}$

$= ٢ \lim_{س \to ١} \frac{لو_{هـ} س}{س - ١} = ٢ \times \frac{لو_{هـ} ١}{١ - ١} = ٢ \times \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $٢ \times \lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س}}{١} = ٢ \times ١ = ٢$

• تذكر/ النهاية توزع على جميع العمليات الحسابية.

أ.مي حواري

• 2024 دور ثاني/ إذا كان ص جتاس = -١ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$

أ/ -قاس ب/ ظاس ج/ -قاس ظاس د/ قتاس ظتاس

الحل/ ص جتاس = -١ ⇐ ص = $\frac{-١}{جتاس}$ ⇐ ص = -قاس ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = -قاس ظاس

• 2025 دور أول/ اذا كان ص = $لو_{هـ} \left(\frac{س^٢ - هـ^٢}{س + ١}\right)^٢$ ، ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٠

أ/ ٣ ب/ ١ ج/ ٢ د/ -٢

الحل/ ص = $٢ \left(لو_{هـ} \left(\frac{س^٢ - هـ^٢}{س + ١}\right)\right) = ٢ \left(لو_{هـ} (س^٢ - هـ^٢) - لو_{هـ} (س + ١)\right)$

$\frac{دص}{دس} = ٢ \left(\frac{٢س}{س^٢ - هـ^٢} - \frac{١}{س + ١}\right) \Big|_{س = ٠} = ٢ \left(\frac{٢ \times ٠}{-هـ^٢} - ١ \right) = ٢ \times -١ = -٢$

• 2025 دور ثاني/ ما قيمة $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س \, قتاس}$

أ/ -١ ب/ صفر ج/ ١ د/ غير موجودة

الحل/ $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \times \frac{١}{قتاس} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \times جاس = \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} = \frac{جا(٠)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٠} \frac{جتاس}{١} = جتا(٠) = ١$

أنتَ الجماعة، ولو كنت وحدك!

• 2025 دور ثاني/ إذا علمت أن $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{ق(س) - ٢} = \frac{١}{٢}$ ما قيمة $ق'(٢)$

أ/ ٢ ب/ -٢ ج/ ١ د/ $\frac{١}{٢}$

الحل/ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{ق(س) - ٢} = \frac{٤ - ٥ \times ٢ + ٦}{ق(٢) - ٢} = \frac{٠}{ق(٢) - ٢}$

بما أن البسط = ٠ ، والنهاية موجودة ⇐ المقام = ٠ ⇐ $ق(٢) - ٢ = ٠$ ⇐ $ق(٢) = ٢$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٥}{ق'(س)} = \frac{٤ - ٥}{ق'(٢)} = \frac{١}{٢}$ ⇐ $-٢ = ق'(٢)$

• 2019 الخليل/ إذا كان $ق(س) = هـ^{جاس} + لو_{هـ}(س^٢ + ١)^٢$ ، ما قيمة $ق(٠) \times ق'(٠)$

أ/ ٠ ب/ هـ ج/ هـ+١ د/ ١

الحل/ $ق(٠) = هـ^{جا٠} + لو_{هـ}(٠ + ١)^٢ = هـ^{٠} + لو_{هـ}١ = ١ + ٠ = ١$

$ق(س) = هـ^{جاس} + ٢لو_{هـ}(س^٢ + ١)$

$ق'(س) = هـ^{جاس} \times جتاس$ ⇐ $ق'(٠) = هـ^{جا(٠)} \times جتا(٠) = هـ^{٠} \times ١ = ١ \times ١ = ١$

⇐ $ق(٠)\, ق'(٠) = ١ \times ١ = ١$

• 2019 نابلس/ إذا كان $ق(س) = لو_{هـ}(س^٢ + جـ)$ ، $ق'(١) = \frac{٢}{٣}$ ، فإن قيمة جـ =

أ/ ٣ ب/ ٢ ج/ $\frac{١}{٢}$ د/ $\frac{١}{٣}$

الحل/ $ق'(س) = \frac{٢س}{س^٢ + جـ}$ ⇐ $ق'(١) = \frac{٢}{١ + جـ} = \frac{٢}{٣}$ ⇐ $١ + جـ = ٣$ ⇐ $جـ = ٢$

• 2019 نابلس/ إذا كان $ق(س) = هـ^{لو_{هـ}(س^٢ + جـ)} - هـ^{٢س - ٦}$ ، فإن $ق'(٣) =$

أ/ ٨ ب/ ٧ د/ ٥ ج/ ٤

الحل/ $\cancel{هـ}^{\cancel{لو_{هـ}}(س^٢ + جـ)} = (س^٢ + جـ)$

⇐ $ق(س) = س^٢ + جـ - هـ^{٢س - ٦}$ ⇐ $ق'(س) = ٢س - هـ^{٢س - ٦} \times ٢$

$ق'(٣) = ٢ \times ٣ - ٢هـ^{٦ - ٦} = ٦ - ٢ = ٤$

• 2020 الوسطى/ ما قيمة $\lim_{س \to ١} \frac{لو_{هـ}س}{ظا(١ - س)}$

أ/ ١ ب/ -١ ج/ صفر د/ ٢

الحل/ $\lim_{س \to ١} \frac{لو_{هـ}س}{ظا(١ - س)} = \frac{لو_{هـ}١}{ظا(١ - ١)} = \frac{٠}{٠}$

⇐ باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س}}{قا^٢(١ - س) \times -١} = \frac{\frac{١}{١}}{-قا^٢(٠)} = \frac{١}{-١} = -١$

أ.مي حواري

• 2022 شمال غزة/ إذا كان $f(x)$ اقتران كثير حدود و $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=7$ ما قيمة $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x}{\ln x}$

أ/ ٥٪ ب/ ٦٪ ج/ ٧٪

الحل/ $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{f(1)-1}{1-1}=\frac{f(1)-1}{0}$

بما أن المقام = ٠ والنهاية موجودة ← البسط = ٠ ← $f(1)-1=0$ ← $f(1)=1$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x}=f(1)=7$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x}{\ln x}=\frac{f(1)-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{\frac{1}{x}}=\frac{f(1)-1}{1}=\frac{7-1}{1}=6$

أ.مي حواري

• القسم الثاني| أجب عن الأسئلة الآتية:

• 2019 دور أول/ إذا كانت $\lim_{x\to 1}\frac{ax^3+bx+2}{x-1}=1$ حيث كلاً من الثابتين a,b

الحل/

$\lim_{x\to 1}\frac{ax^3+bx+2}{x-1}=\frac{a+b+2}{1-1}=\frac{a+b+2}{0}$

بما أن المقام = صفر و النهاية موجودة ← البسط = ٠ ← $a+b+2=0$ ← $a+b=-2$ — ①

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{x\to 1}\frac{3ax^2+b}{1}=3a+b=1$ — ②

② − ① نعوضها في ① ← $3+3b=-2$ ← $3b=-5$ ← $b=-\frac{5}{3}$ نعوضها في ① ← $a=3$

• 2020 دور أول/ إذا كان $f(x)=1+\ln x$ حيث $x>0$ أوجد قيمة $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{f(x)}{x-1})$

الحل/ $f(x)=1+\ln x$ ← $f(x)=1+\ln x^{\frac{1}{2}}$ ← $f(1)=1+\frac{1}{2}\ln 1=1$

$f'(x)=\frac{1}{2x}$ ← $f'(1)=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{f(x)}{x-1})=\lim_{x\to 1}(\frac{f(x)-x}{x-1})(\frac{1}{x})=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}$

باستخدام لوبيتال.

$=\frac{f(1)-1}{1-1}\times 1=\frac{1-1}{0}\times 1=\frac{0}{0}\times 1$

← باستخدام لوبيتال/ $1\times\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-1}{1}=f'(1)-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

• 2021 دور أول/ احسب $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x\sin x}$.

الحل/ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x\sin x}=\frac{1-\cos(0)}{0\times 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٠} \frac{-(-جاس)}{س جتاس + جاس} = \frac{جا(٠)}{٠ جتا(٠) + جا(٠)} = \frac{٠}{٠ + ٠} = \frac{٠}{٠}$

لوبيتال مرة ثانية/ $\lim_{س \to ٠} \frac{جتاس}{-س جاس + جتاس + جتاس} = \frac{جتا(٠)}{٠ + ٢ جتا(٠)} = \frac{١}{٢}$

• 2021 دور ثاني/ إذا كان $ص = هـ^{٢أس}$ وكان $ص'' - ٤ص' + ٤ص = ٠$ ، ما قيمة الثابت أ

الحل/ $ص = هـ^{٢أس} \Leftarrow ص' = ٢أ هـ^{٢أس} \Leftarrow ص'' = ٤أ^٢ هـ^{٢أس}$

$ص'' - ٤ص' + ٤ص = ٠ \Leftarrow ٤أ^٢ هـ^{٢أس} - ٤ \times ٢أ هـ^{٢أس} + ٤ هـ^{٢أس} = ٠$

$[٤ هـ^{٢أس} (أ^٢ - ٢أ + ١) = ٠] \div ٤ هـ^{٢أس}$ ، $هـ^{٢أس} \neq ٠$

$\Leftarrow أ^٢ - ٢أ + ١ = ٠ \Leftarrow (أ - ١)^٢ = ٠ \Leftarrow أ = ١$

• 2022 دور ثاني/ جد قيمة $\lim_{س \to ٠} \frac{قاس - ١}{س^٢}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

أ.مي حواري

الحل/

$\lim_{س \to ٠} \frac{قاس - ١}{س^٢} = \frac{قا(٠) - ١}{٠} = \frac{١ - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٠} \frac{قاس ظاس}{٢س} = \frac{قا(٠) \times ظا(٠)}{٢ \times ٠} = \frac{١ \times ٠}{٢ \times ٠} = \frac{٠}{٠}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٠} \frac{قاس}{٢} \times \lim_{س \to صفر} \frac{ظاس}{س} = \frac{قا(٠)}{٢} \times \lim_{س \to ٠} \frac{قا^٢(س)}{١} = \frac{١}{٢} \times قا^٢(٠) = \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{١}{٢}$

تعويض مباشر ، لوبيتال

• 2024 دور ثالث/ إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س ق(س) - ٨}{س^٢ - ٤} = ١٢$ ، جد $ق(٢) + ق'(٢)$

الحل/

$\lim_{س \to ٢} \frac{س ق(س) - ٨}{س^٢ - ٤} = \frac{٢ق(٢) - ٨}{٢^٢ - ٤} = \frac{٢ق(٢) - ٨}{٠}$

بما أن المقام = ٠ والنهاية موجودة $\Leftarrow$ البسط = ٠ $\Leftarrow ٢ق(٢) - ٨ = ٠ \Leftarrow ٢ق(٢) = ٨ \Leftarrow ق(٢) = ٤$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٢} \frac{س ق(س) + ق(س)}{٢س} = \frac{٢ق'(٢) + ق(٢)}{٤} = ١٢$

$\Leftarrow ٢ق'(٢) + ٤ = ٤٨ \Leftarrow ٢ق'(٢) = ٤٤ \Leftarrow ق'(٢) = ٢٢$

المطلوب/ $ق(٢) + ق'(٢) = ٤ + ٢٢ = ٢٦$

• 2025 دور أول/ إذا كان $\lim_{س \to ١} \frac{٢ - س ق(س)}{\frac{س}{٢} - \frac{١}{٢}} = ٤$ وكان $ل(س) ق(س) = س^٢$ ما قيمة $ل'(١)$

الحل/

$\lim_{س \to ١} \frac{٢ - س ق(س)}{\frac{س}{٢} - \frac{١}{٢}} = \frac{٢ - ق(١)}{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}} = \frac{٢ - ق(١)}{٠} \Leftarrow ٢ - ق(١) = ٠ \Leftarrow ٢ = ق(١)$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ١} \frac{-س ق'(س) - ق(س)}{\frac{١}{٢}} = \frac{-ق'(١) - ق(١)}{\frac{١}{٢}} = ٤$

$\Leftarrow -ق'(١) - ٢ = ٢ \Leftarrow -ق'(١) = ٤ \Leftarrow ق'(١) = -٤$

$\text{ل}(\text{س}) \times \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 \Leftarrow \text{ل}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2}{\text{ق}(\text{س})} \Leftarrow \text{ل}'(\text{س}) = \frac{\text{ق}(\text{س})(2\text{س}) - \text{س}^2\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}^2(\text{س})}$

$\Leftarrow \text{ل}'(1) = \frac{2\text{ق}(1) - \text{ق}'(1)}{\text{ق}^2(1)} = \frac{2(2) - (-4)}{(2)^2} = \frac{4+4}{4} = \frac{8}{4} = 2$

• 2021 القدس الشريف/ إذا كان $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{ق}(\text{س}) - 2}{\text{س} - 1} = 3$ وكان الاقتران ق كثير حدود جد قيمة $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^3\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(1)}{\text{س} - 1}$

أ.مي حواري

الحل/ $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{ق}(\text{س}) - 2}{\text{س} - 1} = \frac{\text{ق}(1) - 2}{1 - 1} = \frac{\text{ق}(1) - 2}{0}$

بما أن المقام = 0 والنهاية موجودة ⇐ البسط = 0 ⇐ $\text{ق}(1) - 2 = 0 \Leftarrow \text{ق}(1) = 2$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{\text{س}\to 1} \text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}'(1) = 3$

المطلوب/ $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^3\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(1)}{\text{س} - 1} = \frac{\text{ق}(1) - \text{ق}(1)}{1 - 1} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{\text{س}\to 1} \text{س}^3\text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س})(3\text{س}^2) = \text{ق}'(1) + 3\text{ق}(1) = 3 + 3\times 2 = 9$

• 2025 جنوب الخليل/ ما قيمة ق(2) ، إذا كان ق(س) كثير حدود حيث

$\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}'(\text{س}+2\text{هـ}) - \text{ق}'(\text{س}-\text{هـ})}{3\text{هـ}} = 2\text{س}^2 + 2 - \text{ق}(\text{س})$

الحل/ $\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}'(\text{س}+2\text{هـ}) - \text{ق}'(\text{س}-\text{هـ})}{3\text{هـ}} = \frac{\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}'(\text{س})}{3\times 0} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}''(\text{س}+2\text{هـ})\times 2 - \text{ق}''(\text{س}-\text{هـ})\times -1}{3} = \frac{2\text{ق}''(\text{س}) + \text{ق}''(\text{س})}{3} = \frac{3\text{ق}''(\text{س})}{3} = \text{ق}''(\text{س})$

$\Leftarrow \text{ق}''(\text{س}) = 2\text{س}^2 + 2 - \text{ق}(\text{س}) \Leftarrow \text{ق}''(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^2 + 2$

بما أن ق'' + ق من الدرجة الثانية ⇐ ق من الدرجة الثانية

نفرض $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}'(\text{س}) = 4\text{س} + \text{ب}$

$\text{ق}''(\text{س}) = 4$

$\Leftarrow \text{ق}''(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) = 4 + 2\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} \Leftarrow 2\text{س}^2 + 2 = 2\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + (4 + \text{جـ})$

$\text{ب}\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ب} = 0$ ، $2 = 4 + \text{جـ} \Leftarrow -2 = \text{جـ}$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^2 - 2 \Leftarrow \text{ق}(2) = 2\times 4 - 2 = 8 - 2 = 6$

• خارجي / إذا كانت $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{3\text{س}^2 - (6-\text{م})\text{س} - 2\text{م}}{\text{س}^2 - 4} = -2$ ، جد قيمة الثابت م

الحل/ $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{3\text{س}^2 - (6-\text{م})(\text{س}) - 2\text{م}}{\text{س}^2 - 4} = \frac{3\times 4 - 2(6-\text{م}) - 2\text{م}}{2^2 - 4} = \frac{12 - 12 + 2\text{م} - 2\text{م}}{4 - 4} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ٢} \frac{٣ \times ٢س - (٦ - م)}{٢س} = \frac{٦ \times ٢ - (٦ - م)}{٤} = -٢ \Leftarrow ١٢ - ٦ + م = -٨$

$\Leftarrow ٦ + م = -٨ \Leftarrow م = -١٤$

أ.مي حواري

• خارجي / إذا كان $ق(س) = أس + \frac{ب}{س}$ ، $س \neq ٠$ وكان متوسط تغير $ق(س)$ في $[١ ، ٥]$ هو (٢)

ما قيمة الثابتين أ ، ب علماً بأن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + ٢هـ) - ق(١)}{هـ} = -٤$

الحل /

* $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(٥) - ق(١)}{٥ - ١} = ٢ \Leftarrow ق(٥) - ق(١) = ٨$

$\Leftarrow (٥أ + \frac{ب}{٥}) - (أ + ب) = ٨ \Leftarrow ٥أ - أ + \frac{ب}{٥} - ب = ٨ \Leftarrow (٤أ - \frac{٤ب}{٥} = ٨) \times \frac{٥}{٤}$

$\Leftarrow ٥أ - ب = ١٠$ — ①

* $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + ٢هـ) - ق(١)}{هـ} = \frac{ق(١) - ق(١)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{هـ \to ٠} ق'(١ + ٢هـ) \times ٢ = ٢ق'(١) = -٤ \Leftarrow ق'(١) = -٢$

$ق(س) = أس + \frac{ب}{س} \Leftarrow ق'(س) = أ - \frac{ب}{س^٢} \Leftarrow ق'(١) = أ - ب = -٢$ — ②

② − ① : $-٤أ = -١٢ \Leftarrow أ = ٣ \Leftarrow$ نعوضها في ② $\Leftarrow ٣ - ب = -٢ \Leftarrow ٣ + ٢ = ب$

$\Leftarrow ٥ = ب$

• خارجي / اذا كان $ق(س) = ٣س^٢ + ٥$ ، ما قيمة $\lim_{س \to ١} \left(\frac{ق(س)}{٨س} - ١\right)\left(\frac{٣}{س^٢ - س}\right)$

الحل /

$ق(س) = ٣س^٢ + ٥ \Leftarrow ق(١) = ٣ + ٥ = ٨$

$ق'(س) = ٦س \Leftarrow ق'(١) = ٦$

$\lim_{س \to ١} \left(\frac{ق(س)}{٨س} - ١\right)\left(\frac{٣}{س^٢ - س}\right) = \lim_{س \to ١} \left(\frac{ق(س) - ٨س}{٨س}\right) \times \left(\frac{٣}{س^٢ - س}\right) = \lim_{س \to ١} \frac{٣(ق(س) - ٨س)}{٨س \times س(س - ١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٣}{٨س^٢} \times \lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ٨س}{س - ١} = \frac{٣}{٨(١)^٢} \times \left(\frac{ق(١) - ٨}{١ - ١}\right) = \frac{٣}{٨}\left(\frac{٨ - ٨}{٠}\right) = \frac{٠}{٠}$

لوبيتال

تعويض مباشر

$\Leftarrow \frac{٣}{٨} \lim_{س \to ١} \frac{ق'(س) - ٨}{١} = \frac{٣}{٨}(ق'(١) - ٨) = \frac{٣}{٨}(٦ - ٨) = \frac{٣}{\cancel{٨}_{٤}} \times -\cancel{٢} = \frac{-٣}{٤}$

• خارجي / إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{أس^٣ + بس^٢ + جس + ٥}{س^٢ - ٢س + ١} = ٧$ ، ما قيمة كل من الثوابت أ ، ب ، جـ

الحل / $\lim_{س \to ١} \frac{أس^٣ + بس^٢ + جس + ٥}{(س - ١)^٢} = \frac{أ + ب + جـ + ٥}{(١ - ١)^٢} = \frac{أ + ب + جـ + ٥}{٠}$

بما أن المقام = صفر ، النهاية موجودة $\Leftarrow$ البسط = ٠ $\Leftarrow أ + ب + جـ + ٥ = ٠ \Leftarrow أ + ب + جـ = -٥$ — ①

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ١} \frac{٣أس^٢ + ٢بس + جـ}{٢(س-١)} = \frac{٣أ + ٢ب + جـ}{٢(١-١)} = \frac{٣أ + ٢ب + جـ}{٠}$

$\Leftarrow ٣أ + ٢ب + جـ = ٠$ — ②

لوبيتال مرة ثانية / $\lim_{س \to ١} \frac{٦أس + ٢ب}{٢} = \frac{٦أ + ٢ب}{٢} = ٣أ + ب = ٧$ — ③

② - ① / $٢أ + ب = +٥$ — ④

③ - ④ / $أ = ٢$ نعوضها في ④ $\Leftarrow ٤ + ب = ٥ \Leftarrow ب = ١$

نعوض أ، ب في ① $\Leftarrow ٢ + ١ + جـ = -٥ \Leftarrow جـ = -٨$

• خارجي / اذا كان $ق(س) = \frac{١}{٤} جـ س^٤ - ٢س^٣ - س - ١$ ، ما قيمة الثابت جـ حيث

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق''(١+٤هـ) - ق''(١)}{٣هـ} = -لو_{هـ} هـ^{٣٢}$

$-لو_{هـ} هـ^{٣٢} = -٣٢ لو_{هـ} هـ = -٣٢$

الحل / $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق''(١+٤هـ) - ق''(١)}{٣هـ} = \frac{ق''(١) - ق''(١)}{٣ \times ٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{هـ \to ٠} ق'''(١+٤هـ) \times \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣} ق^{(٣)}(١) = -\cancel{٣٢}^{٨}$

$\Leftarrow ق^{(٣)}(١) = -٢٤$

$ق'(س) = جـ س^٣ - ٦س^٢ - ١ \Leftarrow ق''(س) = ٣جـ س^٢ - ١٢س \Leftarrow ق^{(٣)}(س) = ٦جـ س - ١٢$

$ق^{(٣)}(١) = ٦جـ - ١٢ = -٢٤ \Leftarrow ٦جـ = -١٢ \Leftarrow جـ = -٢$

• خارجي / إذا كان ق(س) كثير حدود بحيث $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) + ٣س}{س - ٢} = ٢$ جد قيمة $هـ'(٢)$

حيث $هـ(س) = [\frac{س}{٣} + ٢] ق(س)$

الحل / $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) + ٣س}{س - ٢} = \frac{ق(٢) + ٦}{٢ - ٢} = \frac{ق(٢) + ٦}{٠}$

بما أن النهاية موجودة $\Leftarrow$ والمقام = ٠ : اذن البسط = ٠ $\Leftarrow ق(٢) + ٦ = ٠ \Leftarrow ق(٢) = -٦$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ٢} ق'(س) + ٣ = ق'(٢) + ٣ = ٢ \Leftarrow ق'(٢) = -١$

$* [\frac{س}{٣} + ٢] = \begin{cases} ٠ ، -٦ \le س < -٣ \\ ١ ، -٣ \le س < ٠ \\ \boxed{٢ ، ٠ \le س < ٣} \end{cases} \Leftarrow س = ٢ \in [٠ ، ٣[$

$\frac{س}{٣} + ٢ = ٠ \Leftarrow \frac{س}{٣} = -٢$

$\Leftarrow س = -٦$

$ل = \frac{١}{|\frac{١}{٣}|} = ٣$

$\Leftarrow هـ(س) = ٢ق(س) \Leftarrow هـ'(س) = ٢ق'(س)$

$هـ'(٢) = ٢ق'(٢) = ٢ \times -١ = -٢$

أ.مي حواري

"الفشل هو أن تغمض عينيك ثمّ تفتحهما لتجد نفسك في حفرةٍ من حفر النار .. ما سوى ذلك فهو إخفاق فقط"

د. عبدالرحمن الهاشمي.

الدرس الخامس | تطبيقات هندسية وفيزيائية

القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2007 دراسات / اذا تحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة ف = ن² - ٦ن ، فإن سرعة هذا الجسم وتسارعه يتساويان عدديًا عندما :

أ/ ن = ٢ ب/ ن = ٣ ج/ ن = ٤ د/ عند بدء الحركة .

الحل/ ف = ن² - ٦ن ⇐ ع = ٢ن - ٦ ⇐ ت = ٢

ع = ت ⇐ ٢ن - ٦ = ٢ ⇐ ٢ن = ٨ ⇐ ن = ٤ث .

• 2007 إكمال/ إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند (٣، ٠) هي ٢س - ٣ص = ٦ فإن ق(٣) =

أ/ $\frac{٣}{٢}$ ب/ $\frac{٢}{٣}$ ج/ $-\frac{٣}{٢}$ د/ $-\frac{٢}{٣}$

الحل/ ٢س - ٣ص = ٦ "معادلة العمودي عند (٣، ٠)"

٢ - ٣ص' = ٠ ⇐ ٢ = ٣ص' ⇐ $\frac{٢}{٣}$ = ص' = ميل العمودي

ميل المماس = $\frac{-١}{\text{ميل العمودي}}$ = $\frac{-٣}{٢}$ = ق'(٣)

• 2008 إكمال/ إذا كان المستقيم ص = س مماسًا لمنحنى الاقتران ص = س² + أ فإن قيمة الثابت أ

أ/ ٢ ب/ $\frac{١}{٢}$ ج/ $\frac{١}{٤}$ د/ صفر

الحل/ نفرض نقطة التماس (س، ص)

ص = س ⟵ ص' = ١ = ميل المماس

ص = س² + أ ⟵ ص' = ٢س = ميل المنحنى عند (س، ص)

⇐ ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس ⇐ ١ = ٢س ⇐ $\frac{١}{٢}$ = س نعوضها في المماس .

ص = س ⇐ ص = $\frac{١}{٢}$

∵ نقطة التماس ($\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٢}$) ∈ للمنحنى ⇐ ص = س² + أ

$\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ + أ ⇐ أ = $\frac{١}{٤}$

أ.مي حواري

2009 / إذا كانت معادلة العمودي على مماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند (١، ٣) هي ص = $\frac{س}{أ}$ فإن ق(١) =

أ/ ٣ ب/ -٣ ج/ $\frac{١}{٣}$ د/ $-\frac{١}{٣}$

الحل/ معادلة العمودي عند (١، ٣) ⇐ ص = $\frac{س}{أ}$

(١، ٣) ∈ للعمودي ⇐ ٣ = $\frac{١}{أ}$ نعوضها في معادلة العمودي .

ص = $\frac{١}{أ}$ س ⇐ ص = ٣س ⇐ ص' = ٣ = ميل العمودي

ميل المماس = $\frac{-١}{٣}$ = ق'(١)

• 2011/ اذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند (١٢، ب) هي أص = س ، وكانت ق'(١٢) = ٦ فإن قيمة الثابت ب :

أ/ -٦ ب/ -٢ ج/ ٢ د/ ٦

الحل/ ق'(١٢) = ميل المماس = ٦ ← ميل العمودي = $-\frac{١}{٦}$

معادلة العمودي = (ص − ص١) = م (س − س١) ← ص − ١ = $-\frac{١}{٦}$ (س − ٢) ← ٦ص − ٦ = −س + ٢

العمودي ∋ (٢، ٦ب) ← −٦ب = ٢ − ١٢ ← ب = −٢

(٢، ٦ب)

. 2011/ إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند (٢، ١) الطاقة عليه هي س + ٢ص = ٥

فإن ق'(١) تساوي :

أ/ −٢ ب/ $\frac{١}{٢}$ ج/ ٢ د/ $-\frac{١}{٢}$

الحل/ س + ٢ص = ٥ ← ١ + ٢ص = ٥ ∴ ص = ٢ ← ميل العمودي = $-\frac{١}{٢}$ = ق'(١) = $\frac{-١}{\text{ميل العمودي}}$ = ٢

. 2012 / اذا تحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة ف = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٦ ف بالأمتار ، ن بالثواني

فإن السّارع المتوسط للجسم في الثواني الأولى :

أ/ ٨ م/ث^{٢} ب/ ٩ د/ ١٠ ج/ ١١

الحل/ ف = ن^{٣} + ٢ن^{٢} ← ع = $\frac{\text{د}ف}{\text{د}ن}$ = ٣ن^{٢} + ٤ن

السّارع المتوسط في [٠، ٣] = $\frac{\text{د}ع}{\text{د}ن}$ = $\frac{ع(٣) - ع(٠)}{٣ - ٠}$ = $\frac{(٣)^{٢}(٣) + ٤(٣) - (٠)^{٢}(٢) + ٤(٠)}{٣}$

= $\frac{٢٧ + ١٢ - ٠}{٣}$ = $\frac{٣٩}{٣}$ = ١٣ م/ث^{٢}

أ.مي حواري

. 2013 الكمال/ إذا تحرك جسم في خط مستقيم بحيث كانت ف(ن) تمثل إزاحته عند زمن (ن)

فإن سرعته اللحظية :

أ/ $\frac{\text{د}ع}{\text{د}ن}$ ب/ $\frac{\text{د}ن}{\text{د}ف}$ ج/ $\frac{\text{د}ن}{\text{د}ع}$ د/ $\frac{\text{د}ف}{\text{د}ن}$

الحل/

$\frac{\text{د}ع}{\text{د}ن}$ = ت "السّارع" / $\frac{\text{د}ن}{\text{د}ف}$ = $\frac{١}{ع}$ / $\frac{\text{د}ن}{\text{د}ع}$ = $\frac{١}{٥}$ / $\frac{\text{د}ف}{\text{د}ن}$ = ع ✓

. 2015/ إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند (−٣، ٨) هي ٣س + ٢ص − ٧ = ٠

ما قيمة ٦ق'(−٣)

أ/ ٤ ب/ ١٨ ج/ −٤ د/ −١٨

الحل/ ٣س + ٢ص − ٧ = ٠ ← ٣ + ٢ص = ٠ ∴ ص = $-\frac{٣}{٢}$ = ميل العمودي .

ميل المماس = ق'(−٣) = $\frac{-١}{\text{م العمودي}}$ = $\frac{٢}{٣}$

المطلوب / ٦ق'(−٣) = ٦ × $\frac{٢}{٣}$ = ٤

. 2016/ إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (١، −٣) الواقعة عليه يساوي $(\frac{١}{٢})$

فإن معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند تلك النقطة هي :

أ/ ص = −س − ١ ب/ ص = ٣س − ٥ ج/ ص = −٣س − ٥ د/ ص = $-\frac{١}{٢}$س + ١

الحل/ ميل المماس = $\frac{-1}{\text{ميل العمودي}}$ = -٢ نقطة التماس (١، -٣)

أ.مي حواري

معادلة المماس / ص - ص١ = م(س - س١) ⇐ ص + ٣ = -٢(س - ١)

⇐ ص + ٣ = -٢س + ٢ ⇐ ص = -٢س - ١

• 2016 / قذف جسم رأسياً لأعلى يقاس ارتفاعه حسب العلاقة ف(ن) = ٤أن - ٢ن² ، أ > ٠

اذا كان أقصى ارتفاع وصله الجسم ٣٢م ، فإن قيمة الثابت أ هي :

أ/ ٤ ب/ ٨ ج/ ١٦ د/ ٣٢

الحل/ ف = ٤أن - ٢ن² ⇐ ع = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٤أ - ٤ن

عند أقصى ارتفاع (ع = ٠) ⇐ ٠ = ٤أ - ٤ن ⇐ $\frac{٤أ}{٤}$ = $\frac{٤ن}{٤}$ ⇐ $\boxed{أ = ن}$

أقصى ارتفاع = ٣٢ = ف(ن) ⇐ ٣٢ = ٤أن - ٢ن² نعوض (ن = أ)

٣٢ = ٤أ × أ - ٢أ² ⇐ ٣٢ = ٢أ² ⇐ $\sqrt{١٦}$ = $\sqrt{أ^٢}$

أ = ٤

• 2016 إكمال/ إذا كان ق(س) = |٣س - ٥| ، فإن ميل العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند (س = ٢) هي:

أ/ -٣ ب/ $\frac{-1}{3}$ ج/ $\frac{1}{3}$ د/ ٣

الحل/ |٣س - ٥| عند س = ٢ ⇐ ٣ × ٢ - ٥ = ٦ - ٥ = ١ موجب

⇐ |٣س - ٥| = ٣س - ٥ عند (س = ٢)

⇐ ق(س) = ٣س - ٥ ⇐ ق'(س) = ٣ ⇐ ق'(٢) = ٣ = ميل المماس

∴ ميل العمودي = $\frac{-1}{3}$

• 2017 / تحرك جسم على خط مستقيم مبتدئاً من النقطة (و) بحيث يكون بعده عنها في أي لحظة يعطى بالعلاقة ف = ٨ن² - ن³ ، جد تسارع الجسم عندما يغير من اتجاه حركته :

أ/ -١٦ ب/ ١٦ ج/ ٨٠ د/ -٣٢

الحل/ يغير الجسم من اتجاه حركته عندما (ع = ٠) وتتغير اشارة السرعة .

ف = ٨ن² - ن³ ⇐ ع = ١٦ن - ٣ن² = ٠

ن(١٦ - ٣ن) = ٠

اشارة ع: + + + | - - -

٠ ، $\frac{16}{3}$

إما ن = ٠ "بداية الحركة" أو ١٦ - ٣ن = ٠ ⇐ ن = $\frac{16}{3}$

عندما ن = $\frac{16}{3}$ ث غيّر الجسم اتجاه حركته.

ت = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ١٦ - ٦ن ⇐ ت($\frac{16}{3}$) = ١٦ - ٦ × $\frac{16}{3}$ = -١٦ م/ث²

• 2018 / إذا كان المستقيم ص - ٣س - ٢ = ٠ مماساً لمنحنى ق(س) عند النقطة (١، ق(١))

فإن نها$_{\text{هـ} \to ٠}$ $\frac{\text{ق}(١+\text{هـ}) - ٥}{\text{هـ}}$ =

أ/ ٢٥ ب/ ١٥ ج/ ٠ د/ -٥

الحل/ (١، ق(١)) ∈ للمماس ⇐ ص − ٣س − ٢ = ٠ ، ق(١) − ٣ − ٢ = ٠ ، (١، ق(١)) ⇐ ق(١) = ٥

ص = ٣س + ٢ ⇐ صَ = ٣ ميل المماس . ⇐ ٣ = قَ(١)

نها هـ ← ٠ : (ق(١+٥هـ) − ق(١)) / هـ = (ق(١) − ق(١)) / ٠ = ٠/٠

⇐ باستخدام لوبيتال / نها هـ ← ٠ : (قَ(١+٥هـ) × ٥) / ١ = ٥ قَ(١) = ٥ × ٣ = ١٥

• 2019 دور ثاني/ اذا كان ق(س) = هـ^(س²) ، ما معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند (س = −١)

أ/ ص = −٢هـ س − ٣هـ ب/ ص = −٢هـ س + هـ جـ/ ص = −٢هـ س + هـ

د/ ص = ٢هـ س + هـ

الحل/ ق(س) = هـ^(س²) ⇐ ق(−١) = هـ^((−١)²) = هـ^١ = هـ ⇐ (−١، هـ) نقطة تماس .

قَ(س) = هـ^(س²) × ٢س

ميل المماس = قَ(−١) = هـ^((−١)²) × ٢ × −١ = −٢هـ

معادلة المماس / ص − ص١ = م(س − س١) ⇐ ص − هـ = −٢هـ(س + ١)

ص − هـ = −٢هـ س − ٢هـ ⇐ ص = −٢هـ س − هـ
+هـ +هـ

• 2020 دور أول/ إذا كان المستقيم ص = ٩/٢ − ١/٢ س عمودياً على منحنى ق(س) = أ س² − ٤س + ٥ عند س = ١ ، ما قيمة الثابت أ

أ/ −١ ب/ ٧/٤ جـ/ −١/٢ د/ ٣

الحل/ ص = ٩/٢ − ١/٢ س |س=١ ⇐ ص = ٩/٢ − ١/٢ = ٨/٢ = ٤ ⇐ (١، ٤) نقطة التماس .

(١، ٤) ∈ ق(س) ⇐ ق(١) = أ(١)² − ٤(١) + ٥ ⇐ ٤ = أ − ٤ + ٥ ⇐ ٤ = أ + ١ ⇐ ٣ = أ

• 2020 دور أول/ قذف جسم رأسياً لأعلى وكان ارتفاعه ف بالأقدام بعد (ن) ثانية معطى بالمعادلة ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ، ما الزمن الذي يحتاجه الجسم وهو صاعد لتكون سرعته ١/٣ السرعة التي قذف بها :

أ/ ٢ ب/ ١ جـ/ ٣ د/ ٣/٢

الحل/ ف = ٩٦ن − ١٦ن² ⇐ ع = دف/دن = ٩٦ − ٣٢ن

السرعة التي قذف بها = ع(٠) = ٩٦ قدم/ث

ع = ١/٣ ع(٠) ⇐ ٩٦ − ٣٢ن = ١/٣ × ٩٦

٩٦ − ٣٢ن = ٣٢ ⇐ ٩٦ − ٣٢ = ٣٢ن ⇐ ٦٤ = ٣٢ن

٢ث = ن

• لو قال ١/٣ سرعته التي قذف بها وهو نازل (هابط) ⇐ ع = −١/٣ ع(٠) .

• 2020 دور ثاني / إذا كان $ق(س) = \frac{ل(س)}{س^2 - 2}$ حيث $س^2 \neq 2$ وكان لمنحنى ل(س) مماساً أفقياً عند (2، 1) ما قيمة $ق'(2)$

أ/ -2 ب/ 1 ج/ -4 د/ -1

الحل/ لمنحنى ل(س) مماساً عند (2، 1) ⇐ ل(2) = 1

المماس أفقي ⇐ ميل المماس = 0 ⇐ ل'(2) = 0

$ق(س) = \frac{ل(س)}{س^2 - 2}$ ⇐ $ق'(س) = \frac{(س^2 - 2)\,ل'(س) - ل(س)(2س)}{(س^2 - 2)^2}$

$ق'(2) = \frac{(4 - 2)\,ل'(2) - 4\,ل(2)}{(4 - 2)^2} = \frac{-4 \times 1}{4} = -1$

• 2020 دور ثالث / اذا كان المماس لمنحنى ق(س) عند (2، -1) يصنع زاوية قياسها 135° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، ما قيمة $\lim_{س \to 2} \frac{ق(س) - ق(2)}{2س - 4}$

أ/ -1 ب/ $\frac{-1}{2}$ ج/ $\frac{1}{2}$ د/ 1

الحل/ (2، -1) ∈ ق(س) ⇐ ق(2) = -1

مماس يصنع 135° مع $س^+$ ⇐ ظا 135 = ق'(2) ⇐ -1 = ق'(2)

$\lim_{س \to 2} \frac{ق(س) - ق(2)}{2س - 4} = \frac{ق(2) - ق(2)}{4 - 4} = \frac{0}{0}$

⇐ باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to 2} \frac{ق'(س)}{2} = \frac{ق'(2)}{2} = \frac{-1}{2}$

• 2020 دور ثالث / إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند (3، 0) هي 2س − 3ص = 6 ما قيمة ق'(3)

أ/ $\frac{3}{2}$ ب/ $\frac{2}{3}$ ج/ $-\frac{3}{2}$ د/ $-\frac{2}{3}$

الحل/ (3، 0) ∈ ق(س) ⇐ ق(3) = 0

2س − 3ص = 6 ⇐ 2 − 3ص' = 0 ⇐ $\frac{2}{3}$ = ص' = ميل العمودي

⇐ ميل المماس = $\frac{-3}{2}$ = ق'(3).

• 2021 دور أول / إذا كان $ق(س) = \frac{ل(س)}{س^2 + 2}$ ، وكان المماس لمنحنى ل(س) عند النقطة (-1، 2) أفقياً ، ما قيمة ق'(-1)

أ/ $\frac{-4}{9}$ ب/ $\frac{-1}{9}$ ج/ $\frac{4}{9}$ د/ $\frac{7}{9}$

الحل/ مماس ل(س) عند (-1، 2) ⇐ ل(-1) = 2

المماس أفقي ⇐ ميله = 0 ⇐ ل'(-1) = 0

$ق(س) = \frac{ل(س)}{س^2 + 2}$ ⇐ $ق'(س) = \frac{(س^2 + 2)\,ل'(س) - ل(س)(2س)}{(س^2 + 2)^2}$ ⇐ $ق'(-1) = \frac{3\,ل'(-1) + 2\,ل(-1)}{(3)^2}$ (0)

⇐ $ق'(-1) = \frac{2 \times 2}{9} = \frac{4}{9}$

• 2021 دور ثاني/ يتحرك جسم في خط مستقيم، بحيث أن بعده (ف) بالأمتار عن النقطة (و) بعد (ن) من الثواني يعطى بالعلاقة ف = ن² + ل ن + ٣ وكانت السرعة المتوسطة في [٢، ٥] يساوي (١١)، ما قيمة الثابت ل

أ/ -٤ ب/ $-\frac{١}{٣}$ ج/ ٤ د/ ٧

الحل/ السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = $\frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢}$ = ١١ ⇐ (٢٥ + ٥ل + ٣) - (٤ + ٢ل + ٣) = ٣٣

⇐ ٢٨ + ٥ل - ٧ - ٢ل = ٣٣ ⇐ ٢١ + ٣ل = ٣٣ ⇐ ٣ل = ٣٣ - ٢١

٣ل = ١٢ ⇐ ل = ٤

• 2021 دور ثالث/ إذا كان ق(س) = (٢أ - ٦) س² + ٨س، ما قيمة الثابت أ التي تجعل المماس لمنحنى ق(س) عندما (س = ٢) أفقياً:

أ/ -٢٤ ب/ ١ ج/ ٢ د/ ٣

الحل/ مماس ق(س) عند (س = ٢) أفقي ⇐ قَ(٢) = ٠

قَ(س) = ٢(٢أ - ٦) س + ٨ ⇐ قَ(٢) = ٢(٢أ - ٦) × ٢ + ٨ = ٠

⇐ $\frac{٤}{٤}$(٢أ - ٦) = $\frac{-٨}{٤}$ ⇐ ٢أ - ٦ = -٢ ⇐ $\frac{٢أ}{٢}$ = $\frac{٤}{٢}$ ⇐ أ = ٢

• 2022 دور أول/ إذا كان المستقيم أس + ب ص + جـ = ٠، (حيث أ، ب ≠ ٠) عمودياً على المماس لمنحنى ق(س) = $\frac{١}{س}$، س > ٠ ما العبارة الصحيحة دائماً من العبارات الآتية:

أ/ أ، ب موجبان ب/ أ، ب مختلفان في الإشارة ج/ أ، ب سالبان د/ أ = ب

الحل/ أس + ب ص + جـ = ٠ ⇐ أ + ب صَ = ٠ ⇐ -أ = ب صَ ⇐ $-\frac{أ}{ب}$ = صَ = ميل العمودي

⇐ ميل المماس = $\frac{ب}{أ}$

ق(س) = $\frac{١}{س}$ ⇐ قَ(س) = $\frac{-١}{س^٢}$ ⇐ ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس

$\frac{ب}{أ}$ = $\frac{-١}{س^٢}$ ← موجب دائماً

أ.مي حواري

⇐ $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{سالب}{موجب}$ ⇐ $\frac{ب}{أ}$ = سالب ⇐ أ، ب مختلفان في الإشارة.

• 2023 دور أول/ اذا كانت معادلة العمودي على المماس عند نقطة التماس (-١، ٣) للمنحنى ق(س) هي ٤س + ٣ص - ٥ = ٠، ما قيمة قَ(-١)

أ/ $\frac{٤}{٣}$ ب/ $-\frac{٣}{٤}$ ج/ $-\frac{٤}{٣}$ د/ $\frac{٣}{٤}$

الحل/ ٤س + ٣ص - ٥ = ٠ ⇐ ٤ + ٣صَ = ٠ ⇐ $-\frac{٤}{٣}$ = صَ ميل العمودي

⇐ ميل المماس = قَ(-١) = $\frac{٣}{٤}$

• 2023 دور ثالث/ ليكن ص = هـ^س - لو_هـ س، س > ٠، ما ميل المماس عندما (س = ١)

أ/ هـ ب/ هـ - ١ ج/ ١ د/ ٠

الحل/ صَ = هـ^س - $\frac{١}{س}$ ⇐ ميل المماس = صَ|_{س=١} = هـ^١ - $\frac{١}{١}$ = هـ - ١

• 2024 دور أول/ إذا كان لمنحنيي الاقترانين ق(س) = أس² + ١ ، هـ(س) = ٢س² + ب س مماساً مشتركاً عند (س = ١) ، ما قيمة كل من الثابتين أ، ب على الترتيب:

أ/ ٢، ٣ ب/ ٣، ٢ ج/ ٣، ٤ د/ ٤، ٣

الحل/ لـ ق، هـ مماس مشتركاً عند (س = ١) ⇐ ق(١) = هـ(١)

و ق'(١) = هـ'(١).

أ.مي حواري

* ق(١) = هـ(١) ⇐ أ + ١ = ٢ + ب ⇐ أ − ب = ١ − ①

* ق'(١) = هـ'(١)

⇐ ٢أس = ٤س + ب | س = ١ ⇐ ٢أ = ٤ + ب ⇐ ٢أ − ب = ٤ − ②

② − ① / أ = ٣ نعوضها في ① ⇐ ٣ − ب = ١ ⇐ −ب/−١ = −٢/−١ ⇐ ب = ٢

(أ، ب) = (٣، ٢)

• 2024 دور ثاني/ يتحرك جسم في خط مستقيم، بحيث أن بعده ف عن نقطة الأصل بعد (ن) ثانية يعطى بالقاعدة ف = ن³ + ن ، ما تسارع الجسم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة:

أ/ ٦م/ث² ب/ ٧م/ث² ج/ ١٢م/ث² د/ ١٣م/ث²

الحل/ ف = ن³ + ن ⇐ ع = دف/دن = ٣ن² + ١ ⇐ ت = دع/دن = ٦ن ⇐ ت(٢) = ٦ × ٢ = ١٢ م/ث²

• 2024 دور ثالث/ إذا كان ف = ٣جا(٢ن + ٥) هي معادلة لحركة جسم يتحرك في خط مستقيم، حيث ف بالأمتار، ن الزمن بالثواني، أي العبارات التالية تمثل العلاقة العددية بين التسارع (ت) والمسافة (ف)

أ/ ت = ٤ف ب/ ت = −٤ف ج/ ت = ١٢ف د/ ت = −١٢ف

الحل/ ف = ٣جا(٢ن + ٥) ⇐ ع = دف/دن = ٦جتا(٢ن + ٥) ⇐ ت = دع/دن = −١٢جا(٢ن + ٥)

ت = −٤ × ٣جا(٢ن + ٥) ⇐ ت = −٤ف

• 2025 دور أول/ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ن² + ٣ن وكانت سرعته عندما ن = ٥ث تساوي السرعة المتوسطة في [ن، أ] ما قيمة / قيم الثابت أ

أ/ صفر ب/ ن، ١٠ ج/ −١٠ د/ ١٠

الحل/ السرعة المتوسطة = Δف/Δن ⇐ (ف(أ) − ف(ن))/(أ − ن) = (أ² + ٣أ)/أ = (أ(أ + ٣))/أ = أ + ٣ ، أ ≠ ن

ع = دف/دن = ٢ن + ٣ ⇐ ع(٥) = ٢ × ٥ + ٣ = ١٣

السرعة المتوسطة = ع(٥) ⇐ ١٣ = أ + ٣ ⇐ أ = ١٠

• 2025 دور أول/ ما احداثيات النقطة الواقعة على منحنى ٢ص + س² = ١١ والتي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم ص + س = ١

أ/ (١، ٥) ب/ (−١، ن) ج/ (١، ١) د/ (−١، ٥)

الحل/ نفرض نقطة التماس (س، ص)

ميل (ص + س = ١) ⇐ ص' + ١ = ٠ ⇐ ص' = −١ = ميل المستقيم

المستقيم // المماس ⇐ م المستقيم = م المماس = −١

٢ص + س² = ١١ ⇐ ٢ص' + ٢س = ٠ ⇐ ٢ص' = -٢س ⇐ ص' = -س = ميل المنحنى عند (س،ص)

ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس

-١ = -س ⇐ س = ١ نعوضها في المنحنى.

٢ص + ١ = ١١ ⇐ ٢ص = ١٠ ⇐ ص = ٥ ⇐ نقطة التماس (١،٥).

• 2025 دور ثاني/ سقط جسم من ارتفاع (١٠٠ متر) سقوطاً حراً، وكانت المسافة التي قطعها الجسم بالأمتار بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة ف(ن) = ٥ن²، ما سرعة الجسم وهو على ارتفاع (٤٥م) عن سطح الأرض:

أ/ ٣٠م/ث ب/ ١٠√١١م/ث ج/ √١١م/ث د/ ٩م/ث

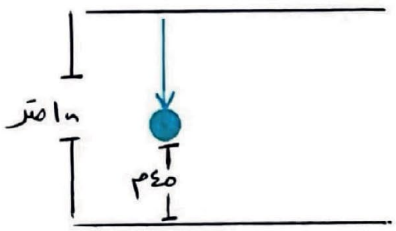
الحل/ عندما يكون الجسم على ارتفاع ٤٥م عن سطح الأرض تكون المسافة المقطوعة ف = ١٠٠ - ٤٥

⇐ ف = ٥٥ متر

⇐ ٥٥ = ٥ن² ⇐ ١١ = ن² ⇐ ١١ث = ن.

ع = عف/دن = ١٠ن

ع(١١) = ١٠√١١م/ث.



أ.مي حواري

• 2019 القدس الشريف/ إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة ف(ن) = ن³ - ٣ن² + ٥، فإن سرعة الجسم عندما ينعدم التسارع يساوي:

أ/ ١٢م/ث ب/ ٣م/ث ج/ -٣م/ث د/ -١٢م/ث

الحل/ ف = ن³ - ٣ن² + ٥ ⇐ ع = ٣ن² - ٦ن ⇐ ت = ٦ن - ٦

ت = ٠ ⇐ ٦ن - ٦ = ٠ ⇐ ٦ن = ٦ ⇐ ن = ١ث "عندما ن = ١ ينعدم التسارع"

ع(١) = ٣ - ٦ = -٣م/ث

• 2020 القدس الشريف/ يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن المسافة (ف) بالأمتار التي يقطعها بعد (ن) ثانية بالعلاقة ف = ب جتا(٢ن) فإن التسارع عندما يقطع ٦ أمتار هو:

أ/ ٤م/ث² ب/ ١٢م/ث² ج/ -٢٤م/ث² د/ -٨م/ث²

الحل/ ف = ب جتا(٢ن)

ع = -٢ب جا(٢ن) ⇐ ت = -٤ب جتا(٢ن) ⇐ ت = -٤ × ف | ف = ٦ ⇐ ت = -٤ × ٦ = -٢٤م/ث²

• 2020 طولكرم/ ما ميل العمودي على مماس منحنى ق(س) = |س² - |س|| عند س = -٢

أ/ -٣ ب/ ٣ ج/ ١/٣ د/ -١/٣

الحل/ |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ -س ، س < ٠ } ⇐ عند (س = -٢)

ق(س) = |س² - -س| = |س² + س| عند س = -٢ = (-٢)² + (-٢) = ٤ - ٢ = ٢ > ٠

⇐ ق(س) = س² + س ⇐ ق'(س) = ٢س + ١ ⇐ ق'(-٢) = -٤ + ١ = -٣ = ميل المماس.

⇐ ميل العمودي = ١/٣

• 2025 رام الله/ اذا كان المستقيم أس - ب ص + ٥ = ٠ ، أ، ب ≠ ٠ عمودياً على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = لو$_{هـ}$ س ، ما العبارة الصحيحة فيما يلي :

أ/ أب > ٠ ب/ أب < ٠ جـ/ أ = ب د/ ب = ٢أ

الحل/ ق(س) = لو$_{هـ}$ س ، $\boxed{س > ٠}$

ق'(س) = $\frac{١}{س}$

أس - ب ص + ٥ = ٠ ⇐ أ - ب ص' = ٠ ⇐ أ = ب ص' ⇐ $\frac{أ}{ب}$ = ص' = ميل العمودي

⇐ ميل المماس = $\frac{-١}{م العمودي}$ = $\frac{-ب}{أ}$

∴ ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس ⇐ $\frac{١}{س}$ = $\frac{-ب}{أ}$ (موجب)

$\frac{-ب}{أ}$ = موجب) × -١

$\frac{ب}{أ}$ = سالب ⇐ أ، ب مختلفان في الإشارة ⇐ أ × ب < ٠

• خارجي/ إذا كان ق(س) يمر بالنقطة (٣، ٢) ، ق'(٣) = -١ وكان المستقيم س = ٣ص عمودياً على منحنى هـ(س) عند (٣، ١) الواقعة عليه ما قيمة (ق × هـ)'(٣)

أ/ ٥ ب/ -٥ جـ/ ٧ د/ -٧

الحل/ ق(س) يمر بـ(٣، ٢) ⇐ ق(٣) = ٢ ، ق'(٣) = -١ "معطى"

س = ٣ص عمودياً على هـ(س) عند (٣، ١) ⇐ هـ(٣) = ١

نشتق ١ = ٣ص' ⇐ ص' = $\frac{١}{٣}$ = ميل العمودي

∴ ميل المماس لـ هـ(س) = هـ'(٣) = -٣

(ق × هـ)'(٣) = ق(٣) هـ'(٣) + هـ(٣) ق'(٣)

= (٢)(-٣) + (١)(-١) = -٦ - ١ = -٧

أ.مي حواري

• خارجي/ رُسم مماس لمنحنى العلاقة ص = س^{٢} + ك عند النقطة (٢، جـ) الواقعة عليه فقطع محور السينات (س = ٤) ، ما قيمة كل من الثابتين جـ، ك

أ/ ١٢، ٦ ب/ -٨، -١٢ جـ/ -١٢، -٦ د/ ٦، -٨

الحل/ ص = س^{٢} + ك ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س ⇐ $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢}$ = ٢ × ٢ = ٤ = ميل المماس.

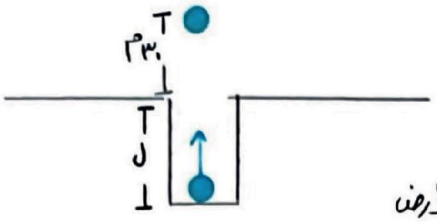
(٢، جـ) (٤، ٠) ⇐ ميل المماس = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ⇐ ٤ = $\frac{جـ - ٠}{٢ - ٤}$ ⇐ -٨ = جـ

(٢، جـ) = (٢، -٨) نقطة التماس ∈ ق(س)

ص = س^{٢} + ك ⇐ -٨ = ٢^{٢} + ك ⇐ -٨ = ٤ + ك ⇐ -١٢ = ك .

• خارجي/ قذف جسم من عمق بئر لأعلى حسب العلاقة ف = ٢٠ن - ٢ن^{٢} ، فإذا كانت سرعته على ارتفاع ٣٠م فوق سطح الأرض تساوي -٤ م/ث ، ما عمق البئر الذي أطلق منه الجسم :

أ/ ١٨م ب/ ١٠٢م جـ/ ٧٨م د/ ٤٢م



الحل/ ف = ٢٠ن − ٢ن²

ع = ٢٠ − ٤ن = −٤

٢٠ + ٤ = ٤ن ⇐ ٢٤ = ٤ن

⇐ ٦ ث = ن سرعة الجسم على ارتفاع ٣٠ عن سطح الأرض

ف(٦) = ٢٠×٦ − ٢×٦² = ١٢٠ − ٢×٣٦ = ٤٨م

⇐ ٤٨ = ٣٠ + ل ⇐ ١٨ = ل ⇐ عمق البئر = ١٨م

• خارجي/ ما معادلة العمودي على المماس لمنحنى ص = لو$_{هـ}$(ظاس) عند النقط الواقعة عليه وإحداثها السيني = $\frac{\pi}{٤}$

أ/ ٨ص = π − ٤س ب/ ٨ص = π + ٤س جـ/ ص = π − ٤س د/ ص = π − $\frac{١}{٢}$س

الحل/ ص|$_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = لو$_{هـ}$ظا$\frac{\pi}{٤}$ = لو$_{هـ}$١ = ٠ ⇐ ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٠) نقطة التماس.

ص = لو$_{هـ}$ظاس ⇐ ص' = $\frac{قا^٢س}{ظاس}$ ⇐ ص'|$_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = $\frac{قا^٢(\frac{\pi}{٤})}{ظا\frac{\pi}{٤}}$ = $\frac{(\sqrt{٢})^٢}{١}$ = ٢ = ميل المماس

⇐ ميل العمودي = $\frac{-١}{ميل المماس}$ = $\frac{-١}{٢}$

معادلة العمودي/ ص − ص$_١$ = م(س − س$_١$) ⇐ ص − ٠ = $\frac{-١}{٢}$(س − $\frac{\pi}{٤}$)

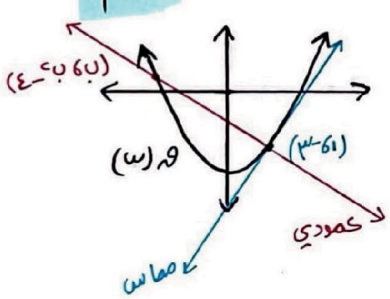
[ص = $\frac{-١}{٢}$س + $\frac{\pi}{٨}$] × ٨

٨ص = −٤س + π

أ.مي حواري

• خارجي/ اذا كان العمودي على مماس منحنى ق(س) = س² − ٤ عند (س = ١) يقطع المنحنى مرة أخرى عند (س = ب) ، ما قيمة الثابت ب :

أ/ $\frac{٢}{٣}$ ب/ $\frac{-٢}{٣}$ جـ/ $\frac{٣}{٢}$ د/ $\frac{-٣}{٢}$



الحل/ ق(س) = س² − ٤

ق'(س) = ٢س ⇐ ق'(١) = ٢ = ميل المماس

⇐ ميل العمودي = $\frac{-١}{٢}$

ق(١) = ١ − ٤ = −٣ ⇐ (١ ، −٣) نقطة التماس

(١ ، −٣) (ب ، ب² − ٤)

ميل العمودي = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ⇐ $\frac{-١}{٢}$ = $\frac{ب^٢ − ٤ − −٣}{ب − ١}$

⇐ $\frac{-١}{٢}$ = $\frac{ب^٢ − ١}{ب − ١}$ ⇐ $\frac{-١}{٢}$ = $\frac{(ب − ١)(ب + ١)}{(ب − ١)}$ ، ب ≠ ١ ⇐ $\frac{-١}{٢}$ = ب + ١ ⇐ $\frac{-٣}{٢}$ = ب

فمن للأمة الغرقى إذا كُنّا الغريقينا ؟ ومن للغاية العُظمى إذا ضَمُرت أمانينا ؟

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة الآتية :

• 2007 / يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ن³ - ٢ن² + ٧ ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، أوجد سرعة وتسارع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة

الحل/ ف = ن³ - ٢ن² + ٧

ع = دف/دن = ٣ن² - ٤ن ⇐ ع(٢) = ٣×٤ - ٤×٢ = ١٢ - ٨ = ٤م/ث

ت = دع/دن = ٦ن - ٤ ⇐ ت(٢) = ١٢ - ٤ = ٨م/ث²

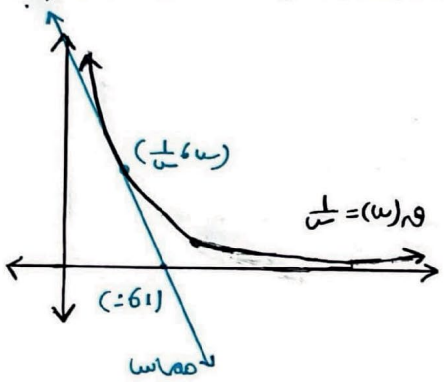
• 2007 دراسات / يتحرك جسيم في خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن³ - ن² + ٥ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، أوجد سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه ٤٠م/ث²

الحل/ ف = ن³ - ن² + ٥ ⇐ ع = ٣ن² - ٢ن ، ت = ٦ن - ٢ ⇐ ت = ٤٠ = ٦ن - ٢

٤٢ = ٦ن ⇐ ٧ = ن

ع(٧) = ٣×٧² - ٢×٧ = ٣×٤٩ - ١٤ = ١٤٧ - ١٤ = ١٣٣ م/ث .

• 2007 دراسات / أوجد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = ١/س من النقطة (١، ٠) الواقعة خارجه ، س > ٠



الحل/ نفرض نقطة التماس (س، ق(س)) = (س، ١/س)

(س، ١/س) (١، ٠) ⇐ م المماس = Δص/Δس

⇐ م = (١/س - ٠)/(س - ١) = ١/س/(س - ١)

ق(س) = -١/س² = ميل المنحنى عند نقطة التماس .

ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس

⇐ ١/س/(س - ١) = -١/س² ⇐ ١/س × س² = -(س - ١)

س = -س + ١

٢س = ١ ⇐ س = ١/٢

ق(١/٢) = ١/(١/٢) = ٢ ⇐ (١/٢ ، ٢) = نقطة التماس .

م المماس = ق(١/٢) = -١/(١/٢)² = -٤

معادلة المماس/ ص - ص١ = م(س - س١) ⇐ ص - ٢ = -٤(س - ١/٢)

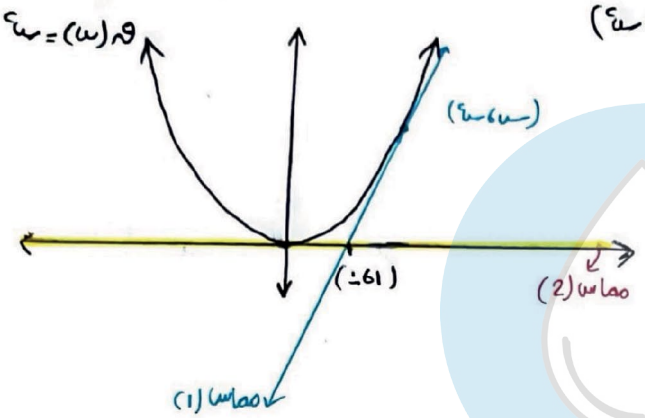
ص - ٢ = -٤س + ٢ ⇐ ص = -٤س + ٤

أ.مي حواري

• 2007 إكمال/ من قمة برج يرتفع عن سطح الأرض ٢٠م ، أطلق جسم رأسيًا إلى أعلى فكانت إزاحته ف بالأمتار بعد (ن) ثانية عن قمة البرج تعطى بالقاعدة ف(ن) = ١٠ن - ٥ن² جد سرعة الجسم بعد ثانيتين .

الحل/ ف(ن) = ١٠ن - ٥ن² ⇐ ع = دف/دن = ١٠ - ١٠ن ⇐ ع(٢) = ١٠ - ٢٠ = -١٠م/ث

• 2007 + 2013 / بين وجود مماسين من النقطة (١، ٠) للاقتران ق(س) = س² ، ثم جد معادلتيهما



الحل/ نفرض نقطة التماس (س، ق(س)) = (س، س²)

(س، س²) (١، ٠)

م المماس = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{س^2}{س-1}$

ق'(س) = ٢س = ميل المنحنى

ميل المماس = ميل المنحنى عند (س، س²)

$\frac{س^2}{س-1}$ = ٢س

٢س² − ٢س = س²

س² − ٢س = ٠

س(س − ٢) = ٠

إما س = ٠ أو (س − ٢) = ٠ ⇐ س = ٢

ق(٠) = ٠ ق(٢) = ٤

يوجد مماسين من النقطة (١، ٠) لـ ق(س) إحداهما عند (٠، ٠) والآخر عند (٢، ٤)

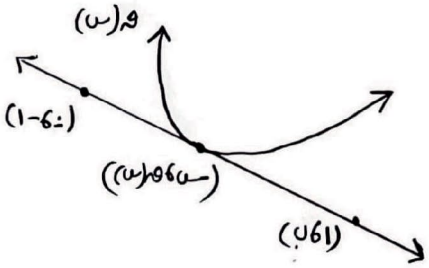
ق'(٠) = ٠ ⇐ م = ٠ (٠، ٠) = (س١، ص١)

* معادلة المماس / ص − ص١ = م(س − س١) ⇐ ص − ٠ = ٠(س − ٠) ⇐ ص = ٠

ق'(٢) = ٢×٢ = ٤ = م (س١، ص١) = (٢، ٤)

* معادلة المماس / ص − ٤ = ٤(س − ٢) ⇐ ص = ٤س − ٨ + ٤ ⇐ ص = ٤س − ٤

• 2008 / إذا كان المستقيم الواصل بين النقطتين (٠، −١) ، (١، ب) مماساً لمنحنى ق(س) = ٢س² − س + ٧ جد قيمة الثابت ب.



الحل/ نفرض نقطة التماس (س، ق(س))

ق'(س) = ٤س − ١

(س، ق(س)) (٠، −١)

ميل المماس = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ق(س)+1}{س}$ = $\frac{٢س^2 - س + ٧ + ١}{س}$

ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس ⇐ ٤س − ١ = $\frac{٢س^2 - س + ٨}{س}$

⇐ ٤س² − ~~س~~ = ٢س² − ~~س~~ + ٨

٢س² − ٨ = ٠ ⇐ ٢س² = ٨ ⇐ س² = ٤ ⇐ س = ٢ أو س = −٢

* (١، ب) (٠، −١) ⇐ م المماس = $\frac{ب+1}{1}$ = ب + ١

• عندما س = ٢

ق'(٢) = ب + ١ ⇐ ٨ − ١ = ب + ١ ⇐ ب = ٦

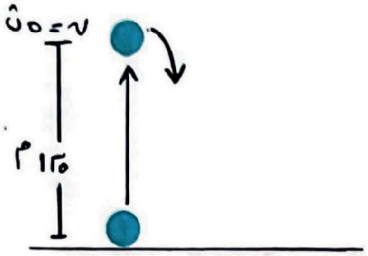
• عندما س = −٢

ق'(−٢) = ب + ١ = −٩ = ب + ١ ⇐ ب = −١٠

⇐ ب = {٦، −١٠}

أ.مي حواري

• 2008/ قذف جسم رأسياً لأعلى، فكانت العلاقة بين ارتفاعه (ف) بالأمتار عند نقطة قذفه وزمن حركته (ن) هي ف(ن) = ٥٠ن − ٥ن² جد: أقصى ارتفاع يصله الجسم والمسافة التي قطعها الجسم في الثواني الست الأولى.



الحل/ * ف(ن) = ٥٠ن − ٥ن²

ع = $\frac{دف}{دن}$ = ٥٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ٥٠ = ١٠ن

⇐ ٥ = ن "زمن الوصول لأقصى ارتفاع"

ف(٥) = ٥٠×٥ − ٥×٢٥ = ٢٥٠ − ١٢٥ = ١٢٥م

أقصى ارتفاع = ف(٥) = ١٢٥م

* ف(٦) = ٥٠×٦ − ٥×٦² = ٣٠٠ − ١٨٠ = ١٢٠م

المسافة المقطوعة = ٢× أقصى ارتفاع − ف(ن)

= ٢× ١٢٥ − ف(٦)

= ٢٥٠ − ١٢٠ = ١٣٠م

أ.مي حواري

• 2008 إكمال/ يتحرك جسم في خط مستقيم تبعاً للعلاقة ف(ن) = ن³ + ٤ن، حيث ف(ن) إزاحة الجسم بالأمتار عند نقطة ثابتة (و) على خط الحركة، ن الزمن بالثواني، جد السرعة المتوسطة والتسارع المتوسط لهذا الجسم في [٢، ٤]

الحل/ السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = $\frac{ف(٤) - ف(٢)}{٤ - ٢}$ = $\frac{(٤^٣ + ٤×٤) - (٢^٣ + ٤×٢)}{٢}$ = $\frac{٦٤ + \cancel{١٦} - \cancel{١٦}}{٢}$

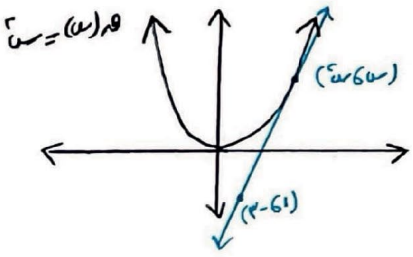
= $\frac{٦٤}{٢}$ = ٣٢م/ث

ف = ن³ + ٤ن ⇐ ع = $\frac{دف}{دن}$ = ٣ن² + ٤

التسارع المتوسط = $\frac{\Delta ع}{\Delta ن}$ = $\frac{ع(٤) - ع(٢)}{٤ - ٢}$ = $\frac{(٣(٤)^٢ + ٤) - (٣×(٢)^٢ + ٤)}{٢}$ = $\frac{٤٨ + \cancel{٤} - ١٢ - \cancel{٤}}{٢}$

= $\frac{٣٦}{٢}$ = ١٨م/ث²

• 2009/ جد الميل لجميع المماسات المرسومة لمنحنى الاقتران ق(س) = س² من النقطة (١، −٣)



الحل/ نفرض نقطة التماس (س، س²)

(س، س²) (١، −٣)

م = $\frac{س^٢ + ٣}{س - ١}$

ق′(س) = ٢س = ميل المنحنى

ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس.

$\frac{س^٢ + ٣}{س - ١}$ = ٢س ⇐ س² + ٣ = ٢س² − ٢س

⇐ ٠ = س² − ٢س − ٣ ⇐ (س + ١)(س − ٣) = ٠

إما س + ١ = ٠ ⇐ س = −١ ⇐ ق′(−١) = −٢ = ميل المماس الأول.

أو س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣ ⇐ ق′(٣) = ٦ = ميل المماس الثاني.

• 2009 الكمال / إذا كان المستقيم ص = س + ٤ مماساً لمنحنى ل(س) عندما (س = ٢) وكان
ق(س) = س × ل(س) جد قيمة ق'(٢)

الحل / ص = س + ٤ مماس ل(س) عند س = ٢

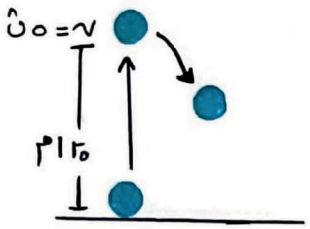
(٢، ل(٢)) ∈ للمماس ⇐ ل(٢) = ٢ + ٤ ⇐ ل(٢) = ٦

ص = س + ٤ ⇐ ص' = ١ = ل'(٢)

ق(س) = س ل(س) ⇐ ق'(س) = س × ل'(س) + ل(س)

ق'(٢) = ٢ ل'(٢) + ل(٢) = ٢ + ٦ = ٨

• 2010 / قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٥٠ن − ٥ن² جد الزمن اللازم لتكون المسافة التي قطعها الجسم ١٢٥ م



الحل / ف = ٥٠ن − ٥ن²

ع = ف' = ٥٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ن = ٥ « عند أقصى ارتفاع »

ن = ٥ ⇐ (ن = ٥) زمن الوصول لأقصى ارتفاع

أقصى ارتفاع = ف(٥) = ٥٠ × ٥ − ٥ × ٥² = ٢٥٠ − ١٢٥ = ١٢٥ م

المسافة المقطوعة = ٢ أقصى ارتفاع − ف(ن)

١٣٠ = ٢ × ١٢٥ − ف(ن) ⇐ ف(ن) = ٢٥٠ − ١٣٠ = ١٢٠ م

ف(ن) = ٥٠ن − ٥ن² ⇐ ١٢٠ = ٥٠ن − ٥ن² ÷ ٥ :

⇐ ن² − ١٠ن + ٢٤ = ٠ : ⇐ (ن − ٤)(ن − ٦) = ٠ :

إما ن − ٤ = ٠ : ⇐ ن = ٤ ثواني مرفوض الصيم صاعد

أو ن − ٦ = ٠ : ⇐ ن = ٦ ث

أ.مي حواري

• 2010 / إذا كان ل(س) = (ق(س) + س) × هـ(س) جد ل'(٣) علماً بأن للمنحنيين ق(س)، هـ(س) مماساً أفقياً مشتركاً عند (٤، ٣) العاقة على كليهما .

الحل / ق، هـ لهما مماس مشترك ل عند (٤، ٣) ⇐ ق(٣) = هـ(٣) = ٤

مماس ق، هـ أفقي عند (٤، ٣) ⇐ ق'(٣) = هـ'(٣) = صفر

ل(س) = (ق(س) + س) × هـ(س)

ل'(س) = (ق'(س) + ١) هـ(س) + هـ'(س) (ق(س) + س)

ل'(٣) = (ق'(٣) + ١) هـ(٣) + هـ'(٣) (ق(٣) + ٣) = (٠ + ١) ٤ = ٤

• 2011 / أطلق جسم رأسياً لأعلى من قمة برج بحيث أن ارتفاعه بالأمتار عن سطح الأرض بعد ن ثانية يعطى بالقاعدة ف(ن) = ٢٤ + ٢٤ن − ١٢ن² جد أقصى ارتفاع عن قمة البرج يصل إليه الجسم

الحل / • وجود ثابت في ف(ن) يمثل ارتفاع البرج و يعني أيضاً أن العلاقة المعطاة من سطح الأرض .

⇐ ارتفاع البرج = ٢٤

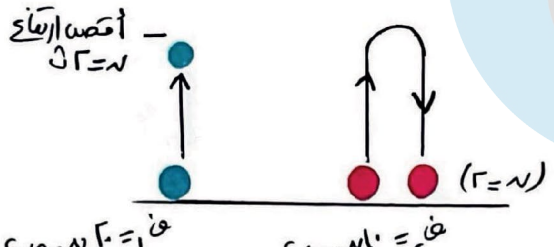
$\Leftarrow$ ف(ن) = ٦٤ن − ١٦ن² (عند البرج)

ع = ٦٤ − ٣٢ن = ٠ $\Leftarrow$ ٣٢ن = ٦٤ $\Leftarrow$ ن = ٢ "زمن أقصى ارتفاع"

ف(٢) = ٦٤×٢ − ١٦×٤ = ١٢٨ − ٦٤ = ٦٤ متر

أقصى ارتفاع عند البرج = ٦٤

• 2011 الكمال/ قذف جسمان معاً رأسياً لأعلى و الأول يتحرك وفق ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن² والثاني وفق العلاقة ف = ١٠ن − ٥ن² حيث ف بالأمتار و ن بالثواني أوجد ارتفاع الجسم الثاني عندما يصل الأول أقصى ارتفاع له.



الحل/ ف١ = ٢٠ن − ٥ن²

ع١ = ٢٠ − ١٠ن = ٠ $\Leftarrow$ ١٠ن = ٢٠ $\Leftarrow$ ن = ٢

(ن = ٢ ث) زمن وصول الجسم الأول لأقصى ارتفاع

ف١(٢) = ٢٠×٢ − ٥×٤ = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠ متر

ف٢ = ١٠ن − ٥ن²

ع٢ = ١٠ − ١٠ن = ٠ $\Leftarrow$ ١٠ن = ١٠ $\Leftarrow$ ن = ١

ف٢(١) = ١٠×١ − ٥×١ = ١٠ − ٥ = ٥ متر

• 2012/ إذا كان ق(س) = $\frac{س+1}{ل(س)}$ وكان المنحنى ل(س) مماساً أفقياً عند (١، ٢) جد قيمة ق(١)

الحل/

∵ ل(س) مماس أفقياً عند (١، ٢) $\Leftarrow$ ل(١) = ٢ ، ل'(١) = ٠

ق(س) = $\frac{س+1}{ل(س)}$ $\Leftarrow$ ق'(س) = $\frac{ل(س)(1) - (س+1)ل'(س)}{ل^2(س)}$

$\Leftarrow$ ق'(١) = $\frac{ل(١) - (1+1)ل'(١)}{ل^2(١)}$ = $\frac{٢×٢}{٤}$ = $\frac{٤}{٤}$ = ١

أ.مي حواري

• 2012 الكمال/ قذف جسم رأسياً لأعلى من نقطة على سطح الأرض وكان ارتفاعه يعطى بالعلاقة ف(ن) = ١٢ن − ٣ن² ، حيث ف بالأمتار و ن بالثواني جد:

١/ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم ٢/ السرعة المتوسطة في [١، ٣]

الحل/ ١/ ف = ١٢ن − ٣ن² $\Leftarrow$ ع = ١٢ − ٦ن = ٠ $\Leftarrow$ ٦ن = ١٢ $\Leftarrow$ ن = ٢ (ن = ٠ ث) زمن الصعود.

أقصى ارتفاع = ف(٢) = ١٢×٢ − ٣×٤ = ٢٤ − ١٢ = ١٢ م

٢/ السرعة المتوسطة = $\frac{ف}{ن}$ = $\frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١}$ = $\frac{(١٢×٣ - ٣×٩) - (١٢×١ - ٣×١)}{٢}$ = $\frac{٩ - ٩}{٢}$ = ٠ م/ث

• 2013/ قذف جسم رأسياً لأعلى وفق العلاقة ف = ٥٠ن − ٥ن² حيث ف بالأمتار و ن بالثواني جد:

١/ أقصى ارتفاع يصله الجسم ٢/ السارع المتوسط في الفترة الزمنية [٣، ٦]

الحل/ ١/ ف = ٥٠ن − ٥ن² $\Leftarrow$ ع = ٥٠ − ١٠ن = ٠ $\Leftarrow$ ١٠ن = ٥٠ $\Leftarrow$ ن = ٥ ث

أقصى ارتفاع = ف(٥) = ٥٠×٥ − ٥×٢٥ = ٢٥٠ − ١٢٥ = ١٢٥ م

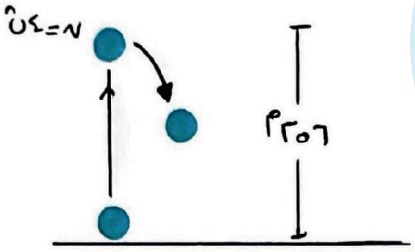
٢/ ف = ٥٠ن − ٥ن² ⇐ ع = ٥٠ − ١٠ن

التسارع المتوسط في [١، ٣] = $\frac{\Delta ع}{\Delta ن}$ = $\frac{ع(٣) - ع(١)}{٣ - ١}$ = $\frac{(٥٠ - ٣٠) - (٥٠ - ١٠)}{٢}$ = $\frac{٢٠ - ٤٠}{٢}$ = $\frac{-٢٠}{٢}$ = −١٠م/ث²

• 2014/ قذف جسم رأسياً إلى أعلى بحيث أن ارتفاعه عن نقطة قذفه معطى بالعلاقة ف(ن) = ١٢٨ن − ١٦ن² ، جد:

أ/ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم

ب/ سرعة الجسم عندما يكون قطع مسافة (٢٧٢م)



الحل/ أ/ ف = ١٢٨ن − ١٦ن²

ع = $\frac{دف}{دن}$ = ١٢٨ − ٣٢ن = ٠ ⇐ ١٢٨ = ٣٢ن

⇐ ن = ٤ث "زمن الوصول لأقصى ارتفاع"

أقصى ارتفاع = ف(٤) = ١٢٨ × ٤ − ١٦ × ١٦ = ٥١٢ − ٢٥٦

= ٢٥٦م

ب/ المسافة المقطوعة = ٢ × أقصى ارتفاع − ف(ن)

٢٧٢ = ٢ × ٢٥٦ − ف(ن) ⇐ ف(ن) = ٢ × ٢٥٦ − ٢٧٢ = ٢٤٠

ف(ن) = ١٢٨ن − ١٦ن² = ٢٤٠ ⇐ [١٦ن² − ١٢٨ن + ٢٤٠ = ٠] ÷ ١٦

⇐ ن² − ٨ن + ١٥ = ٠ ⇐ (ن − ٥)(ن − ٣) = ٠

إما ن − ٣ = ٠ ⇐ ن = ٣ث مرفوض

أو ن − ٥ = ٠ ⇐ ن = ٥ث "الجسم هابط" ✓

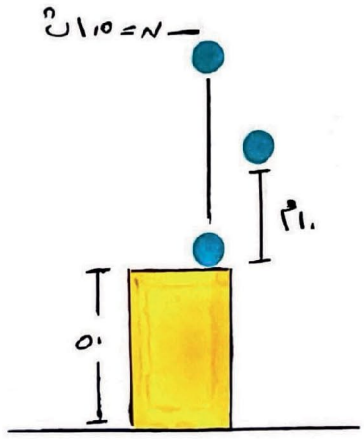
ع(٥) = ١٢٨ − ٣٢ × ٥ = −٣٢م/ث

أ.مي حواري

• 2015/ من قمة برج يرتفع عن سطح الأرض (٥٠م) ، أطلق جسم رأسياً لأعلى حيث العلاقة ف(ن) = ١٥ن − ٥ن² بالأمتار ، ن بالثواني جد:

١/ الزمن اللازم ليكون الجسم على ارتفاع ٦٠م عن سطح الأرض.

٢/ أقصى ارتفاع عن الأرض يصل إليه الجسم



الحل/ ١/ ف = ١٥ن − ٥ن²

عندما يكون الجسم على ارتفاع ٦٠م عن الأرض ⇐ يكون ارتفاع الجسم عن البرج = ٦٠ − ٥٠ = ١٠م

⇐ ف(ن) = ١٠ = ١٥ن − ٥ن² ⇐ (٥ن² − ١٥ن + ١٠ = ٠) ÷ ٥

ن² − ٣ن + ٢ = ٠

(ن − ١)(ن − ٢) = ٠

إما ن − ١ = ٠ ⇐ ن = ١ "الجسم صاعد"

أو ن − ٢ = ٠ ⇐ ن = ٢ "الجسم هابط"

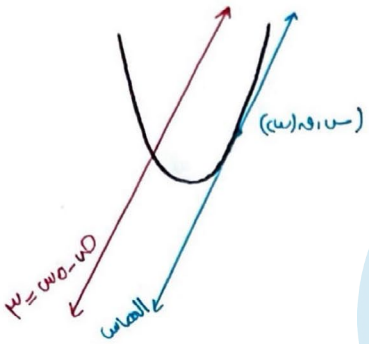
⇐ ن = {١، ٢} ثانية

٢/ ف = ١٥ن − ٥ن² ⇐ ع = $\frac{دف}{دن}$ = ١٥ − ١٠ن = ٠ ⇐ ١٥ = ١٠ن ⇐ ن = ١,٥ث

ف(١,٥) = ١٥ × $\frac{٣}{٢}$ − ٥ × $(\frac{٣}{٢})^2$ = $\frac{٤٥}{٢}$ − $\frac{٤٥}{٤}$ = $\frac{٤٥}{٤}$م أقصى ارتفاع عن البرج

أقصى ارتفاع عن الأرض = $\frac{٤٥}{٤}$ + ٥٠ = ١١,٢٥ + ٥٠ = ٦١,٢٥م

• 2015/ أوجد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س² + س والذي يوازي المستقيم ص − ٥س = ٣



الحل/ ص − ٥س = ٣ ⇐ صَ − ٥ = ٠ ⇐ صَ = ٥

ميل المستقيم = ميل المماس = ٥ "لأنهما متوازيان"

ق(س) = س² + س

قَ(س) = ٢س + ١

ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس.

٥ = ٢س + ١ ⇐ ٤ = ٢س ⇐ ٢ = س

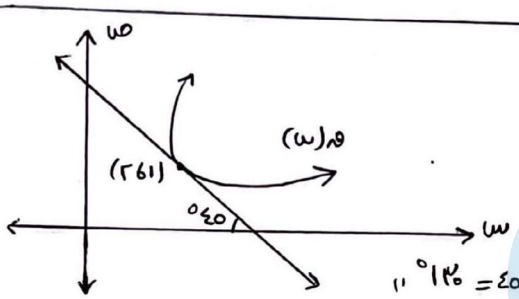
ق(٢) = ٢² + ٢ = ٤ + ٢ = ٦ ⇐ (٢، ٦) نقطة التماس

م = ٥ (س١، ص١) = (٢، ٦)

معادلة المماس/ ص − ص١ = م(س − س١) ⇐ ص − ٦ = ٥(س − ٢)

ص − ٦ = ٥س − ١٠ ⇐ ص = ٥س − ٤

• 2015/ إذا كان ق(س)، هَ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق بحيث ق(س) × هَ(س) = ٢٠ بالاعتماد على الشكل المجاور، جد قيمة هً(١)



الحل/ (١، ٢) ∈ ق(س) ⇐ ق(١) = ٢

ميل المماس = قَ(١) = ظا هـ

⇐ قَ(١) = ظا ١٣٥ = −١

من الرسمة

"هـ = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥°"

ق(س) هَ(س) = ٢٠ ⇐ هَ(س) = ٢٠ / ق(س) ⇐ هً(س) = −٢٠ قَ(س) / ق²(س)

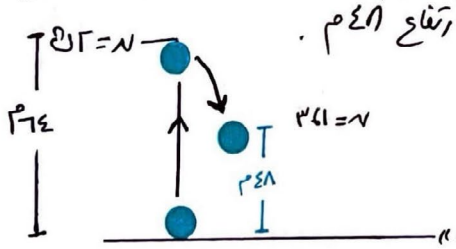
هً(١) = −٢٠ قَ(١) / ق²(١) = −٢٠(−١) / ٤ = ٢٠ / ٤ = ٥

أ.مي حواري

• 2015 إكمال/ قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض أفقية، حسب العلاقة ف(ن) = ٦٤ن − ١٦ن² حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني:

١/ ما أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم

٢/ بيان أن الجسم يفقد نصف سرعته الابتدائية عندما يكون على ارتفاع ٤٨م.



الحل/ ١/ ف = ٦٤ن − ١٦ن²

ع = ٦٤ − ٣٢ن = ٠ ⇐ ٦٤ = ٣٢ن ⇐ ٢ = ن

أقصى ارتفاع = ف(٢) = ٦٤(٢) − ١٦(٢)² = ٦٤م

٢/ يكون الجسم على ارتفاع ٤٨م مرتين (في الصعود، وفي الهبوط)

ع(٠) = ٦٤م/ث ⇐ السرعة الابتدائية — (١)

في الصعود: ½ ع(٠) = ع(ن) ⇐ ½ × ٦٤ = ٦٤ − ٣٢ن ⇐ ٣٢ = ٦٤ − ٣٢ن ⇐ ٣٢ن = ٣٢ ⇐ ن = ١ث.

ف(١) = ٦٤ − ١٦ = ٤٨م — (٢)

في الهبوط: −½ ع(٠) = ع(ن) ⇐ −٣٢ = ٦٤ − ٣٢ن ⇐ ٦٤ + ٣٢ = ٣٢ن ⇐ ٩٦ = ٣٢ن ⇐ ن = ٣ث

ف(٣) = ٦٤ × ٣ − ١٦ × ٩ = ٤٨م — (٣)

من (١)، (٢)، (٣) نلاحظ أن الجسم فقد ½ سرعته الابتدائية وهو على ارتفاع (٤٨م).

• 2016 إكمال/ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ن²(٢ن − ٩)
حيث ف إزاحة الجسم بالأمتار، ن الزمن بالثواني جد:
١/ السرعة بعد ٣ ثواني من بدء الحركة. ٢/ متى تبدأ سرعة الجسم بالتزايد.

الحل/ ف(ن) = ن²(٢ن − ٩) = ٢ن³ − ٩ن²

ع(ن) = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٦ن² − ١٨ن

١/ ع(٣) = ٦(٣)² − ١٨(٣) = ٦×٩ − ٥٤ = ٥٤ − ٥٤ = صفر م/ث

٢/ تبدأ السرعة بالتزايد ⇐ يعني التسارع موجب ⇐ نبحث في إشارة التسارع.

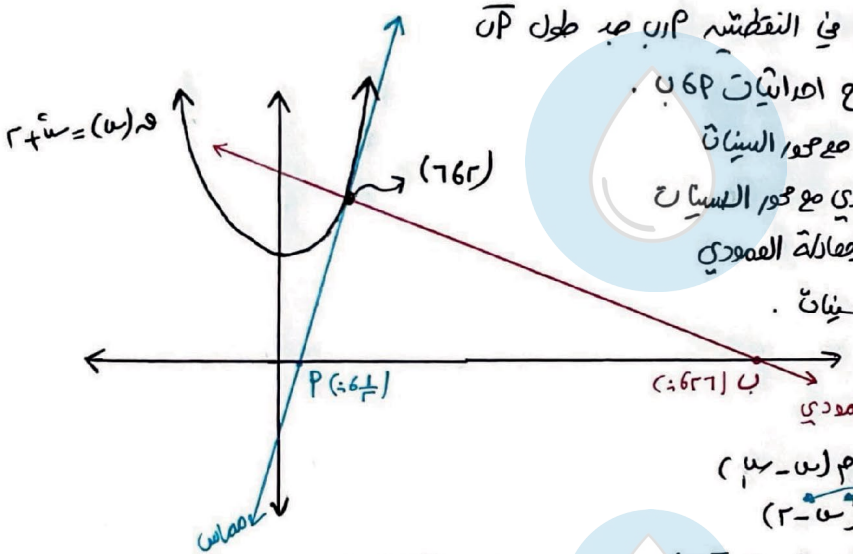
ت = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ١٢ن − ١٨ = ٠ ⇐ ١٢ن = ١٨

⇐ ن = $\frac{١٨}{١٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ ث.

لاحظ أن التسارع موجب عندما ن > $\frac{٣}{٢}$ ث.

إشارة ت(ن): − − − − − − + + + +
٠ ، $\frac{٣}{٢}$

• 2017/ رسم مماس وعمودي على المماس للاقتران ق(س) = س² + ٢ عند النقطة (٢، ٦) الواقعة عليه، فقطعا محور السينات في النقطتين أ، ب جد طول $\overline{أب}$



الحل/ لإيجاد طول $\overline{أب}$، نحتاج احداثيات أ، ب.
أ تمثل نقطة تقاطع المماس مع محور السينات
ب تمثل نقطة تقاطع العمودي مع محور السينات
⇐ اذن نحتاج معادلة المماس ومعادلة العمودي لإيجاد تقاطعهم مع محور السينات.

ق′(س) = ٢س

ميل المماس = ق′(٢) = ٤

معادلة المماس ⇐ ص − ص₁ = م(س − س₁)

ص − ٦ = ٤(س − ٢)

عندما ص = ٠ ⇐ −٦ = ٤س − ٨ ⇐ $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{٤}{٤}$س ⇐ س = $\frac{١}{٢}$ ⇐ أ($\frac{١}{٢}$، ٠)

م العمودي = $\frac{-١}{\text{ق}'(٢)}$ = $\frac{-١}{٤}$ / معادلة العمودي ص − ٦ = −$\frac{١}{٤}$(س − ٢)

عندما ص = ٠ ⇐ −٦ = −$\frac{١}{٤}$(س − ٢) ⇐ ٢٤ = س − ٢ ⇐ ٢٦ = س ⇐ ب = (٢٦، ٠)

$\overline{أب}$ = ٢٦ − $\frac{١}{٢}$ = ٢٥٫٥

أ.مي حواري

• 2017 دورثاني/ أوجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = $\sqrt{\text{س}^2 + ٨\text{س}}$ عند س = ١

الحل/ ق′(س) = $\frac{٢\text{س} + ٨}{٢\sqrt{\text{س}^2 + ٨\text{س}}}$ ⇐ ميل المماس = ق′(١) = $\frac{٢ + ٨}{٢\sqrt{١ + ٨}}$ = $\frac{١٠}{٢ \times ٣}$ = $\frac{٥}{٣}$

ومنه ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$ = $\frac{-٣}{٥}$

ق(١) = $\sqrt{١ + ٨}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣ ⇐ (١، ٣) نقطة التماس

معادلة العمودي / $ص - ص_1 = م(س - س_1) \Leftarrow ص - ٣ = -\frac{٣}{٥}(س - ١)$

$٥ص - ١٥ = -٣س + ٣ \Leftarrow \frac{٥ص}{٥} = -\frac{٣}{٥}س + \frac{١٨}{٥} \Leftarrow ص = \frac{١٨}{٥} - \frac{٣}{٥}س$

• 2017 دور ثاني / يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{ل}$ ، اذا كانت سرعة الجسم بعد ٦ ثواني تساوي أربعة أمثال سرعته بعد ٣ ثواني ، أوجد تسارع الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة .

الحل / $ف(ن) = ن^{ل} \Leftarrow ع = \frac{دف}{دن} = ل ن^{ل-١}$

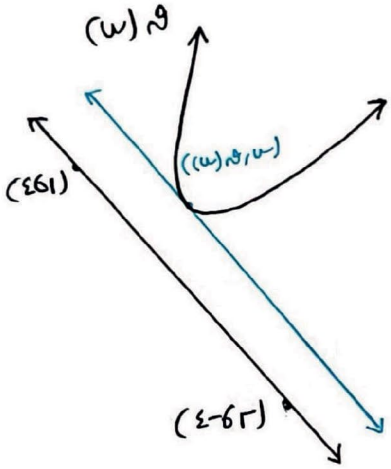
سرعة الجسم بعد ٦ ثواني = ٤ أمثال سرعته بعد ٣ ثواني $\Leftarrow ع(٦) = ٤ع(٣)$

$\Leftarrow ل(٦)^{ل-١} = ٤ل(٣)^{ل-١}$ ، $ل \neq ٠ \Leftarrow ٦^{ل-١} = ٤(٣)^{ل-١} \Leftarrow \frac{٦^{ل-١}}{٣^{ل-١}} = ٤$

$\Leftarrow (\frac{٦}{٣})^{ل-١} = ٤ \Leftarrow ٢^{ل-١} = ٢^{٢} \Leftarrow ل - ١ = ٢ \Leftarrow ل = ٣$

$\Leftarrow ف = ن^{٣} \Leftarrow ع = \frac{دف}{دن} = ٣ن^{٢} \Leftarrow ت = \frac{دع}{دن} = ٦ن \Leftarrow ت(٢) = ٦ \times ٢ = ١٢$ م/ث²

• 2018 دور أول / إذا كان $ق(س) = \frac{س^{٢} + ٩}{س}$ ، $س > ٠$ أوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى ق(س) والذي يوازي المستقيم المار بالنقطتين (٢، -٤) ، (١، ٤)



الحل / $ق(س) = \frac{س^{٢} + ٩}{س} = \frac{س^{٢}}{س} + \frac{٩}{س} = س + \frac{٩}{س}$

نفرض نقطة التماس (س، ق(س))

$ق'(س) = ١ - \frac{٩}{س^{٢}}$

(٢، -٤) (١، ٤)

م المستقيم $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٤ - -٤}{١ - ٢} = \frac{٨}{-١} = -٨$

م المستقيم = ميل المماس = -٨ لأنهما متوازيان .

$\Leftarrow$ ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس

$-٨ = ١ - \frac{٩}{س^{٢}} \Leftarrow \cancel{-٩} = \frac{\cancel{-٩}}{س^{٢}}$

$\Leftarrow س^{٢} = ١ \Leftarrow س = ١ > ٠$ ✓ أو $س = -١$ مرفوض

$ق(١) = ١ + \frac{٩}{١} = ١٠ \Leftarrow (١، ١٠)$ = نقطة التماس

معادلة المماس / $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص - ١٠ = -٨(س - ١)$

$ص - ١٠ = -٨س + ٨ \Leftarrow ص = -٨س + ١٨$

• 2019 دور ثاني / إذا كان الاقتران $ق(س) = لو_{هـ}(س^{٢} - ٢س + هـ)$ أوجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند (س = ٠)

الحل / $ق(٠) = لو_{هـ} هـ = ١ \Leftarrow (٠، ١)$ نقطة التماس .

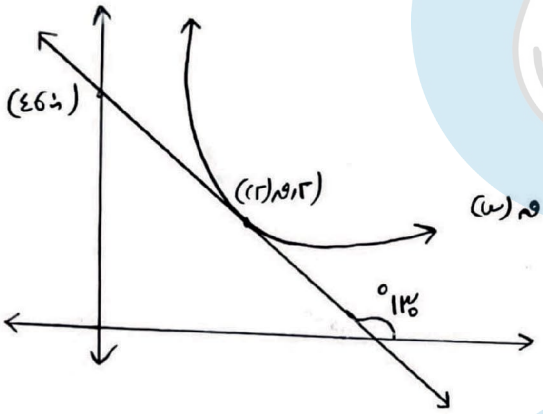
$ق'(س) = \frac{٢س - ٢}{س^{٢} - ٢س + هـ} \Leftarrow ق'(٠) = \frac{٠ - ٢}{هـ} = \frac{-٢}{هـ}$ = ميل المماس .

أ.مي حواري

⇐ ميل العمودي = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}}$ = $\frac{\text{هـ}}{2}$

معادلة العمودي/ ص − ص١ = م(س − س١) ⇐ ص − ١ = $\frac{\text{هـ}}{2}$ س ⇐ ص = $\frac{\text{هـ}}{2}$ س + ١

• 2020 دور أول/ إذا رسم لمنحنى ق(س) = أس² + ب س + ٦ مماساً عند النقطة (٢، ق(٢)) الواقعة عليه، فقطع المماس من محور الصادات ٤ وحدات موجبة، وكان قياس زاوية ميل المماس تساوي $\frac{3\pi}{4}$ ما قيمة الثابتين أ، ب



الحل/ ميل المماس = قَ(٢) = ظا($\frac{3\pi}{4}$)

−١ = قَ(٢)

قَ(س) = ٢أس + ب

قَ(٢) = ٤أ + ب ⇐ −١ = ٤أ + ب − ①

(٢، ق(٢)) (٠، ٤)

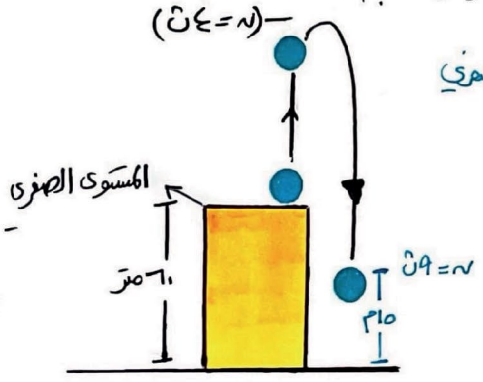
م = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ⇐ −١ = $\frac{ق(٢) - ٤}{٢ - ٠}$

−٢ = ق(٢) − ٤ ⇐ ٢ = ق(٢)

⇐ ٢ = ٤أ + ٢ب + ٦ ⇐ −٤ = ٤أ + ٢ب − ②

بطرح ٢ − ١ ⇐ −٣ = ب نعوضها في ① ⇐ −١ = ٤أ − ٣ ⇐ ٢ = ٤أ ⇐ أ = $\frac{1}{2}$

• 2020 دور أول/ قذف جسم رأسياً لأعلى من قمة برج ارتفاعه ٦٠ متر بحيث أن ازاحته من قمة البرج تعطى بالعلاقة ف = ل ن − ٥ن²، حيث ف بالأمتار بعد ن ثانية فإذا كان ارتفاعه ١٥ متر عن سطح الأرض بعد مرور ٩ ثواني، ما أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن الأرض.



الحل/ ازاحة الجسم بعد ٩ ثواني = ٦٠ − ١٥ = −٤٥ تحت المستوى الصفري

⇐ ف(٩) = −٤٥

٩ل − ٥×٩² = −٤٥ ⇐ ٩ل = ٣٦٠ ⇐ ل = ٤٠

ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن²

ع = ٤٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ٤٠ = ١٠ن ⇐ ن = ٤ث

ف(٤) = ٤٠×٤ − ٥×١٦ = ٨٠م

أقصى ارتفاع عن البرج = ٨٠م

أقصى ارتفاع عن الأرض = ٨٠ + ٦٠ = ١٤٠م

• 2020 دور ثاني/ إذا كان المستقيم الذي معادلته ٤ص = أس − ١ يمس منحنى هـ(س) = $\frac{\text{ب س}}{\text{س + جـ}}$ عند النقطة (١، −$\frac{1}{2}$)، ما قيمة الثوابت أ، ب، جـ

الحل/ (١، −$\frac{1}{2}$) ∈ للمماس ⇐ ٤ص = أس − ١ | (١، −$\frac{1}{2}$) ⇐ ٤ × −$\frac{1}{2}$ = أ − ١ ⇐ −٢ = أ − ١ ⇐ −١ = أ

أ.مي حواري

$(1, -\frac{1}{2}) \in$ للمنحنى $\Leftarrow$ هـ(1) $= \frac{ب}{1+جـ} = \frac{-1}{2} \Leftarrow ب = \frac{-1}{2}(1+جـ)$ ①

$هـَ(س) = \frac{(س+جـ)(ب) - ب س}{(س+جـ)^2} = \frac{ب س + ب جـ - س ب}{(س+جـ)^2} = \frac{ب جـ}{(س+جـ)^2}$

ميل المماس $= هـَ(1) = \frac{ب جـ}{(1+جـ)^2}$

أ.مي حواري

$4ص = -س - 1 \Leftarrow 4صَ = -1 \Leftarrow صَ = \frac{-1}{4}$ = ميل المماس.

$\frac{-1}{4} = \frac{ب جـ}{(1+جـ)^2}$ ②

نعوض ② في ① $\Leftarrow \frac{-1}{4} = \frac{\frac{-1}{2}(1+جـ)}{(1+جـ)^2} \Leftarrow \frac{-1}{4} = \frac{-\frac{1}{2}}{(1+جـ)}$ ، $جـ \neq -1$

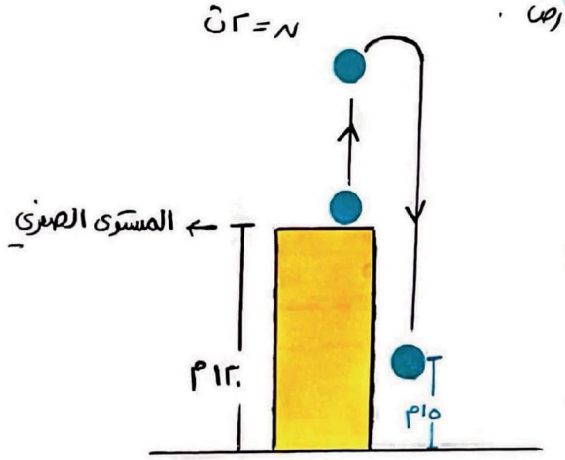
$\Leftarrow -4 \times -\frac{1}{2} = 1+جـ \Leftarrow 2 = 1+جـ \Leftarrow جـ = 1$ نعوضها في ①

$ب = \frac{-1}{2}(1+جـ) = \frac{-1}{2}(1+1) \Leftarrow ب = \frac{-2}{2} \Leftarrow ب = -1$

• 2020 دور ثاني / قذف جسم رأسياً لأعلى من قمة برج ارتفاعه ٢٠م ، بحيث تتحدد إزاحته عن قمة برج بالعلاقة $ف = 20ن - 5ن^2$ حيث ف: إزاحة الجسم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني: جد

١/ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن قمة البرج

٢/ سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٥م عن سطح الأرض.



الحل/ ١/ $ف = 20ن - 5ن^2$

$ع = \frac{دف}{دن} = 20 - 10ن = 0 \Leftarrow 20 = 10ن$

$\Leftarrow ن = 2ث$ ، زمن الوصول لأقصى ارتفاع

أقصى ارتفاع $= ف(2) = 20 \times 2 - 5 \times 4 = 40 - 20 = 20م$

٢/ عندما يكون الجسم على ارتفاع ٥م عن سطح الأرض

$\Leftarrow ف(ن) = 120 - 15 = -105$ الجسم تحت المستوى الصفري

$-105 = ف(ن)$

$\Leftarrow -105 = 20ن - 5ن^2 \Leftarrow (5ن^2 - 20ن - 105 = 0) \div 5$

$ن^2 - 4ن - 21 = 0 \Leftarrow (ن+3)(ن-7) = 0$

إما $ن - 7 = 0 \Leftarrow ن = 7ث$ ، أو $ن + 3 = 0 \Leftarrow ن = -3$ × الزمن ≥ 0

$ع(7) = 20 - 10 \times 7 = -50م/ث$

• 2020 دور ثالث / أوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى $ق(س) = هـ^{جا(2س)} + لو_هـ(1+جاس)$ عند (س = 0)

الحل/ $ق(0) = هـ^{جا(0)} + لو_هـ(1+جا(0)) = هـ^0 + لو_هـ 1 = 1 + 0 = 1$

$\Leftarrow (0, 1)$ نقطة التماس.

$قَ(س) = هـ^{جا(2س)} \times 2جتا(2س) + \frac{جتاس}{1+جاس}$

$ق'(\text{ن}) = ٢\,\text{جتا}(\text{ن})\,\text{هـ}^{\text{جا}(\text{ن})} + \frac{\text{جتا}(\text{ن})}{١+\text{جا}(\text{ن})} = ٢\times١\times\text{هـ}^{\text{ن}} + \frac{١}{١+\text{ن}} = ٢+١ = ٣$

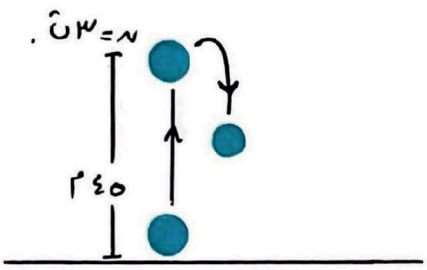
ميل المماس = $ق'(\text{ن}) = ٣$ نقطة التماس $(س_١ ، ص_١) = (\text{ن}، ١)$

معادلة المماس / $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ١ = ٣س \Leftarrow ص = ٣س + ١$

• 2020 دور ثالث / قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح الأرض وكانت إزاحته عن سطح الأرض تعطى بالعلاقة $ف(\text{ن}) = ٣٠\text{ن} - ٥\text{ن}^٢$ حيث $ف(\text{ن})$ الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني أوجد سرعة الجسم عندما يقطع مسافة ٦٥م

الحل /



$ف(\text{ن}) = ٣٠\text{ن} - ٥\text{ن}^٢ \Leftarrow ع = \frac{دف}{دن} = ٣٠ - ١٠\text{ن} = ٠$

$\Leftarrow ٣٠ = ١٠\text{ن} \Leftarrow \text{ن} = ٣\text{ث}$ "زمن أقصى ارتفاع"

أقصى ارتفاع = $ف(٣) = ٣٠\times٣ - ٥\times٩ = ٤٥$م

المسافة المقطوعة = ٢ أقصى ارتفاع − $ف(\text{ن})$

$٦٥ = ٢\times٤٥ - ف(\text{ن})$

$ف(\text{ن}) = ٩٠ - ٦٥ = ٢٥$م

$ف(\text{ن}) = ٢٥ = ٣٠\text{ن} - ٥\text{ن}^٢ \Leftarrow (٥\text{ن}^٢ - ٣٠\text{ن} + ٢٥ = ٠) \div ٥$

$\text{ن}^٢ - ٦\text{ن} + ٥ = ٠ \Leftarrow (\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٥) = ٠$

إما $\text{ن} - ١ = ٠ \Leftarrow \text{ن} = ١\text{ث}$ مرفوض الجسم صاعد.

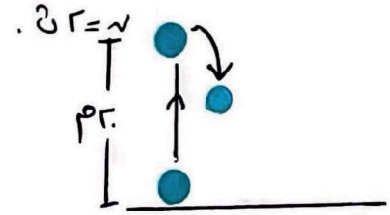
أو $\text{ن} - ٥ = ٠ \Leftarrow \text{ن} = ٥\text{ث}$ ✓ الجسم هابط $\Leftarrow ع(٥) = ٣٠ - ٥٠ = -٢٠$م/ث

أ.مي حواري

• 2021 دور أول / قذف جسم رأسياً للأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث يتحدد بعده عن سطح الأرض بالعلاقة $ف(\text{ن}) = ٢٠\text{ن} - ٥\text{ن}^٢$ حيث ف ارتفاع الجسم بالأمتار، بعد ن ثانية، جد

أ/ أقصى ارتفاع يصله الجسم ب/ سرعة الجسم عندما يقطع مسافة ٢٥ متر.

الحل / ١/ $ف = ٢٠\text{ن} - ٥\text{ن}^٢$



$ع = ٢٠ - ١٠\text{ن} = ٠ \Leftarrow ٢٠ = ١٠\text{ن}$

$\Leftarrow \text{ن} = ٢\text{ث}$ "زمن أقصى ارتفاع"

أقصى ارتفاع = $ف(٢) = ٢٠\times٢ - ٥\times٢^٢ = ٤٠ - ٢٠ = ٢٠$م

٢/ المسافة المقطوعة = ٢ أقصى ارتفاع − $ف(\text{ن})$

$٢٥ = ٢\times٢٠ - ف(\text{ن}) \Leftarrow ف(\text{ن}) = ٤٠ - ٢٥ = ١٥$م

$١٥ = ٢٠\text{ن} - ٥\text{ن}^٢ \Leftarrow (٥\text{ن}^٢ - ٢٠\text{ن} + ١٥ = ٠) \div ٥ \Leftarrow \text{ن}^٢ - ٤\text{ن} + ٣ = ٠$

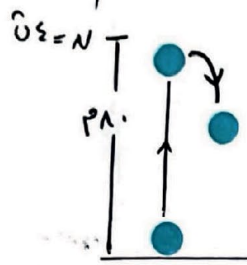
$(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٣) = ٠$

إما $\text{ن} - ١ = ٠ \Leftarrow \text{ن} = ١\text{ث}$ مرفوض أو $\text{ن} - ٣ = ٠ \Leftarrow \text{ن} = ٣\text{ث}$.

$ع(٣) = ٢٠ - ٣٠ = -١٠$م/ث

• 2021 دور ثاني/ قذف جسم رأسيًا إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض وبعد ثانية يتصدد بعد عن سطح الأرض بالعلاقة ف = ٤٠ن - ٥ن² حيث ف : ارتفاع الجسم بالأمتار و ن الزمن بالثواني وجد:

١/ أقصى ارتفاع يصله الجسم ٢/ سرعة الجسم عندما تكون المسافة المقطوعة ١٨٠م



أ.مي حواري

الحل/ ١/ ف = ٤٠ن - ٥ن² ← ع = ٤٠ - ١٠ن

ع = ٠ ← ٤٠ - ١٠ن = ٠ ← ن = ٤ ث

أقصى ارتفاع = ف(٤) = ٤٠×٤ - ٥×٤²

= ١٦٠ - ٨٠ = ٨٠ م

٢/ المسافة المقطوعة = ٢× أقصى ارتفاع - ف(ن)

١٨٠ = ٢×٨٠ - ف(ن)

ف(ن) = ١٦٠ - ١٨٠ = -٢٠م

٤٠ن - ٥ن² = -٢٠ ← ٥ن² - ٤٠ن - ٢٠ = ٠ ← ن² - ٨ن - ٤ = ٠

(ن - ٤)(ن + ١) = ٠

إما ن - ٤ = ٠ ← ن = ٤ ث مرفوض

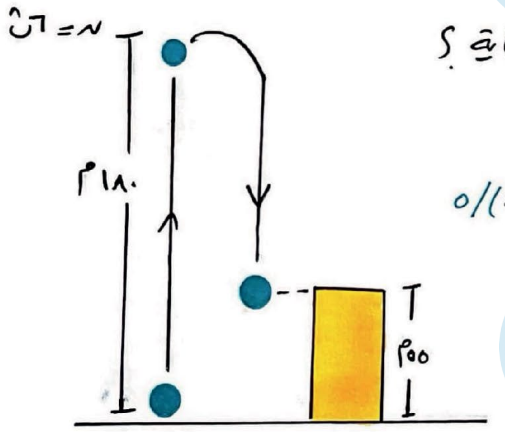
أو ن + ١ = ٠ ← ن = ٥ ث ✓ ← ع(٥) = ٤٠ - ١٠×٥ = -١٠م/ث

• 2022 دور أول/ أطلقت كرة رأسيًا إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض من أمام بناية ارتفاعها ٥٥ متر وبعد أن ارتفع الكرة (بالأمتار) عن سطح الأرض بعد (ن) ثانية يتحدد بالعلاقة

ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن² :

١/ ما سرعة الكرة عندما تصل إلى مستوى البناية ؟

٢/ ما أقصى ارتفاع للكرة عن مستوى سطح البناية ؟



الحل/ ١/ يصل الجسم إلى مستوى سطح البناية

عندما ف(ن) = ٥٥

٥٥ = ٦٠ن - ٥ن² ← ٥ن² - ٦٠ن + ٥٥ = ٠ /÷٥

ن² - ١٢ن + ١١ = ٠

(ن - ١)(ن - ١١) = ٠

إما ن - ١ = ٠ ← ن = ١ ث « الجسم صاعد »

أو ن - ١١ = ٠ ← ن = ١١ ث « الجسم هابط »

ع(ن) = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٦٠ - ١٠ن

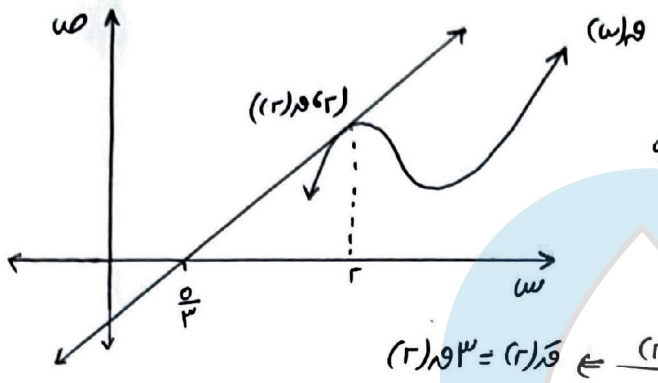
ع(١) = ٦٠ - ١٠ = ٥٠م/ث و ع(١١) = ٦٠ - ١١٠ = -٥٠م/ث

٢/ ع(ن) = ٦٠ - ١٠ن = ٠ ← ١٠ن = ٦٠ ← ن = ٦ ث « زمن أقصى ارتفاع »

أقصى ارتفاع عن الأرض = ف(٦) = ٦٠×٦ - ٥×٦² = ٣٦٠ - ١٨٠ = ١٨٠م

أقصى ارتفاع عن البرج = ١٨٠ - ٥٥ = ١٢٥ م

• كلما دعتك نفسك إلى معصية تذكر أنّ أمّك جريحة تنتظر من يحمل همها و يلتمس طريق عزّتها و معصيتك وغفلتك تجعل منك عبئًا على أمتك. اتقِ الله فإنّ الحمل كاد يكسر ظهرها!



• 2022 دور أول/ يبين الشكل المجاور منحنى ق(س) والمرسوم له مماس عند (س = ٢) فإذا كان ق(٢) + قَ(٢) = ٨ ، جد معادلة العمودي على المماس عند (س = ٢)

الحل/ (٢، ق(٢)) (٥/٣ ، ٠)

ميل المماس = قَ(٢) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

⇐ قَ(٢) = $\frac{ق(٢)}{٢ - \frac{٥}{٣}}$ ⇐ قَ(٢) = $\frac{ق(٢)}{\frac{١}{٣}}$ ⇐ قَ(٢) = ٣ق(٢)

معطى أن/ ق(٢) + قَ(٢) = ٨ نعوض قَ(٢) = ٣ق(٢)

⇐ ق(٢) + ٣ق(٢) = ٨ ⇐ ٤ق(٢) = ٨ ⇐ ق(٢) = ٢ ⇐ (٢، ٢) نقطة التماس

⇐ قَ(٢) = ٣ × ٢ = ٦ = ميل المماس

ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$ = $\frac{-١}{٦}$

معادلة العمودي ⇐ ص − ص١ = م(س − س١) ⇐ ص − ٢ = $-\frac{١}{٦}$(س − ٢) ⇐ ٦ص − ١٢ = −س + ٢

⇐ ٦ص = −س + ١٤ ⇐ ص = $-\frac{١}{٦}$س + $\frac{١٤}{٦}$ ⇐ ص = $\frac{٧}{٣}$ − $\frac{١}{٦}$س

• 2023 دور أول/ إذا كان المستقيم ٦ص = أ − س يمس منحنى ق(س) = $\frac{٣س}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢

ما قيمة الثابت أ .

أ.مي حواري

الحل/ نفرض نقطة التماس (س، ق(س))

٦ص = أ − س ⇐ ٦صَ = −١ ⇐ صَ = $-\frac{١}{٦}$ = ميل المماس .

ق(س) = $\frac{٣س}{س - ٢}$ ⇐ قَ(س) = $\frac{(س - ٢)(٣) - ٣س}{(س - ٢)^٢}$ = $\frac{\cancel{٣س} - ٦ - \cancel{٣س}}{(س - ٢)^٢}$ = $\frac{-٦}{(س - ٢)^٢}$ = ميل المنحنى

ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس ⇐ $\frac{+١}{٦}$ = $\frac{+٦}{(س - ٢)^٢}$

٣٦ = (س − ٢)² بأخذ الجذر التربيعي

إما ٦ = (س − ٢) ⇐ س = ٨ ⇐ ق(٨) = $\frac{٣ × ٨}{٨ - ٢}$ = $\frac{٢٤}{٦}$ = ٤ ⇐ (٨، ٤) نقطة تماس .

أو −٦ = س − ٢ ⇐ س = −٤ ⇐ ق(−٤) = $\frac{-١٢}{-٤ - ٢}$ = $\frac{-١٢}{-٦}$ = ٢ ⇐ (−٤، ٢) نقطة تماس .

٦ص = أ − س ⇐ ٦ص + س = أ

(٨، ٤) ∈ للمماس ⇐ ٦ × ٤ + ٨ = أ ⇐ ٣٢ = أ

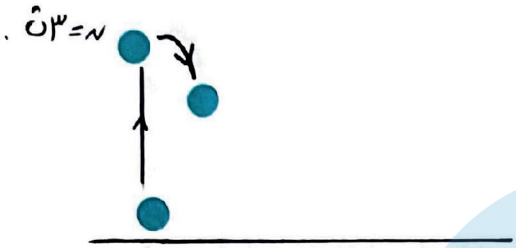
(−٤، ٢) ∈ للمماس ⇐ ٦ × ٢ − ٤ = أ ⇐ ٨ = أ

⇐ أ = {٨، ٣٢}

• 2022 دور ثاني/ قذف جسم رأسيًا إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض ، بحيث أن بعده ف عن سطح الأرض بالعلاقة ف = ٣٠ن − ٥ن² ، ف ارتفاع الجسم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني :

١/ احسب أقصى ارتفاع يصله الجسم

٢/ متى يكون الجسم على ارتفاع ٤٠ مترًا عن سطح الأرض ؟

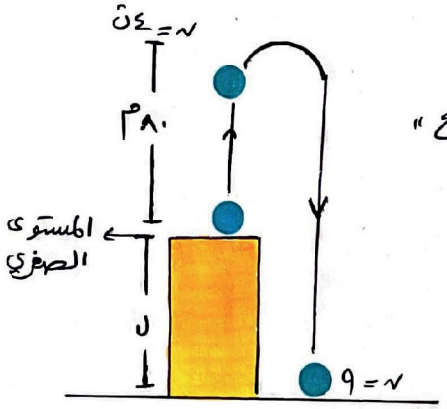


الحل/ ١/ ف = ٣٠ن − ٥ن² ⇐ ع = ٣٠ − ١٠ن = ٠
⇐ ٣٠ = ١٠ن ⇐ ن = ٣ث
أقصى ارتفاع = ف(٣) = ٣٠×٣ − ٥×٩ = ٤٥م

٢/ ف(ن) = ٤٠
٣٠ن − ٥ن² = ٤٠ ⇐ [٥ن² − ٣٠ن + ٤٠ = ٠] ÷ ٥
ن² − ٦ن + ٨ = ٠ ⇐ (ن − ٢)(ن − ٤) = ٠
ن − ٢ = ٠ ⇐ ن = ٢ ثانية «صعود» أو ن − ٤ = ٠ ⇐ ن = ٤ث «هابط»
⇐ ن = {٢ ، ٤}

• 2023 دور أول/ قذف جسم رأسياً إلى أعلى من قمة برج بحيث تعين العلاقة ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن² ارتفاع الجسم عن سطح البرج بعد (ن) ثانية. اذا كانت المسافة التي قطعها الجسم لحظة وصوله إلى الأرض تساوي ٢٠٥م جد كلاً مما يلي:
١/ ارتفاع البرج ٢/ سرعة الجسم لحظة وصوله إلى سطح الأرض

الحل/ المسافة المقطوعة عند وصل الجسم إلى سطح



١/ الأرض = ٢ أقصى ارتفاع + ارتفاع البرج (ل)
ف = ٤٠ن − ٥ن² ⇐ ع = ٤٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ن = ٤ث
ف(٤) = ٤٠×٤ − ٥×٤² = ١٦٠ − ٨٠ = ٨٠م «أقصى ارتفاع»
٢×٨٠ + ل = ٢٠٥
⇐ ٢٠٥ − ١٦٠ = ل ⇐ ٤٥م = ل

٢/ يصل الجسم إلى سطح الأرض عندما ف(ن) = −ل
⇐ ف(ن) = −٤٥
٤٠ن − ٥ن² = −٤٥ ⇐ (٥ن² − ٤٠ن − ٤٥ = ٠) // ٥
ن² − ٨ن − ٩ = ٠
(ن + ١)(ن − ٩) = ٠
إما ن + ١ = ٠ ⇐ ن = −١ × ن ≥ ٠ ، أو ن − ٩ = ٠ ⇐ ن = ٩ث
ع(٩) = ٤٠ − ١٠×٩ = −٥٠م/ث

• 2023 دور ثاني/ يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة هـ^٥ن × ف = ٧هـ^١٠ن − ٧ بين أن تسارع الجسم في أي لحظة يساوي (٢٥ف) عدياً.
(ف الإزاحة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني)

أ.مي حواري

الحل/ [هـ^٥ن × ف = ٧هـ^١٠ن − ٧] ÷ هـ^٥ن ، هـ^٥ن ≠ ٠
ف = ٧هـ^١٠ن / هـ^٥ن − ٧ / هـ^٥ن ⇐ ف = ٧هـ^٥ن − ٧هـ^−٥ن
ع = دف/دن = ٧×٥هـ^٥ن + ٧×٥هـ^−٥ن ⇐ ت = دع/دن = ٣٥×٥هـ^٥ن − ٣٥×٥هـ^−٥ن
⇐ ت = ٢٥(٧هـ^٥ن − ٧هـ^−٥ن) ⇐ ٢٥ف = ت #

• 2023 دور ثاني/ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ٢ن^٣ − ٩ن^٢ ، ف الإزاحة بالأمتار ن الزمن بالثواني ، جد كلاً مما يلي :

١/ سرعة الجسم بعد ٤ ثواني من بدء الحركة ٢/ تسارع الجسم عندما يعكس الجسم اتجاه حركته .

الحل/ ١/ ف = ٢ن^٣ − ٩ن^٢ ⇐ ع = عف/عن = ٦ن^٢ − ١٨ن ⇐ ع(٤) = ٦×١٦ − ١٨×٤

⇐ ع(٤) = ٩٦ − ٧٢ = ٢٤ م/ث

٢/ يعكس الجسم اتجاه حركته ⇐ يتوقف لحظياً ثم تتغير اشارة السرعة.

ع(ن) = ٠ ⇐ ٦ن^٢ − ١٨ن = ٠ ⇐ ٦ن(ن − ٣) = ٠

إما ٦ن = ٠ ⇐ ن = ٠ "بداية الحركة" أو ن − ٣ = ٠ ⇐ ن = ٣ث .

لاحظ عندما (ن = ٣) توقف الجسم لحظياً ثم تغيرت اشارة السرعة ⇐ عكس الجسم اتجاه حركته .

اشارة ع: − − − − − + + +
ن: ٠ ، ٣

ت = دع/دن = ١٢ن − ١٨

ت(٣) = ١٢×٣ − ١٨ = ١٨ م/ث^٢

• 2023 دور ثاني/ اذا كان ل'(٢) = −٤ ، ل(٢) = ٢ ، هـ(٢) = ٣ ، هـ'(٢) = ٤ وكان ق(س) × ل(س) = ٢هـ(س) − ٢س ، جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عندما (س = ٢)

الحل/ معادلة المماس لـ ق عند س = ٢ ← نقطة تماس (٢ ، ق(٢))
← ميل المماس = ق'(٢) .

أ.مي حواري

ق(س) ل(س) = ٢هـ(س) − ٢س |س=٢ ⇐ ق(٢) ل(٢) = ٢هـ(٢) − ٤

٢ق(٢) = ٢×٣ − ٤ ⇐ ٢ق(٢) = ٢ ⇐ ق(٢) = ١

⇐ نقطة التماس = (٢ ، ١)

ق(س) ل(س) = ٢هـ(س) − ٢س ⇐ ق(س) ل'(س) + ل(س) ق'(س) = ٢هـ'(س) − ٢ |س=٢

ق(٢) ل'(٢) + ل(٢) ق'(٢) = ٢هـ'(٢) − ٢

⇐ ١×−٤ + ٢×ق'(٢) = ٢×٤ − ٢ ⇐ −٤ + ٢ق'(٢) = ٦

⇐ ٢ق'(٢) = ١٠ ⇐ ق'(٢) = ٥ = ميل المماس .

معادلة المماس/ ص − ص١ = م(س − س١) ⇐ ص − ١ = ٥(س − ٢) ⇐ ص − ١ = ٥س − ١٠

⇐ ص = ٥س − ٩

• 2023 دور ثالث/ من نقطة على سطح الأرض ، قذف جسم رأسياً إلى أعلى ، وكان ارتفاعه ف بالأمتار بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة ف = أن − ٥ن^٢ وكان أقصى ارتفاع يصله الجسم (٤٥م) جد قيمة الثابت أ ، أ > ٠ :

الحل/ ف = أن − ٥ن^٢ ⇐ ع = عف/عن = أ − ١٠ن = ٠ ⇐ أ = ١٠ن

ف(ن) = ٤٥ = أن − ٥ن^٢ نعوض (أ = ١٠ن)

٤٥ = ١٠ن×ن − ٥ن^٢ ⇐ ٤٥ = ٥ن^٢ ⇐ ٩ = ن^٢ ⇐ ن = ٣ث .

⇐ أ = ١٠ن = ١٠×٣ = ٣٠

• 2024 دور أول/ تحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة ف = ن²(أن + ب) + ٧ ، حيث ف: تمثل بعد الجسم عن نقطة ثابتة بالأمتار ، فإذا كان تسارعه عندما (ن = ٦ث) يساوي ١٨م/ث² ، ويعكس من اتجاه حركته في تلك اللحظة ، جد قيمة كل من الثابتين أ، ب

الحل/ ف = ن²(أن + ب) + ٧ ⇐ ف = أن³ + بن² + ٧

ت(٦) = ١٨ ، يعكس من اتجاه حركته عندما ن = ٦ ⇐ ع(٦) = ٠

ع = دف/دن = ٣أن² + ٢بن ، ت = دع/دن = ٦أن + ٢ب

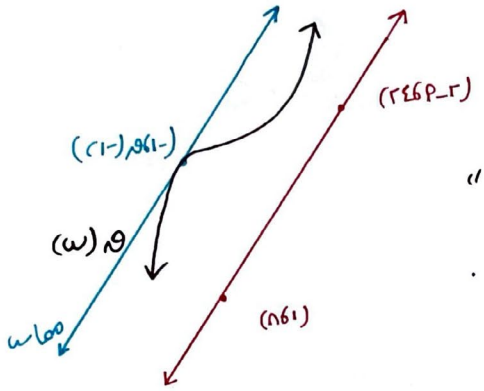
ت(٦) = (٦أ × ٦ + ٢ب = ١٨) ÷ ٢ ⇐ ١٨أ + ب = ٩ — ①

ع(٦) = (٣أ × ٦² + ٢ب × ٦ = ٠) ÷ ١٢ ⇐ ٩أ + ب = ٠ — ②

② − ①/ −٩أ = −٩ ⇐ أ = ١ نعوضها في ٢ ⇐ ٩ + ب = ٠ ⇐ ب = −٩

• 2024 دور ثاني/ إذا كان ق(س) = ٢س³ + أس² ، أ < ٠ وكان المماس لمنحنى ق(س) عند س = −١ يوازي المستقيم المار بالنقطتين (١، ٨)، (٢−أ، ٢٤) ، ما قيمة الثابت أ.

الحل/ (٢−أ، ٢٤) (١، ٨)



م المستقيم = Δص/Δس = (ص٢ − ص١)/(س٢ − س١) = (٢٤ − ٨)/(٢ − أ − ١)

⇐ م المستقيم = ١٦/(١ − أ) = ميل المماس «لأنهما متوازيان»

ق'(س) = ٦س² + ٢أس ⇐ ق'(−١) = ٦ − ٢أ = ميل المماس.

⇐ ١٦/(١ − أ) = ٦ − ٢أ ⇐ (٦ − ٢أ)(١ − أ) = ١٦

⇐ ٦ − ٦أ − ٢أ + ٢أ² = ١٦

⇐ (٢أ² − ٨أ − ١٠ = ٠)/٢ ⇐ أ² − ٤أ − ٥ = ٠ ⇐ (أ + ١)(أ − ٥) = ٠

إما أ + ١ = ٠ ⇐ أ = −١ أو أ − ٥ = ٠ ⇐ أ = ٥ مرفوض.

• 2024 دور ثاني/ جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س² هـ^س عند النقطة التي احداثها السينية يساوي ١

الحل/ ق(١) = (١)² هـ¹ = هـ ⇐ (١، هـ) نقطة تماس.

ق'(س) = س² هـ^س + هـ^س (٢س) ⇐ ق'(١) = هـ + ٢هـ = ٣هـ = ميل المماس.

معادلة المماس/ ص − ص١ = م(س − س١) ⇐ ص − هـ = ٣هـ(س − ١)

ص − هـ = ٣هـس − ٣هـ

ص = ٣هـ − ٢هـ.

أ.مي حواري

• 2024 دور ثاني/ قذف جسم رأسيًا للأعلى من نقطة على سطح الأرض ، بحيث يتحدد ارتفاعه عن سطح الأرض بالعلاقة ف = ٣٠ن − ٥ن² ، جد المسافة التي قطعها الجسم خلال (٥) ثواني من بدء الحركة.

الحل/ ف = ٣٠ن − ٥ن² ⇐ ع = دف/دن = ٣٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ٣٠ = ١٠ن ⇐ ن = ٣ث «زمن أقصى ارتفاع».

أقصى ارتفاع = ف(٣) = ٣٠ × ٣ − ٥ × ٩ = ٤٥م

أ.مي حواري

ف(٥) = ٣٠×٥ − ٥×٥² = ١٥٠ − ١٢٥ = ٢٥م

المسافة المقطوعة = ٢ أقصى ارتفاع − ف(ن)

= ٢×٤٥ − ف(٥) = ٩٠ − ٢٥ = ٦٥ متر.

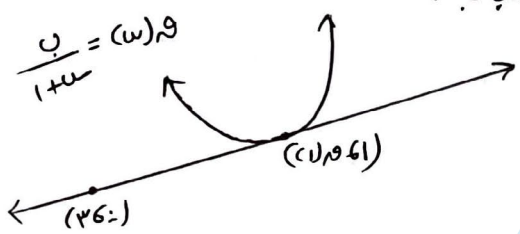
• 2024 دور ثالث/ من نقطة على سطح الأرض، قذف جسم رأسيًا لأعلى، وكان ارتفاعه ف بالأمتار بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة ف = أن − ٥ن² وكان أقصى ارتفاع يصله الجسم (٤٥ م)

جد قيمة الثابت أ، أ > ٠

الحل/ أ = ٣٠، مكرر "نفس سؤال 2023 دور ثالث"

• 2025 دور أول/ اذا كان المستقيم المار بالنقطة (٠، ٣) يمس منحنى الاقتران ق(س) = ب/(س+١)، س ≠ −١ عندما س = ١ ما قيمة الثابت ب.

الحل/



(١، ق(١))، (٠، ٣)

م المماس = Δص/Δس = (ق(١) − ٣)/(١ − ٠) = ب/(١+١) − ٣

⇐ م = ب/٢ − ٣

ق′(س) = −ب/(س+١)² ⇐ ميل المماس = ق′(١) = −ب/(١+١)² = −ب/٤

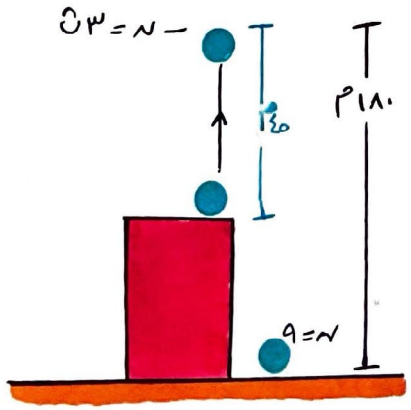
ميل المماس = ميل المنحنى عند س = ١ ⇐ [ب/٢ − ٣ = −ب/٤] × ٤ ⇐ ٢ب − ١٢ = −ب

٣ب = ١٢ ⇐ ب = ٤

• 2025 دور أول/ قذف جسم رأسيًا إلى أعلى من قمة برج بحيث أن ارتفاعه عن البرج بالأمتار بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن²، جد:

١/ الزمن اللازم ليصل إلى سطح الأرض علمًا بأن أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض يساوي (١٨٠ م).

٢/ المسافة الكلية المقطوعة خلال الثواني الأربعة الأولى.



الحل/ ف = ٣٠ن − ٥ن²

ع = دف/دن = ٣٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ٣٠ = ١٠ن

⇐ ن = ٣ث "زمن أقصى ارتفاع"

أقصى ارتفاع عن البرج = ف(٣) = ٣٠×٣ − ٥×٩ = ٤٥م

ارتفاع البرج = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥م

عندما يصل الجسم إلى سطح الأرض ⇐ ف(ن) = −١٣٥

٣٠ن − ٥ن² = −١٣٥ ⇐ (٥ن² − ٣٠ن − ١٣٥ = ٠) / ٥

ن² − ٦ن − ٢٧ = ٠ ⇐ (ن + ٣)(ن − ٩) = ٠

ن + ٣ = ٠ ⇐ ن = −٣ مرفوض أو ن − ٩ = ٠ ⇐ ن = ٩ث

٢/ ف(٤) = ٣٠×٤ − ٥×٤² = ١٢٠ − ٨٠ = ٤٠م

المسافة المقطوعة = ٢أقصى ارتفاع − ف(ن)

= ٢×٤٥ − ف(٤) = ٩٠ − ٤٠ = ٥٠م

• 2025 دور ثاني/ إذا كان المستقيم س = أ − ٦ص يمس منحنى ق(س) = $\frac{٣س}{س-٢}$ ، س ≠ ٢ جد

١/ نقط / نقطة التماس ٢/ قيمة / قيم الثابت أ

الحل/

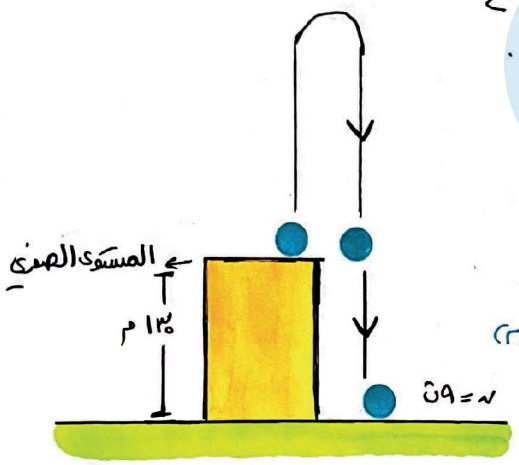
مُكرر سؤال (2023 دور أول). ١/ نقط التماس (−٤، ٢)، (٨، ٤)

٢/ أ = ٨، ٣٢

• 2025 دور ثاني/ قذف جسم رأسيًا لأعلى من نقطة على سطح برج بحيث أن ارتفاعه عن قمة البرج بالأمتار بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة ف(ن) = أن − ب ن² فإذا وصل الجسم الأرض بعد (٩ث) وبسرعة −٦٠م/ث ، فإذا علمت أن ارتفاع البرج هو (١٣٠م) جد:

١/ قيمة كل من الثابتين أ، ب

٢/ زمن وصول الجسم وهو نازل إلى مستوى قمة البرج



الحل/ عندما ن = ٩ ⇐ ع = −٦٠ ⇐ ع(٩) = −٦٠م/ث.

١/ عندما ن = ٩ ⇐ ف = −١٣٠ ⇐ ف(٩) = −١٣٠

ف(٩) = ٩أ − ٩²ب ⇐ [−١٣٠ = ٩أ − ٨١ب] ÷ ٩

$\boxed{-١٠ = أ - ٩ب}$ ⇐ معادلة (١)

ع = $\frac{دف}{دن}$ = أ − ٢ب ن

ع(٩) = أ − ١٨ب ⇐ $\boxed{-٦٠ = أ - ١٨ب}$ ⇐ معادلة (٢)

(١) − (٢) / ٤٥ = ٩ب ⇐ ٥ = ب

−١٠ = أ − ٩×٥ ⇐ −١٠ + ٤٥ = أ ⇐ ٣٠ = أ

٢/ يصل الجسم إلى مستوى البرج وهو نازل ⇐ ف(ن) = ٠

٣٠ن − ٥ن² = ٠ ⇐ ٥ن² − ٣٠ن = ٠ ⇐ ن² − ٦ن = ٠ ⇐ (ن)(ن − ٦) = ٠

إما ن = ٠ × بداية الحركة أو ن − ٦ = ٠ ⇐ ن = ٦ث.

• 2020 مديرية القدس الشريف/ اذا كان المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (١، ٣) يصنع زاوية قياسها ١٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات جد معادلة المماس لمنحنى هـ(س) عند (س = ٢) حيث

هـ(س) = (س² + س) ق(س − ١)

الحل/ (١، ٣) ∈ ق(س) ⇐ ق(١) = ٣

ميل المماس = قَ(١) = ظا١٣٠ ⇐ قَ(١) = −١

هـ(س) = (س² + س) ق(س − ١)

هـَ(س) = (س² + س) قَ(س − ١) + ق(س − ١)(٢س + ١)

أ.مي حواري

هَ(٢) = (٢²+٢) قَ(٢−١) + ق(٢−١)(٢×٢+١)

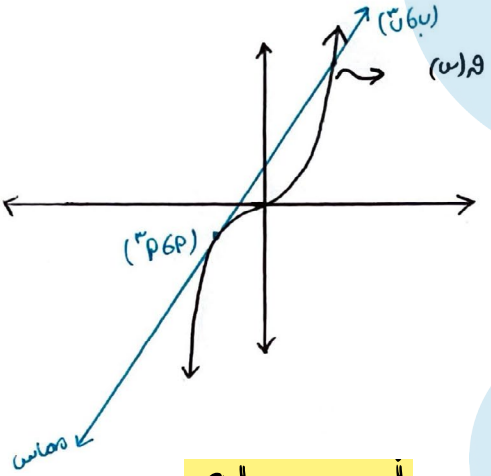
هَ(٢) = ٦قَ(١) + ٥ق(١) = ٦(−١) + ٥×٣ = ٩ = ميل مماس هـ(س) عند (س=٢)

* هـ(٢) = (٢²+٢) ق(٢−١) = ٦ق(١) = ٦×٣ = ١٨ ⇐ (٢، ١٨) نقطة التماس.

معادلة المماس/ ص − ص١ = م(س − س١)

ص − ١٨ = ٩(س − ٢) ⇐ ص − ~~١٨~~ = ٩س − ~~١٨~~ ⇐ ص = ٩س

• 2023 طولكرم/ اذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق(س) = س³ يمس المنحنى عند (س=أ) ويقطع المنحنى عند (س=ب) أثبت أن قَ(ب) − ٤قَ(أ) = ٠



الحل/ قَ(س) = ٣س²

ميل المماس = قَ(أ) = ٣أ²

(ب، ب³) (أ، أ³)

ميل المماس = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{أ^3 - ب^3}{أ - ب}$

⇐ ٣أ² = $\frac{(أ-ب)(أ^2+أب+ب^2)}{(أ-ب)}$ ، أ ≠ ب

⇐ ٣أ² = أ² + أب + ب² ⇐ ٢أ² − أب − ب² = ٠

(٢أ + ب)(أ − ب) = ٠

إما أ − ب = ٠ ⇐ أ = ب ✗ أ، ب نقطتان مختلفتان.

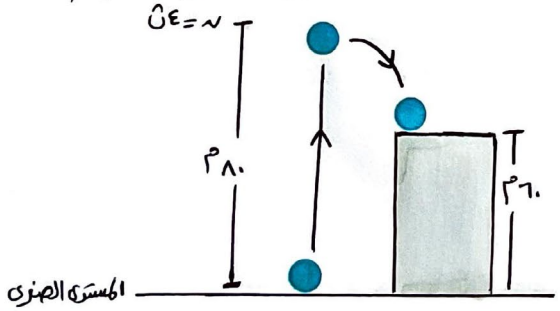
أو ٢أ + ب = ٠ ⇐ −٢أ = ب

قَ(ب) = قَ(−٢أ) = ٣(−٢أ)² = ٣×٤أ² = ١٢أ²

المطلوب/ قَ(ب) − ٤قَ(أ) = ١٢أ² − ٤×٣أ² = ١٢أ² − ١٢أ² = صفر #

أ.مي حواري

• 2024 مديرية قباطية / من نقطة على سطح الأرض قذف جسم رأسيًا لأعلى بحيث يتحدد بعده عن سطح الأرض بالعلاقة ف = ٤٠ن − أن² ، إذا علمت أن الجسم سقط على سطح عمارة ترتفع (٦٠م) عن سطح الأرض ، جد سرعة ارتطام الجسم بسطح العمارة علمًا بأن أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم عن سطح الأرض هو (٨٠م)



الحل/ ف = ٤٠ن − أن²

ع = $\frac{دف}{دن}$ = ٤٠ − ٢أن = ٠ ⇐ ٤٠ = ٢أن

٢٠ = أن « عند أقصى ارتفاع »

ف(ن) = ٤٠ن − أن² = ٨٠ نعوض (أن = ٢٠)

٤٠ن − أن×ن = ٨٠

٤٠ن − ٢٠ن = ٨٠ ⇐ ٢٠ن = ٨٠ ⇐ ن = ٤ث

٢٠ = أن ⇐ ٢٠ = ٤أ ⇐ أ = ٥

⇐ ف = ٤٠ن − ٥ن² ⇐ عندما يكون الجسم على سطح العمارة ⇐ ف(ن) = ٦٠

٤٠ن − ٥ن² = ٦٠ ⇐ (٥ن² − ٤٠ن + ٦٠ = ٠) ÷ ٥ ⇐ ن² − ٨ن + ١٢ = ٠

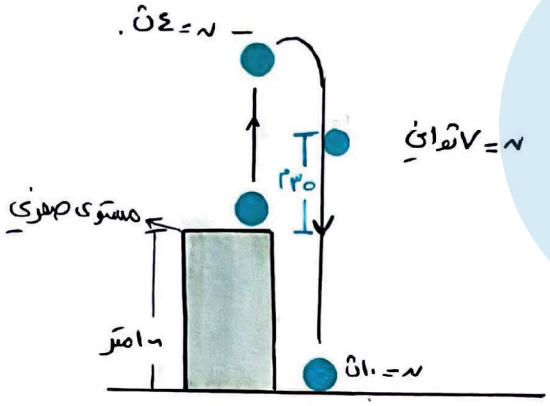
(ن − ٢)(ن − ٦) = ٠ / إما ن − ٢ = ٠ ⇐ ن = ٢ ثانية ✗ الجسم صاعد.

أو ن − ٦ = ٠ ⇐ ن = ٦ث ⇐ ع(٦) = ٤٠ − ١٠×٦ = −٢٠م/ث

• 2024 مديرية طولكرم/ قذف جسم رأسيًا لأعلى من قمة برج ارتفاعه (١٠ متر) بحيث أن ارتفاعه عن قمة البرج بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة ف = ل ن - ٥ن٢ ، اذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض بعد (٧ ثواني) يساوي (٣٥ م) جد:

١/ قيمة الثابت ل ٢/ أقصى ارتفاع يصله الجسم عن سطح البرج

٣/ سرعة ارتطام الجسم بالأرض.



الحل/ ١/ ارتفاع الجسم عن البرج بعد (٧ ثواني) = ١٣٥ - ١٠ = ٣٥ م

← ف(٧) = ٣٥ م

٣٥ = ٧ل - ٥×٤٩ ← ٣٥ = ٧ل - ٢٤٥ ← ل = ٥ = ٣٥

← ل = ٤٠

٢/ ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن٢ ← ع = ف' = ٤٠ - ١٠ن = ٠ ∴

← ٤٠ = ١٠ن ← ن = ٤ ث

أقصى ارتفاع عن البرج = ف(٤) = ٤٠×٤ - ٥×١٦ = ١٦٠ - ٨٠ = ٨٠ م

تحت المستوى الصفري

٣/ يصل الجسم إلى سطح الأرض عندما ف(ن) = -١٠

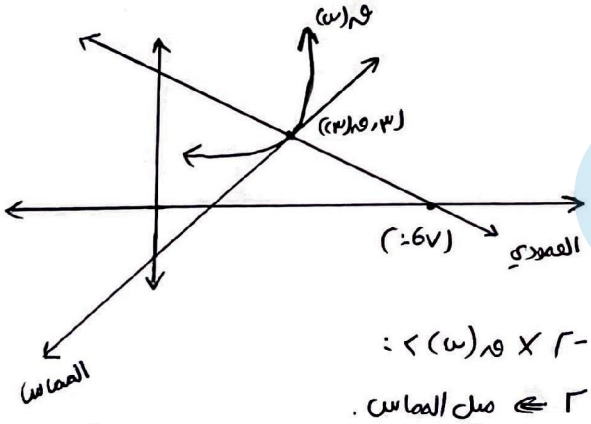
← ٤٠ن - ٥ن٢ = -١٠ ∴ ٤ن - ن٢ = -٢ ÷ (-٥)

ن٢ - ٨ن - ٢٠ = ٠ ∴ (ن - ١٠)(ن + ٢) = ٠

ن - ١٠ = ٠ ∴ ن = ١٠ ث ← ع(١٠) = ٤٠ - ١٠×١٠ = -٦٠ م/ث

أ.مي حواري

• 2024 طولكرم/ سؤال/ إذا كان العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند (٣، ق(٣)) يقطع (٧) وصادات موجبة من محور السينات وكان ق(٣) - ق'(٣) = ٠ جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٣ ، ق(س) > ٠



الحل/ ق(٣) - ق'(٣) = ٠ ← ق(٣) = ق'(٣)

(٣، ق(٣)) ، (٧، ٠)

ميل العمودي = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ق(٣) - ٠}{٣ - ٧}$ = $\frac{-ق(٣)}{٤}$

ميل المماس = $\frac{-١}{\text{م العمودي}}$ ← ق'(٣) = $\frac{٤}{ق(٣)}$

ق(٣) ق'(٣) = ٤ نعوض ق'(٣) = ق(٣)

ق٢(٣) = ٤ ← ق(٣) = ٢ ✓ أو ق(٣) = -٢ ✗ ق(س) > ٠

← (٣، ٢) نقطة التماس ، ق'(٣) = ق(٣) = ٢ ← ميل المماس.

معادلة المماس/ ص - ص١ = م(س - س١) ← ص - ٢ = ٢(س - ٣)

ص = ٢س - ٦ + ٢ ← ص = ٢س - ٤

• 2024 قلقيلية/ اذا كان $\lim_{س \to ٢} \frac{ل(س) - ٢}{س - ٢}$ = -٤ ، $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٣}{س - ٢}$ = ٤ وكان الاقتران

ق(س) ، ل(س) متصلان على ح وكان ق(س) = ل(س) × ق(س) = ٣ق(س) - ٣س ، جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) عندما س = ٢ .

الحل/ * $\lim_{س \to ٢} \frac{ل(س) - ٢}{س - ٢} = \frac{ل(٢) - ٢}{٢ - ٢} = \frac{ل(٢) - ٢}{٠}$

بما أن المقام = ٠ ، النهاية موجودة ⇐ البسط = ٠ ⇐ ل(٢) − ٢ = ٠ ⇐ ل(٢) = ٢

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ٢} ل'(س) = ل'(٢) = -٤$

* $\lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س) - ٣}{س - ٢} = \frac{هـ(٢) - ٣}{٢ - ٢} = \frac{هـ(٢) - ٣}{٠}$

بما أن النهاية موجودة والمقام = ٠ ⇐ البسط = ٠ ⇐ هـ(٢) − ٣ = ٠ ⇐ هـ(٢) = ٣

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ٢} هـ'(س) = هـ'(٢) = ٤$

* ق(س) ل(س) = ٢هـ(س) − ٢س $\Big|_{س=٢}$ ⇐ ق(٢) ل(٢) = ٢هـ(٢) − ٤

٢ق(٢) = ٦ − ٤ ⇐ ٢ق(٢) = ٢ ⇐ ق(٢) = ١

⇐ (٢، ١) نقطة التماس.

* ق(س) ل(س) = ٢هـ(س) − ٢س نشتق

ق(س) ل'(س) + ل(س) ق'(س) = ٢هـ'(س) − ٢ $\Big|_{س=٢}$ ⇐ ق(٢) ل'(٢) + ل(٢) ق'(٢) = ٢هـ'(٢) − ٢

⇐ ١ × −٤ + ٢ق'(٢) = ٢ × ٤ − ٢ ⇐ ٢ق'(٢) = ١٠ ⇐ ق'(٢) = ٥ = ميل المماس.

+٤ +٤

* معادلة المماس/ ص − ص١ = م(س − س١) ⇐ ص − ١ = ٥(س − ٢) ⇐ ص − ١ = ٥س − ١٠

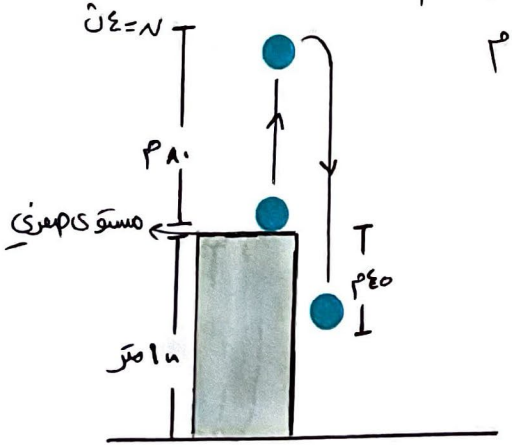
ص = ٥س − ٩

أ.مي حواري

• 2024 مديرية نابلس/ قذف جسم رأسيًا لأعلى من سطح العمارة بحيث أن بعده عن سطح الأرض يعطى بالعلاقة ف(ن) = ١٠ + أن − ٥ن² حيث ف: الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، جد:

١/ الثابت أ حيث أن أقصى ارتفاع وصله الجسم عن سطح العمارة هو ٨٠م

٢/ سرعة الجسم عندما يكون تحت مستوى سطح العمارة بـ ٤٥م



الحل/ ف(ن) = ١٠ + أن − ٥ن² "عن سطح الأرض"

ارتفاع البرج

⇐ ف(ن) = أن − ٥ن² "عن قمة البرج"

ع = $\frac{دف}{دن}$ = أ − ١٠ن = ٠ ⇐ أ = ١٠ن عند أقصى ارتفاع

أقصى ارتفاع = ف(ن) = ٨٠

أن − ٥ن² = ٨٠ نعوض (أ = ١٠ن)

١٠ن × ن − ٥ن² = ٨٠ ⇐ ٥ن² = ٨٠ ⇐ ن² = ١٦

⇐ ن = ٤ث "زمن الوصول لأقصى ارتفاع"

أ = ١٠ن ⇐ أ = ١٠ × ٤ ⇐ أ = ٤٠

تحت المستوى الصفري

٢/ عندما يكون الجسم تحت مستوى العمارة بـ ٤٥ ⇐ ف(ن) = −٤٥ ⇐ ٤٠ن − ٥ن² = −٤٥

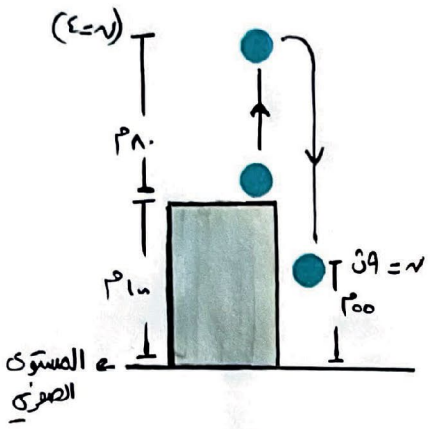
أ.مي حواري

⇐ (٥ن² − ٤٠ن − ٤٥ = ٠) / ٥ ⇐ ن² − ٨ن − ٩ = ٠ ⇐ (ن + ١)(ن − ٩) = ٠

إما ن + ١ = ٠ ⇐ ن = −١ ✗ أو ن − ٩ = ٠ ⇐ ن = ٩ ث.

ع(٩) = ٤٠ − ١٠ × ٩ = −٥٠ م/ث

طريقة (٢) / الحل باعتبار أن المستوى الصفري هو الأرض:



١/ ف(ن) = ١٠٠ + ٢ن − ٥ن² عن الأرض.

ف(٠) = ١٠٠م = ارتفاع البرج

أقصى ارتفاع عن الأرض = طول البرج + أقصى ارتفاع عن البرج

= ١٠٠ + ٨٠ = ١٨٠م

ع = ٢ − ١٠ن = ٠ ⇐ ٢ = ١٠ن عند أقصى ارتفاع

أقصى ارتفاع = ف(ن) = ١٨٠ ⇐ ١٠٠ + ٢ن − ٥ن² = ١٨٠

٥ن² − ٢ن + ٨٠ = ٠ نعوض (٢ = ١٠ن)

٥ن² − ١٠ن × ن = −٨٠ ⇐ −٥ن² = −٨٠ ⇐ ن² = ١٦ ⇐ ن = ٤ث (زمن أقصى ارتفاع)

⇐ ٢ = ١٠ × ن = ١٠ × ٤ ⇐ ٢ = ٤٠

٢/ عندما تكون الجسم تحت مستوى العمارة بـ ٤٥ يكون ارتفاعه عن الأرض = ١٠٠ − ٤٥ = ٥٥م

⇐ ف(ن) = ٥٥ ⇐ ١٠٠ + ٤٠ن − ٥ن² = ٥٥ ⇐ ٥ن² − ٤٠ن − ٤٥ = ٠ ⇐ ن² − ٨ن − ٩ = ٠

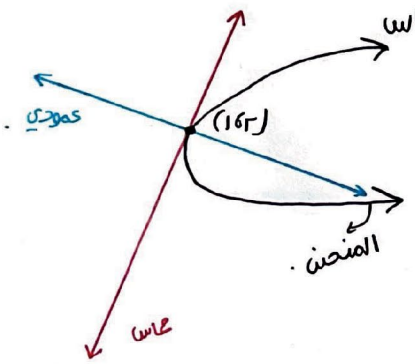
⇐ (ن + ١)(ن − ٩) = ٠ ⇐ ن = ٩ث.

ع(٩) = ٤٠ − ١٠ × ٩ = −٥٠ م/ث

• 2025 طولكرم/ إذا كانت معادلتا المماس والعمودي على المماس لمنحنى العلاقة س^ل − ص^ل = ن حيث ل ، ن ∈ ℤ* هما على الترتيب ص = ٢س − ٣ ، ص = ٢ − س/٢ جد قيمة المقدار ل + ٢ن

الحل/ معادلة المماس / ص = ٢س − ٣ ← ١ ⇐ ص' = ٢ = ميل المماس

معادلة العمودي / ص = ٢ − س/٢ ← ٢



وبما أن نقطة التماس (س، ص) تمثل تقاطع المماس والعمودي

⇐ نحل المعادلتين لإيجاد نقطة التماس.

١ ⊖ ٢ ⇐ ٠ = ٢س + س/٢ − ٥

(٥ = ٢س + س/٢) × ٢ ⇐ ١٠ = ٤س + س

١٠ = ٥س ⇐ (س = ٢) نعوضها في (١)

ص = ٢ × ٢ − ٣ ⇐ ص = ١ ⇐ (٢، ١) نقطة التماس.

س^ل − ص^ل = ن ⇐ ل س^(ل−١) − ل ص^(ل−١) ص' = ٠

(س، ص) = (٢، ١)

ص' = ٢ = ميل المماس

⇐ ل(٢)^(ل−١) − ل(١)^(ل−١) × ٢ = ٠

ل ≠ ٠ ، ل(٢)^(ل−١) = ٢ل ⇐ ٢^(ل−١) = ٢^١

ل − ١ = ١ ⇐ ل = ٢

(٢، ١) ∈ للمنحنى ⇐ س^ل − ص^ل = ن ⇐ ٢^٢ − ١^٢ = ن ⇐ ٤ − ١ = ن ⇐ ٣ = ن

المطلوب/ ل + ٢ن = ٢ + ٢ × ٣ = ٨

• 2025 رام الله/ اذا كانت معادلتا المماس والعمودي على المماس لمنحنى العلاقة $ص^2 - س^2 = 9$ هما $4س - ص = 7$ و $س + ب ص = 7$ على الترتيب، جد قيمة العدد $ن + ب$

الحل/ معادلة العمودي $\Leftarrow س + ب ص = 7 \Leftarrow ص = -\frac{1}{ب} س + \frac{7}{ب}$ = ميل العمودي

معادلة المماس $\Leftarrow 4س - ص = 7 \Leftarrow ص = 4س - 7$ = ميل المماس

ميل العمودي × ميل المماس $= -1 \Leftarrow -\frac{1}{ب} \times 4 = -1 \Leftarrow \boxed{ب = 4}$

أ.مي حواري

$\Leftarrow س + 4ص = 7$ ـــ معادلة العمودي ـــ (1)

$4 \times (4س - ص = 7)$ ـــ معادلة المماس $\Leftarrow 16س - 4ص = 28$ ـــ (2)

لايجاد نقطة التماس نحل المعادلتين، وهذه نقطة التماس عبارة عن نقطة تقاطع المماس والعمودي،

(1) + (2) $\Leftarrow 17س = 34 \Leftarrow س = 2$ نعوضها في (1)

$2 + 4ص = 7 \Leftarrow 4ص = 5 \Leftarrow ص = 1 \Leftarrow (2, 1)$ نقطة التماس.

$(2, 1) \in$ المنحنى $\Leftarrow 2^ن - 1^ن = ك \Leftarrow 2^ن - 1 = ك$ ـــ (3)

$ص^2 - س^2 = ك \Leftarrow ن ص^{ن-1} \frac{د ص}{د س} - ن س^{ن-1} = 0$ | نعوض $\frac{د ص}{د س} = 4$ ميل المماس،

$\Leftarrow ن(2)^{ن-1} - ن(1)^{ن-1} \times 4 = 0$ (2, 1)

$ن \neq 0 \Leftarrow 2^{ن-1} = 4 \Leftarrow 2^{ن-1} = 2^2 \Leftarrow ن - 1 = 2 \Leftarrow \boxed{ن = 3}$

نعوض ن في (3) $\Leftarrow ك = 2^3 - 1 \Leftarrow \boxed{ك = 7}$

المطلوب/ $ن + ب ك = 3 + 4 \times 7 = 3 + 28 = 31$

• خارجي/ إذا كان المستقيم $4س - 2ص = 8$ يمس منحنى $ق(س)$ عند النقطة $(3, 2)$ وكان المستقيم $3س + 9ص = 1$ عمودياً على مماس منحنى $ل(س)$ عند $(-3, 1)$ جد قيمة $ه'(3)$ حيث $ه(س) = \frac{ق(س) + 3س}{س^4 ل(س)}$

الحل/

$4س - 2ص = 8$ مماس $ق(س)$ عند $(3, 2)$

$(3, 2) \in ق(س) \Leftarrow ق(3) = 2$

نشتق $\Leftarrow 4 - 2ص' = 0 \Leftarrow 2ص' = 4 \Leftarrow ص' =$ ميل المماس $\Leftarrow ق'(3) = 2$

$3س + 9ص = 1$ عمودي على $ل(س)$ عند $(-3, 1) \Leftarrow (-3, 1) \in ل \Leftarrow ل(3) = -1$

نشتق $\Leftarrow 3 + 9ص' = 0 \Leftarrow 9ص' = -3 \Leftarrow ص' = -\frac{1}{3}$ = ميل العمودي

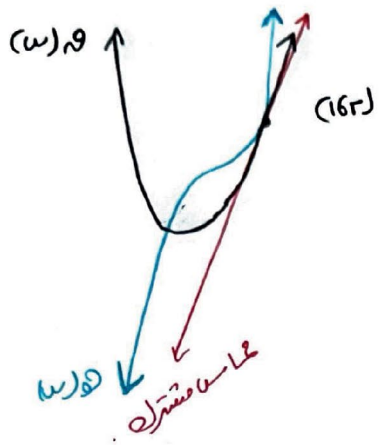
$\Leftarrow$ ميل المماس $= 3 = ل'(3)$

$ه(س) = \frac{ق(س) + 3س}{س^4 ل(س)} \Leftarrow ه'(س) = \frac{(س^4 ل(س))(ق'(س) + 3) - (ق(س) + 3س)(4س^3 ل(س) + س^4 ل'(س))}{(س^4 ل(س))^2}$

$\Leftarrow ه'(3) = \frac{(9 ل(3))(ق'(3) + 3) - (ق(3) + 9)(9 ل'(3) + 4 ل(3))}{(9 ل(3))^2}$

$= \frac{-9(2 + 3)(2 + 9) - (6 + 9)(9 \times 3 + 4 \times -1)}{(9 \times -1)^2} = \frac{-45 - 11 \times 21}{81} = \frac{-276}{81} = -\frac{92}{27}$

• خارجي/ اذا كان ق(س) = س² + أس + ب يقطع منحنى هـ(س) = س³ − جـ س ولهما نفس المماس عند (١، ٢) ما قيم كل من الثوابت أ، ب، جـ



الحل/ * (١، ٢) نقطة تماس مشتركة

⇐ هـ(١) = ق(١) = ٢

هـ(١) = ١ − جـ = ٢ ⇐ ١ − ٢ = جـ ⇐ −١ = جـ

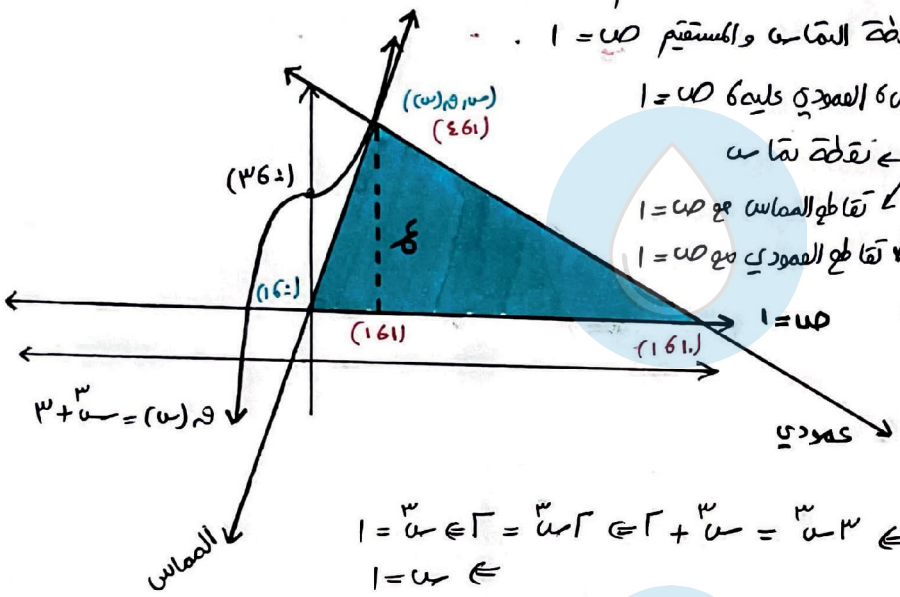
ق(١) = ١ + أ + ب ⇐ ١ + أ + ب = ٢ ⇐ أ + ب = ١ — معادلة (١)

* هـَ(١) = قَ(١)

٣س² − جـ = ٢س + أ | س = ١ ⇐ ٣ − −١ = ٢ + أ ⇐ ٢ = أ

نعوض أ في (١) ⇐ ٢ + ب = ١ ⇐ ب = −١

• خارجي/ جد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم من النقطة (٠، ١) لمنحنى ق(س) = س³ + ٣ والعمودي على المماس عند نقطة التماس والمستقيم ص = ١ .



الحل/ أضلاع المثلث / المماس، العمودي عليه، ص = ١

يجب أن نجد احداثيات رؤوسه ← نقطة تماس

← تقاطع المماس مع ص = ١

← تقاطع العمودي مع ص = ١

نفرض نقطة التماس (س، ق(س))

قَ(س) = ٣س² = ميل المنحنى

(٠، ١) (س، س³ + ٣)

ميل المماس = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

٣س² = $\frac{س^3 + ٣ - ١}{س - ٠}$ ⇐ ٣س³ = س³ + ٢ ⇐ ٢س³ = ٢ ⇐ س³ = ١

⇐ س = ١

ق(١) = ١ + ٣ = ٤ ⇐ (١، ٤) نقطة التماس

قَ(١) = ٣(١)² = ٣ = ميل المماس .

معادلة المماس/ ص − ص١ = م(س − س١) ⇐ ص − ٤ = ٣(س − ١)

لإيجاد نقطة تقاطعه من (ص = ١) نعوض ⇐ ١ − ٤ = ٣(س − ١) ⇐ −٣ = ٣(س − ١)

⇐ −١ = س − ١ ⇐ س = ٠ ⇐ (٠، ١)

ميل العمودي/ $\frac{-١}{م_{المماس}}$ = $\frac{-١}{٣}$

معادلة العمودي / ص − ٤ = $\frac{-١}{٣}$(س − ١) عندما (ص = ١)

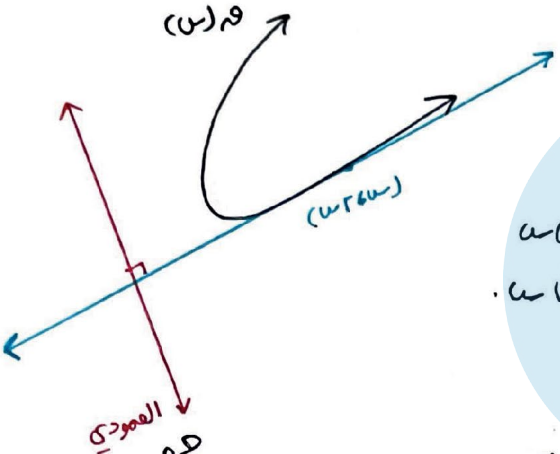
−٣ = $\frac{-١}{٣}$(س − ١) ⇐ ٩ = س − ١ ⇐ س = ١٠ (١٠، ١)

مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ ق ع = $\frac{١}{٢}$ (١٠ − ٠)(٤ − ١) = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٣ = ١٥ وحدة مساحة .

أ.مي حواري

شو المانع أنكّ تحاول مرّة ومرّتين وألف ؟!

• خارجي/ إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = س² − ٤س + ٥ عند النقطة (س، ٢س) هي جـص = س + ٣ ، جـ ≠ ٠ ، ما القيم الممكنة للثابت جـ



جـص = س + ٣
جـص' = ١
ص' = ١/جـ = ميل العمودي
⇐ ميل المماس = −جـ

الحل/ ق(س) = س² − ٤س + ٥ = ٢س

س² − ٦س + ٥ = ٠

(س − ١)(س − ٥) = ٠

إما س − ١ = ٠ ⇐ س = ١ ⇐ (١، ٢) نقطة التماس

أو (س − ٥) = ٠ ⇐ س = ٥ ⇐ (٥، ١٠) نقطة تماس.

ق(س) = س² − ٤س + ٥

ق'(س) = ٢س − ٤

عند (١، ٢) ⇐ م المماس = ق'(١) = −٢ = −جـ ⇐ جـ = ٢

عند (٥، ١٠) ⇐ م المماس = ق'(٥) = ٦ = −جـ ⇐ جـ = −٦

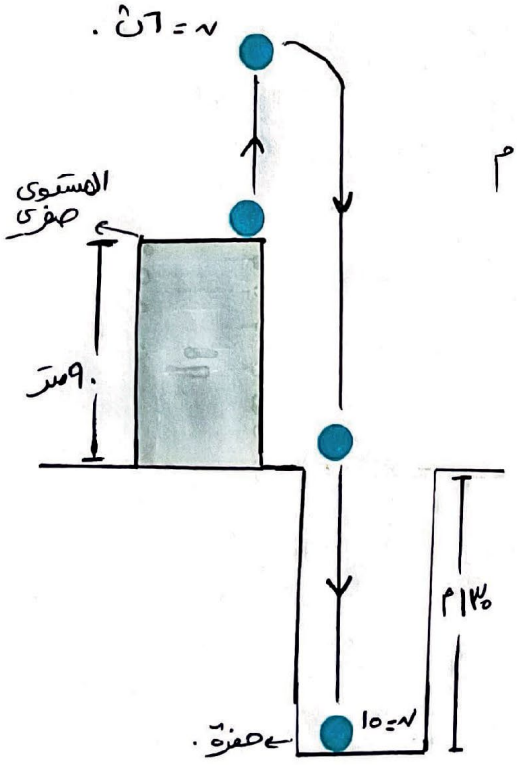
⇐ جـ = {٢، −٦}.

أ.مي حواري

• خارجي/ قذف جسم رأسيًا إلى أعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن² من قمة برج ارتفاعه (٩٠ متر) عند سطح الأرض وسقط في حفرة عمقها ١٣٥ متر جد:

١/ المسافة الكلية التي قطعها الجسم حتى وصوله قاع الحفرة.

٢/ سرعة الجسم عند ارتطامه بسطح الحفرة.



الحل/ ١/ ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن² ⇐ ع = ٦٠ − ١٠ن = ٠

٦٠ = ١٠ن ⇐ ن = ٦ث "زمن وصول إلى أقصى ارتفاع".

أقصى ارتفاع عن البرج = ف(٦) = ٦٠×٦ − ٥×٦² = ٣٦٠ − ١٨٠ = ١٨٠م

المسافة الكلية = ٢×أقصى ارتفاع + طول البرج + عمق الحفرة

= ٢×١٨٠ + ٩٠ + ١٣٥

= ٥٨٥م

٢/ عندما يرتطم الجسم بالحفرة يكون

⇐ ف(ن) = −(٩٠ + ١٣٥) = −٢٢٥م

⇐ ٦٠ن − ٥ن² = −٢٢٥

(٥ن² − ٦٠ن − ٢٢٥ = ٠) / ٥

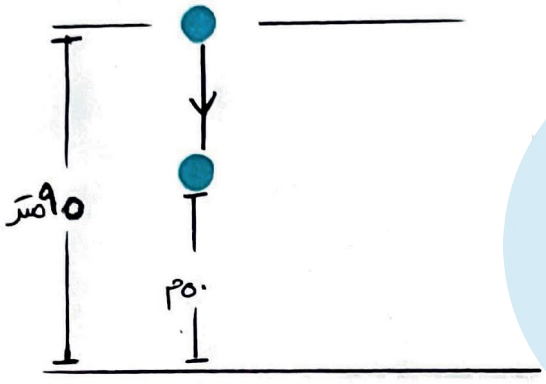
ن² − ١٢ن − ٤٥ = ٠

(ن + ٣)(ن − ١٥) = ٠

إما ن + ٣ = ٠ ✗ أو ن − ١٥ = ٠ ⇐ ن = ١٥ث

ع(١٥) = ٦٠ − ١٥٠ = −٩٠م/ث

• خارجي/ أسقط جسم من ارتفاع (٩٥م) سقوطاً حراً، وصح أن المسافة المقطوعة بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة ف(ن) = ٥ن² حيث سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٥٠م عن سطح الأرض



الحل/ عندما يكون الجسم على ارتفاع ٥٠ عن الأرض

- تكون المسافة المقطوعة = ٩٥ - ٥٠ = ٤٥م

ف(ن) = ٤٥ = ٥ن² ⇐ ن² = ٩ ⇐ ن = ٣

ع = ف/ن = ١٠ن

ع(٣) = ١٠ × ٣ = ٣٠م/ث

عز المرء تقواه

أ.مي حواري

الدرس السادس | قاعدة السلسلة

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2007 / إذا كان ص = ع² + ١ ، ع = ٢س − ٣ ، ما قيمة $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢}$

أ/ ٢ ب/ ٤ ج/ ٥ د/ ٨

الحل/ ص = ع² + ١ ، ع = ٢س − ٣

$\frac{دص}{دع} = ٢ع$ ، $\frac{دع}{دس} = ٢$

عندما س = ٢ ⇐ ع = ٢×٢ − ٣ ⇐ ع = ١

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = ٢ع \times ٢ \Big|_{ع=١} = ٤$

طريقة (٢):

ص = ع² + ١

ص = (٢س − ٣)² + ١

$\frac{دص}{دس} = ٢(٢س-٣) \times ٢ \Big|_{س=٢}$

= ٢×(٤ − ٣)×٢

= ٤

أ.مي حواري

• 2008 / إذا كان ق(س) = جا(س) ، هـ(س) = ٢جتاس فإن $(ق \circ هـ)'(\frac{\pi}{٢})$

أ/ −٢ ب/ −١ ج/ ١ د/ ٢

الحل/ ق(س) = جاس

هـ(س) = ٢جتاس ⇐ هـ(π/٢) = ٢جتا(π/٢) = ٠

ق'(س) = جتاس ⇐ ق'(٠) = جتا(٠) = ١

هـ'(س) = −٢جاس ⇐ هـ'(π/٢) = −٢جا(π/٢) = −٢

$(ق \circ هـ)'(\frac{\pi}{٢}) = ق'(هـ(\frac{\pi}{٢}))\, هـ'(\frac{\pi}{٢})$

= ق'(٠) × −٢ = ١ × −٢ = −٢

• 2009 / إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، هـ(س) = ٢س² − ١ فإن $(ق \circ هـ)'(١)$

أ/ −٤ ب/ −١ ج/ ١ د/ ٤

الحل/ ق(س) = $\frac{١}{س}$

هـ(س) = ٢س² − ١ ⇐ هـ(١) = ٢(١)² − ١ = ٢ − ١ = ١

ق'(س) = $\frac{-١}{س^٢}$

هـ'(س) = ٤س ⇐ هـ'(١) = ٤(١) = ٤

$(ق \circ هـ)'(١) = ق'(هـ(١))\, هـ'(١) = ق'(١) \times ٤$

= −١ × ٤ = −٤

• 2010 / إذا كان ق(س) = جتا(٢س) ، فإن ق''(س) + ٥ق(س)

أ/ جتا(٢س) ب/ ٩جتا(٢س) ج/ −٩جتا(٢س) د/ −جتا(٢س)

الحل/ ق(س) = جتا(٢س) ⇐ ق'(س) = −٢جا(٢س) ⇐ ق''(س) = −٤جتا(٢س)

ق''(س) + ٥ق(س) = −٤جتا(٢س) + ٥جتا(٢س) = جتا(٢س) = ق(س)

• 2010 + 2013 / إذا كان ق(س) = ٢س² + س − ١ ، هـ(س) = $\sqrt{س}$ فإن $(ق \circ هـ)'(\frac{١}{٤})$

أ/ $\frac{١}{٢}$ ب/ ٣ ج/ −٣ د/ $-\frac{١}{٢}$

الحل/ ق(س) = ٢س² + س − ١

ق'(س) = ٤س + ١

هـ(س) = $\sqrt{س}$ ⇐ هـ(١/٤) = $\sqrt{\frac{١}{٤}} = \frac{١}{٢}$

هـ'(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$(\text{ق}\circ\text{هـ})'(\frac{1}{4}) = \text{ق}'(\text{هـ}(\frac{1}{4}))\,\text{هـ}'(\frac{1}{4}) = \text{ق}'(2)\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = (4\times\frac{1}{2}+1)\times\frac{1}{2\times\frac{1}{2}} = 2+1 = 3$

• 2011/ إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق وكان ق(س³+1) − س = ٠ ، ما قيمة ق'(9)

أ/ $\frac{1}{12}$ ب/ 1 ج/ صفر د/ 33

الحل/ $\text{س}^3+1=9 \Leftarrow \text{س}^3=8 \Leftarrow \text{س}=2$

$\text{ق}(\text{س}^3+1)-\text{س}=0$ نشتق $\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}^3+1)\times 3\text{س}^2-1=0$ ، $\text{س}=2$

$\text{ق}'(8+1)\times 3\times 4-1=0 \Leftarrow \text{ق}'(9)\times\frac{12}{12}=\frac{1}{12} \Leftarrow \text{ق}'(9)=\frac{1}{12}$

• 2012/ اذا كان ق(س) = س² فإن (ق∘ق')'(1)

أ/ 2 ب/ 4 ج/ 6 د/ 8

الحل/ $\text{ق}(\text{س})=\text{س}^2 \Leftarrow \text{ق}'(\text{س})=2\text{س} \Leftarrow \text{ق}''(\text{س})=2$

$(\text{ق}\circ\text{ق}')'(1) = \text{ق}'(\text{ق}'(1))\,\text{ق}''(1) = \text{ق}'(2)\times 2 = 2\times 2\times 2 = 8$

• 2013/ اذا كان ص = قتا(2س) ، ما قيمة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

أ/ قتا(2س) ظتا(2س) ب/ −2 قتا(2س) ظتا(2س) ج/ − قتا(2س) ظتا(2س)

د/ 2 ظتا²(2س)

أ.مي

الحل/ $\text{ص}=\text{قتا}(2\text{س}) \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -2\,\text{قتا}(2\text{س})\,\text{ظتا}(2\text{س})$

• 2013 إكمال/ إذا كان ق(س) = أهـ(√س) وكان هـ'(3) = 2 ، ق'(9) = $\frac{2}{3}$ ، ما قيمة الثابت أ

أ/ 2 ب/ $\frac{4}{3}$ ج/ 1 د/ $\frac{1}{3}$

الحل/ $\text{ق}'(\text{س}) = \text{أهـ}'(\sqrt{\text{س}})\times\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} \Leftarrow \text{ق}'(9) = \text{أهـ}'(\sqrt{9})\times\frac{1}{2\sqrt{9}}$

$\Leftarrow \frac{2}{3} = \frac{\text{أهـ}'(3)}{2\times 3} \Leftarrow 2 = \frac{\text{أ}\times 2}{2} \Leftarrow 2=\text{أ}$

• 2014/ إذا كان (ق∘هـ)'(2) = 27 ، ق(س) = س² − 5س ، هـ'(2) = 3 ، ما قيمة هـ(2)

أ/ 21 ب/ 16 ج/ 9 د/ 7

الحل/ $\text{ق}(\text{س})=\text{س}^2-5\text{س} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س})=2\text{س}-5 \Leftarrow \text{ق}'(\text{هـ}(2))=2\text{هـ}(2)-5$

$(\text{ق}\circ\text{هـ})'(2) = \text{ق}'(\text{هـ}(2))\,\text{هـ}'(2) \Leftarrow 27 = (2\text{هـ}(2)-5)\times\frac{3}{3} = \frac{27}{3}$

$\Leftarrow 2\text{هـ}(2)-5=9 \Leftarrow 2\text{هـ}(2)=14 \Leftarrow \text{هـ}(2)=7$

• 2015 إكمال/ إذا كان ق(س³−1) = س²+1 ، ما قيمة ق'(7)

أ/ $\frac{2}{21}$ ب/ $\frac{1}{3}$ ج/ 4 د/ 14

الحل/ $\text{س}^3-1=7 \Leftarrow \text{س}^3=8 \Leftarrow \text{س}=2$

$\text{ق}'(\text{س}^3-1)\times 3\text{س}^2 = 2\text{س}\,\Big|_{\text{س}=2} \Leftarrow \text{ق}'(7)\times 3\times 4 = 4 \Leftarrow \text{ق}'(7)=\frac{1}{3}$

• 2016/ إذا كانت $ص = جاس - \frac{1}{3}جا^3(س)$ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$

أ/ $قبا^2س$ ب/ $قبا^3س$ ج/ $جا^3س$ د/ $-قبا^3س$.

الحل/ $ص = جاس - \frac{1}{3}جا^3س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = قباس - جا^2س \times قباس$

$\frac{دص}{دس} = قباس(1 - جا^2س)$

$= قباس \times قبا^2س = قبا^3س$

$جا^2س + قبا^2س = 1$

$\Leftarrow قبا^2س = 1 - جا^2س$

• 2016/ إذا كان $(ق \circ هـ)'(3) = 8$ وكان $(قَ \circ هـ)(3) = 2$ ، ما قيمة $هـَ(3)$

أ/ 2 ب/ 4 ج/ 8 د/ 16

الحل/ * $(قَ \circ هـ)(3) = قَ(هـ(3)) = 2$

* $(ق \circ هـ)'(3) = قَ(هـ(3)) \times هـَ(3) = 8$

$2هـَ(3) = 8 \Leftarrow هـَ(3) = 4$

أ.مي حواري

• 2016/ اذا كان $ق(س) = \frac{1}{س^2 - 6س + 9}$ ، فإن $قً(س)$

أ/ $-ق^2(س)$ ب/ $6ق(س)$ ج/ $6ق^2(س)$ د/ $ق^2(س)$

الحل/ $ق(س) = \frac{1}{س^2 - 6س + 9} = \frac{1}{(س-3)^2} = (س-3)^{-2}$

$\Leftarrow ق(س) = (س-3)^{-2} \Leftarrow قَ(س) = -2(س-3)^{-3} \Leftarrow قً(س) = 6(س-3)^{-4} = 6\left((س-3)^{-2}\right)^2$

$\Leftarrow قً(س) = 6ق^2(س)$.

• 2016 إكمال/ إذا كان $ص = قا^2(س)$ فإن $\frac{دص}{دس} =$

أ/ $2قاس ظاس$ ب/ $2قاس ظا^2س$ ج/ $2قا^2س ظاس$ د/ $2ظا(س)$

الحل/ $ص = (قاس)^2 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 2(قاس) \times قاس ظاس = 2قا^2س ظاس$

• 2016 إكمال/ إذا كان $ق(س) = \sqrt{2س + 10}$ ، $هـ(س) = 9 - 3س$ ، $(ق \circ هـ)'(2)$

أ/ $\frac{-3}{2}$ ب/ -6 ج/ $\frac{3}{4}$ د/ $\frac{-3}{4}$

الحل/ $ق(س) = \sqrt{2س + 10}$

$قَ(س) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2س + 10}}$

$هـ(س) = 9 - 3س \Leftarrow هـ(2) = 9 - 6 = 3$

$هـَ(س) = -3$

$(ق \circ هـ)'(2) = قَ(هـ(2))\, هـَ(2) = قَ(3) \times -3 = \frac{1}{\sqrt{2 \times 3 + 10}} \times -3 = \frac{-3}{\sqrt{16}} = \frac{-3}{4}$

• 2017 دور أول/ اذا كان $ص = ع^2 + 8ع$ ، $ع س = 5 + س$ ، ما قيمة $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=1}$

أ/ -50 ب/ -100 ج/ -2 د/ 100

الحل/ $ص = ع^2 + 8ع$

$\frac{دص}{دع} = 2ع + 8$

نقسم الطرفين على س

$ع س = 5 + س \Leftarrow ع = \frac{5}{س} + 1$

$\frac{دع}{دس} = \frac{-5}{س^2}$

عندما (س = ١) ⇐ ع = $\frac{٥}{١}$ + ١ ⇐ ع = ٦

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = (٢ع + ٨) \times \frac{-٥}{س^٢} \Big|_{\substack{س=١ \\ ع=٦}} = (٢\times٦+٨)\times -٥ = ٢٠ \times -٥ = -١٠٠$

• 2018 دور أول / إذا كان ق(س^٣ − ٢) = ٣س^٤ − ٢ ، س ≠ ٠ فإن قَ(−١)

أ/ ١٢ ب/ ٤ ج/ −٤ د/ −١٢

الحل/ ق(س^٣ − ٢) = ٣س^٤ − ٢ عندما س^٣ − ٢ = −١ ⇐ س^٣ = ١ ⇐ س = ١

(قَ(س^٣ − ٢) × ~~٣~~س^٢ = ~~٣~~ × ٤س^٣) ÷ س^٢ ، س ≠ ٠

قَ(س^٣ − ٢) = ٤س $\Big|_{س=١}$

قَ(−١) = ٤

أ.مي حواري

• 2018 دور أول / إذا كان ق(س) = $\frac{٤}{هـ(س^٢ - ٣)}$ ، هـ(١) = ٢ ، هـَ(١) = ٥

ما قيمة قَ(٢)

أ/ −٤ ب/ ٢٠ ج/ −١٠ د/ −٢٠

الحل/ ق(س) = $\frac{٤}{هـ(س^٢ - ٣)}$ ⇐ قَ(س) = $\frac{-٤ \times هـَ(س^٢ - ٣) \times ٢س}{هـ^٢(س^٢ - ٣)}$ ⇐ قَ(٢) = $\frac{-٤ هـَ(١) \times ٢ \times ٢}{هـ^٢(١)}$

⇐ قَ(٢) = $\frac{-٤ \times ٥ \times ٤}{٤}$ = −٢٠

• 2018 دور أول / إذا كانت ص = ع^٢ + ٥ ، ع = $\frac{٢س - ١}{س}$ فإن $\frac{دص}{دس}$ عندما (ع = ٣)

أ/ −٦ ب/ −٤ ج/ ٤ د/ ٦

الحل/ ص = ع^٢ + ٥ ع = $\frac{٢س - ١}{س}$ ⇐ ع = ٢ − $\frac{١}{س}$

$\frac{دص}{دع}$ = ٢ع $\frac{دع}{دس}$ = $\frac{١}{س^٢}$

عندما ع = ٣ ⇐ ٣ = ٢ − $\frac{١}{س}$ ⇐ ١ = $\frac{-١}{س}$ ⇐ س = −١

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = ٢ع \times \frac{١}{س^٢} \Big|_{\substack{ع=٣ \\ س=-١}} = ٢ \times ٣ \times ١ = ٦$

• 2019 دور أول / لتكن قَ(س) = $\frac{١}{١ - س^٢}$ ، هـ(س) = جاس ما قيمة (ق∘هـ)َ(س)

أ/ ١ ب/ قاس ج/ جتاس د/ قتاس

الحل/ هـ(س) = جاس ⇐ هـَ(س) = جتاس

(ق∘هـ)َ(س) = قَ(هـ(س)) هـَ(س) = قَ(جاس) × جتاس

= $\frac{١}{١ - جا^٢س}$ × جتاس = $\frac{جتاس}{جتا^٢س}$ = $\frac{١}{جتاس}$ = قاس .

• 2019 دور أول / اذا علمت ص = ع^٢ ، ع = جاس + جتاس ، ما قيمة $\frac{دص}{دس}$

أ/ ٢جتا(٢س) ب/ ٢جا(٢س) ج/ −٢جتا(٢س) د/ ٠

الحل/ $ص = ع^2 = (جاس + جتاس)^2$

$ص = (جا^2س + جتا^2س + 2جاس جتاس)$

$ص = (1 + جا(2س))$

$\frac{دص}{دس} = 2جتا(2س)$

طريقة (2)/ $ص = ع^2$ ، $ع = جاس + جتاس$

$\frac{دص}{دع} = 2ع$ ، $\frac{دع}{دس} = جتاس - جاس$.

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = 2ع \times (جتاس - جاس)$

$= 2(جتاس + جاس)(جتاس - جاس)$

$= 2(جتا^2س - جا^2س) = 2جتا(2س)$

• 2019 دور أول/ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س^2 + 3س} & ، س \geq 1 \\ 5س - 3 & ، س < 1 \end{cases}$ ، ما قيمة $ق'(1)$

أ/ 5 ب/ $\frac{5}{4}$ ج/ صفر د/ غير موجودة

الحل/ عند (س = 1) نقطة دخول ⇐ نبحث في الاتصال أولاً :

$\lim_{س \to 1^+} \sqrt{س^2 + 3س} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2 = ق(1)$

$\lim_{س \to 1^-} (5س - 3) = 5 - 3 = 2$

⇐ ق(س) متصل عند (س = 1)

$ق'(1)^- = (5س - 3)'\Big|_{س=1} = 5 \neq ق'(1)^+ = (\sqrt{س^2 + 3س})' = \frac{2س + 3}{2\sqrt{س^2 + 3س}}\Big|_{س=1} = \frac{5}{2 \times 2} = \frac{5}{4}$

$ق'(1)^+ = ق'(1)^-$ ⇐ $ق'(1)$ غ.م

• 2019 دور ثاني/ إذا كان $ص = (جاس + جتاس)^2$ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$:

أ/ جا(2س) ب/ 2جتا(2س) ج/ -2جتا(2س) د/ جتا(2س)

الحل/ $ص = (جاس + جتاس)^2$

$ص = جا^2س + جتا^2س + 2جاس جتاس$

$ص = 1 + جا(2س)$

$ص' = 2جتا(2س)$

طريقة (2)/

$ص = (جاس + جتاس)^2 \Leftarrow ص' = 2(جاس + جتاس)(جتاس - جاس)$

$\Leftarrow ص' = 2(جتا^2س - جا^2س)$

$ص' = 2جتا(2س)$

• 2020 دور أول/ إذا كان $ق(س) = [2س + 6و1](5س - 1)^2$ ، ما قيمة $ق'(2و)$

أ/ صفر ب/ 2 ج/ 10 د/ غير موجودة

الحل/ * $[2س + 6و1] = \begin{cases} 0 & ، -8و \leq س < -3و \\ 1 & ، -3و \leq س < 2و \\ 2 & ، 2و \leq س < 7و \end{cases}$

$ل = \frac{1}{2} = 5و$

$2س + 1,6 = 0 \Leftarrow س = -8و$

$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} (5س - 1)^2 & ، -3و \leq س < 2و \\ 2(5س - 1)^2 & ، 2و \leq س < 7و \end{cases}$

نبحث في الاتصال عند (س = 2و)

$\lim_{س \to 2و^+} 2(5س - 1)^2 = 2(5 \times 2و - 1)^2 = ق(2و) = صفر$

$\lim_{س \to 2و^-} (5س - 1)^2 = (5 \times 2و - 1)^2 = 0$

أ.مي حواري

أ.مي حواري

ق(س) متصل عند (س = ٢٠)

$$ق(س) = \begin{cases} ٣(٥س-١)^{٢} \times ٥ & ، -٣ \int_{٢٠}^{س} د س \\ ٤(٥س-١) \times ٥ & ، ٢٠ \int_{٢٠}^{س} د س \end{cases}$$

$$ق(٢٠^{+}) = ٣٠(٥ \times ٢٠ - ١) = ٣٠ \times ٢٠ = ٦٠٠$$

$$ق(٢٠^{-}) = ١٠(٥ \times ٢٠ - ١) = ١٠ \times ١٠ = ١٠٠$$

$$\leftarrow ق(٢٠^{+}) = ق(٢٠^{-}) = ٦٠٠$$

$$\leftarrow ق(٢٠) = ٦٠٠$$

• 2020 دور أول/ إذا كان $ص = هـ^{٣س}$ و كان $ص'' + ٣ص' = ١٠ص$ و ما قيمة الثابت $ب$

أ/ $٢هـ^{٥}$ ب/ $-٥هـ^{٥}$ ج/ $٢هـ^{-٥}$ د/ $-٥هـ^{-٥}$

الحل/ $ص = هـ^{٣س} \leftarrow ص' = ٣هـ^{٣س} \leftarrow ص'' = ٩هـ^{٣س}$

$$\therefore ٩هـ^{٣س} + ٣(٣هـ^{٣س}) - ١٠هـ^{٣س} = ٠$$

$$\leftarrow [هـ^{٣س}(٩ + ٩ - ١٠) = ٠] \div هـ^{٣س} \neq ٠ \quad \forall س$$

$$\therefore ٩ + ٩ - ١٠ = ٠ \leftarrow (ب - ٢)(ب + ٥) = ٠$$

إما $(ب - ٢) = ٠ \leftarrow ب = ٢$ أو $ب + ٥ = ٠ \leftarrow ب = -٥ \leftarrow ب = \{٢، -٥\}$

• 2020 دور أول/ إذا كان $ص = ظا(٢س)$ و $س = ٠$ فإن أوجد $\frac{ص}{س}$

أ/ -٤ جاس ب/ ٤ جاس ج/ $-٤س$ د/ $٤س$

الحل/ $ص = ظا(٢س) \leftarrow ص = ١ - ٢س^{٢}$

$$\frac{ص}{س} = -٢ \times ٢س = -٤س$$

• 2020 دور أول/ إذا كان $س^{٣} - سص + ص^{٢} = ٣$ و ما قيمة $\frac{ص}{س}$ عند $(١، -١)$

أ/ -٢ ب/ -١ ج/ ١ د/ ٢

الحل/ $س^{٣} - سص + ص^{٢} = ٣$ نشتق بالنسبة لـ س (درس الاشتقاق الضمني)

$$٣س^{٢} - س\frac{ص}{س} - ص + ٢ص\frac{ص}{س} = ٠ \quad ...(١، -١)$$

$$٣ - \frac{ص}{س} + ١ - ٢\frac{ص}{س} = ٠$$

$$(١ + ٢)\frac{ص}{س} + ٢\frac{ص}{س} = ٣ \leftarrow ٣\frac{ص}{س} = ٣ \leftarrow \frac{ص}{س} = ١$$

• 2020 دور أول/ إذا كان $ق(س) = س^{٣}$ و $هـ(س) = \frac{ب}{٣س - ١}$ و $س \neq \frac{١}{٣}$ و $ب \neq ٠$

وكان $(ق \circ هـ)'(١) = -٤٨$ و ما قيمة الثابت $ب$

أ/ ٢ ب/ ٤ ج/ ٨ د/ ١٦

الحل/ $ق(س) = س^{٣}$

$ق'(س) = ٣س^{٢}$

$ق''(س) = ٦س$

$$هـ(س) = \frac{ب}{٣س - ١} \leftarrow هـ(١) = \frac{ب}{٢} = ب$$

$$هـ'(س) = \frac{-٣ب}{(٣س-١)^{٢}} \leftarrow هـ'(١) = \frac{-٣ب}{(٢)^{٢}} = -٣ب$$

$$(ق \circ هـ)'(١) = ق'(هـ(١)) \, هـ'(١) = -٤٨$$

$$ق'(ب) \times -٣ب = -٤٨ \leftarrow ٦ب \times -٣ب = -٤٨$$

$\frac{-١٢ب^٢}{-١٢} = \frac{-٤٨}{-١٢} \Leftarrow ب^٢ = ٤ \Leftarrow ب = ٢$ ، $ب = -٢ \times ب > ٠$

$\Leftarrow ب = \{٢\}$

• 2020 دور ثاني / إذا كان $ق(س) = هـ^{جا(٢س)} + لو_{هـ}(٢ + ظاس) + جا(\pi)$ ، ما قيمة $قَ(٠)$

أ/ $\frac{٥}{٢}$ ب/ $\frac{٣}{٢}$ جـ/ $\frac{-٣}{٢}$ د/ $\frac{١}{٢}$

الحل/ $ق(س) = هـ^{جا(٢س)} + لو_{هـ}(٢ + ظاس) + ٠$

$قَ(س) = هـ^{جا(٢س)} \times ٢جتا(٢س) + \frac{قا^٢س}{٢ + ظاس}$

$قَ(٠) = ٢جتا(٠)هـ^{جا(٠)} + \frac{قا^٢(٠)}{٢ + ظا(٠)} = ٢(١)هـ^{٠} + \frac{١}{٢ + ٠} = ٢ \times ١ + \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢}$

أ.مي حواري

• 2020 دور ثاني / اذا كان $ق(س) = س^٣ - س$ ، ما قيمة $(ق \circ قَ)'(١)$

أ/ ١١ ب/ ٦٦ جـ/ ٦ د/ ١٢

الحل/ $ق(س) = س^٣ - س \Leftarrow قَ(س) = ٣س^٢ - ١ \Leftarrow قً(س) = ٦س$

$(ق \circ قَ)'(١) = قَ(قَ(١))قً(١)$

$= قَ(٢) \times ٦ = (٣ \times ٤ - ١) \times ٦ = ١١ \times ٦ = ٦٦$

• 2020 دور ثاني / اذا كان $ص = ٣\sqrt{ع}$ ، $ع = ٢س - ١$ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما $(س = ٥)$

أ/ ١ ب/ ٢ جـ/ $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$ د/ $\frac{١}{٣}$

الحل/ $ص = ٣\sqrt{ع} = ٣\sqrt{٢س - ١}$

$\frac{دص}{دس} = ٣ \times \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٢س - ١}}$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٥} = \frac{٣}{\sqrt{١٠ - ١}} = \frac{٣}{٣} = ١$

طريقة (٢):

$ص = ٣\sqrt{ع}$ $ع = ٢س - ١$

$\frac{دص}{دع} = \frac{٣}{٢\sqrt{ع}}$ $\frac{دع}{دس} = ٢$

عندما $س = ٥ \Leftarrow ع = ٢ \times ٥ - ١ = ١٠ - ١ = ٩$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \frac{٣}{\cancel{٢}\sqrt{ع}} \times \cancel{٢}\Big|_{ع=٩} = \frac{٣}{\sqrt{٩}} = \frac{٣}{٣} = ١$

• 2020 دور ثاني / إذا كان $ق(س)$ يمر بـ النقطة $(-١ ، ٣)$ ، وكان $قَ(-١) = -٦$

ما قيمة $\lim_{س \to -٢} \frac{ق(س^٢ + ٢س - ١) - ق(-١)}{س^٢ - ٤}$

أ/ ٣ ب/ -٣ جـ/ $\frac{٣}{٢}$ د/ غ م

الحل/ ق يمر بـ $(-١ ، ٣) \Leftarrow ق(-١) = ٣$

$\lim_{س \to -٢} \frac{ق(س^٢ + ٢س - ١) - ق(-١)}{س^٢ - ٤} = \frac{ق(٤ - ٤ - ١) - ق(-١)}{٤ - ٤} = \frac{ق(-١) - ق(-١)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

$\Leftarrow$ باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to -٢} \frac{قَ(س^٢ + ٢س - ١)(٢س + ٢)}{٢س} = \frac{قَ(٤ - ٤ - ١)(-٤ + ٢)}{٢ \times -٢} = \frac{قَ(-١) \times \cancel{-٢}}{\cancel{٢} \times -٢} = \frac{٦}{-٢} = -٣$

• 2020 دور ثاني / إذا كان $هـ^{جا(٣س)} = ٢ص + س + ١$ ، ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة (٠، ٠)

أ/ -١ ب/ ١ جـ/ صفر د/ ٢

الحل/ $هـ^{جا(٣س)} = ٢ص + س + ١$ نشتق بالنسبة لـ س

$هـ^{جا(٣س)} \times ٣ جتا(٣س) = ٢ص' + ١$ (٠، ٠)

$هـ^{جا(٠)} \times ٣ \times جتا(٠) = ٢ص' + ١$

$هـ^{٠} \times ٣ \times ١ = ٢ص' + ١ \Leftarrow ٣ = ٢ص' + ١ \Leftarrow ٢ = ٢ص' \Leftarrow ١ = ص'$

• 2020 دور ثاني / إذا كان $ق(س) = جا(٤س) \times ظا(٢س)$ ما قيمة $ق'(س)$

أ/ ٤ جتا(٤س) ب/ ٨ جتا(٤س) $قا^٢(٤س)$ جـ/ -٤ جتا(٤س) د/ ٤ جا(٤س)

الحل/ $ق(س) = جا(٤س) \times ظا(٢س) = ٢ جا(٢س) \cancel{جتا(٢س)} \times \frac{جا(٢س)}{\cancel{جتا(٢س)}}$

$\Leftarrow ق(س) = ٢ جا^٢(٢س)$

$ق'(س) = ٢ \times ٢ جا(٢س) \times جتا(٢س) \times ٢ = ٢ \times جا(٤س) \times ٢ = ٤ جا(٤س)$

• 2020 دور ثاني / إذا كان المستقيم $ص + ٣س = ١$ عمودياً على منحنى ق(س) عند (س = ١) ما قيمة $(ق^٣)'(١)$

أ/ -٣٦ ب/ ٣٦ جـ/ ٤ د/ -٤

الحل/ $ص + ٣س = ١ \Leftarrow (١، ق(١)) \in$ للعمودي

$ق(١) + ٣ = ١ \Leftarrow ق(١) = -٢$

$ص + ٣س = ١ \Leftarrow ص' + ٣ = ٠ \Leftarrow ص' = -٣ =$ ميل العمودي $\Leftarrow \frac{١}{٣} =$ ميل المماس

$\Leftarrow \frac{١}{٣} = ق'(١)$

المطلوب/ $(ق^٣)'(١) = ٣ق^٢(١) ق'(١) = \cancel{٣}(-٢)^٢ \times \frac{١}{\cancel{٣}} = ٤$

• 2021 دور ثاني / إذا علمت أن $ص = ع^٢$ ، $ع = جاس - جتاس$ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$

أ/ -٢ جتا(٢س) ب/ ٢ جا(٢س) جـ/ ٢ جتا(٢س) د/ صفر

الحل/ $ص = ع^٢ = (جاس - جتاس)^٢$

$ص = جا^٢س + جتا^٢س - ٢ جاس جتاس$

$ص = ١ - جا(٢س)$

$\frac{دص}{دس} = -٢ جتا(٢س)$

طريقة (٢)/

$ص = ع^٢$ $ع = جاس - جتاس$

$\frac{دص}{دع} = ٢ع$ $\frac{دع}{دس} = جتاس + جاس$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = ٢ع(جتاس + جاس)$

$= ٢(جاس - جتاس)(جاس + جتاس)$

$= ٢(جا^٢س - جتا^٢س) = ٢ \times -جتا(٢س) = -٢ جتا(٢س)$

أ.مي حواري

• 2021 دور أول / إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا(٢س)}{(١-ب)س} = ٤$ ، ما قيمة الثابت ب

أ/ $-\frac{١}{٢}$ ب/ $\frac{١}{٤}$ جـ/ $\frac{١}{٢}$ د/ $\frac{٣}{٤}$

الحل/ $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا(٢س)}{س(١-ب)} = \frac{ظا(٠)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

⇐ باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٠} \frac{قا^٢(٢س) \times ٢}{(١-ب)} = \frac{قا^٢(٠) \times ٢}{١-ب} = ٤ \Leftarrow \frac{٢}{١-ب} = ٤$

$\Leftarrow \frac{٤}{٤}(١-ب) = \frac{٢}{٤} \Leftarrow ١-ب = \frac{١}{٢} \Leftarrow ١-\frac{١}{٢} = ب \Leftarrow \frac{١}{٢} = ب$

• 2021 دور أول/ إذا كان $ق^٢(٢س-١) = ٢س^٢ - ٢$ وكان $ق(٥) = ٤$ ، ما قيمة $قَ(٥)$

أ/ $\frac{٤}{٣}$ ب/ $\frac{٣}{٤}$ ج/ ٥ د/ $\frac{٢}{٣}$

الحل/ $٢س - ١ = ٥ \Leftarrow ٢س = ٦ \Leftarrow س = ٣$

$ق^٢(٢س-١) = ٢س^٢ - ٢ \Leftarrow ٢ق(٢س-١)\, قَ(٢س-١) \times ٢ = ٢ \times ٢س \Big|_{س=٣}$

$\cancel{٤}\, ق(٥)\, قَ(٥) = \cancel{٤} \times ٣ \Leftarrow ٤قَ(٥) = ٣ \Leftarrow قَ(٥) = \frac{٣}{٤}$

• 2021 دور ثاني/ ما قيمة $\lim_{س \to ١} \frac{قَ(٢س) - قَ(٢)}{س-١}$ ، علماً بأن $قَ(٢) = ٢قً(٢) = ٦$

أ/ ١٢ ب/ ٦ ج/ ٣ د/ ٢

الحل/ $\lim_{س \to ١} \frac{قَ(٢س) - قَ(٢)}{س-١} = \frac{قَ(٢) - قَ(٢)}{١-١} = \frac{٠}{٠}$

أ.مي حواري

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ١} \frac{قً(٢س) \times ٢}{١} = ٢قً(٢) = ٦$

• 2021 دور ثالث/ ما قيمة $\lim_{س \to ٠} \frac{جتاس - ١}{جا^٢س}$

أ/ -٥ و ب/ ٥ و ج/ صفر د/ عزم

الحل/ $\lim_{س \to ٠} \frac{جتاس - ١}{جا^٢س} = \frac{جتا(٠) - ١}{جا^٢(٠)} = \frac{١-١}{(٠)^٢} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٠} \frac{-\cancel{جاس}}{٢\cancel{جاس}\, جتاس} = \frac{-١}{٢جتا(٠)} = \frac{-١}{٢} = -٥$ و

• 2022 دور أول/ إذا كان $ق(س) = جتا^٣(٢س)$ ، ما قيمة $قَ(س)$

أ/ $-٣جتا^٢(٢س)\, جا(٢س)$ ب/ $-٣جتا^٢س\, جاس$ ج/ $-٦جتا^٢(٢س)\, جا(٢س)$

د/ $-٦جتا^٢س\, جاس$

الحل/ $قَ(س) = ٣جتا^٢(٢س) \times -جا(٢س) \times ٢ = -٦جتا^٢(٢س)\, جا(٢س)$

• 2023 دور ثاني/ إذا كان $قَ(س) = س^٣ + ٧$ ، $هـ(س) = \sqrt[٣]{س+٧}$ ما قيمة $(ق \circ هـ)'(١)$

أ/ $\frac{٣}{٢}$ ب/ $\frac{٢}{٣}$ ج/ $\frac{-١}{٣}$ د/ $\frac{٥}{٤}$

الحل/ $هـ(س) = (س+٧)^{\frac{١}{٣}} \Leftarrow هـَ(س) = \frac{١}{٣}(س+٧)^{-\frac{٢}{٣}} \Leftarrow هـَ(١) = \frac{١}{٣}(٨)^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٣} \times (٢)^{\cancel{٣} \times \frac{-٢}{\cancel{٣}}} = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤}$

$\Leftarrow هـَ(١) = \frac{١}{١٢}$

$(\text{ق}\circ\text{هـ})'(1) = \text{ق}'(\text{هـ}(1))\,\text{هـ}'(1) = \text{ق}'(2)\times\frac{1}{12} = (2^2+7)\times\frac{1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

• 2023 دور ثاني/ اذا كان $\text{ص} = \text{ع}^3+1$ ، $\text{ع}^2 = \text{س}+3$ ، ما قيمة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{ع}=2$

أ/ 12 ب/ 6 ج/ 4 د/ 3

الحل/ $\text{ص} = \text{ع}^3+1$ ، $\text{ع}^2 = \text{س}+3 \Leftarrow \text{ع}^2-3 = \text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = 3\text{ع}^2$ ، $2\text{ع} = \frac{\text{دس}}{\text{دع}} \Leftarrow \frac{1}{2\text{ع}} = \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}}\times\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = 3\text{ع}^2\times\frac{1}{2\text{ع}} = \frac{3}{2}\text{ع}\Big|_{\text{ع}=2} = \frac{3}{\cancel{2}}\times\cancel{2} = 3$

• 2023 دور أول/ إذا كان $\text{ق}(2\text{س}) = \text{س}\,\text{هـ}(3\text{س}-2)$ وكان $\text{ق}(4) = 24$ ، $\text{هـ}'(4) = 4$ ما قيمة $\text{ق}'(4)$:

أ/ 36 ب/ 20 ج/ 18 د/ 10

الحل/ $2\text{س} = 4 \Leftarrow \text{س} = 2$

$\text{ق}(2\text{س}) = \text{س}\,\text{هـ}(3\text{س}-2)\Big|_{\text{س}=2} \Leftarrow \text{ق}(4) = 2\text{هـ}(4) \Leftarrow 24 = 2\text{هـ}(4) \Leftarrow 12 = \text{هـ}(4)$

$*\ \text{ق}(2\text{س}) = \text{س}\,\text{هـ}(3\text{س}-2)$ نشتق

$\text{ق}'(2\text{س})\times 2 = \text{س}\,\text{هـ}'(3\text{س}-2)\times 3 + \text{هـ}(3\text{س}-2)\Big|_{\text{س}=2}$

$2\text{ق}'(4) = 2\,\text{هـ}'(4)\times 3 + \text{هـ}(4)$

$2\text{ق}'(4) = 6\times 4 + 12 \Leftarrow 2\text{ق}'(4) = 36 \Leftarrow \text{ق}'(4) = 18$

أ.مي حواري

• 2023 دور ثالث/ إذا كان $\text{ص} = \text{ن}^2+5\text{ن}$ وكان $\frac{\text{دن}}{\text{دس}}\Big|_{\text{ن}=1} = 2$ ، ما قيمة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{ن}=1}$

أ/ 14 ب/ 12 ج/ -12 د/ -14

الحل/ $\text{ص} = \text{ن}^2+5\text{ن}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 2\text{ن}+5$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}}\times\frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

$= (2\text{ن}+5)\times 2\Big|_{\text{ن}=1}$

$= 7\times 2$

$= 14$

سلسلة.

طريقة (2) :

$\text{ص} = \text{ن}^2+5\text{ن}$ نشتق ضمنياً بالنسبة لـ س.

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (2\text{ن}+5)\times\frac{\text{دن}}{\text{دس}}\Big|_{\text{ن}=1}$

$= (2+5)\times\frac{\text{دن}}{\text{دس}}\Big|_{\text{ن}=1}$

$= 7\times 2$

$= 14$

ضمني

• 2023 دور ثاني/ ما قيمة $\lim_{\text{س}\to\text{هـ}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^2 - 2}{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}$

أ/ هـ ب/ $\frac{1}{\text{هـ}}$ ج/ 2 د/ 1

الحل/

$\lim_{\text{س}\to\text{هـ}} \frac{2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - 2}{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})} = \frac{2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} - 2}{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ})} = \frac{2-2}{\text{لو}_{\text{هـ}}(1)} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to هـ} \frac{\left(\frac{٢}{س}\right)}{\left(\frac{\frac{١}{س}}{\text{لو}_{هـ} س}\right)} = \frac{\frac{٢}{هـ}}{\left(\frac{\frac{١}{هـ}}{\text{لو}_{هـ} هـ}\right)} = \frac{\frac{٢}{هـ}}{\frac{١}{هـ}} = \frac{٢}{\cancel{هـ}} \times \frac{\cancel{هـ}}{١} = ٢$

• 2024 دور أول / إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق على ح ، وكان $ق^{٢}(س^{٣}+١) = ٢س$ ، ق(س) > ٠ ، ما قيمة قَ(٩)

أ/ $\frac{١}{٩}$ ب/ $\frac{١}{٦}$ جـ/ $\frac{١}{٢}$ د/ $\frac{١}{٢٤}$

الحل/ $س^{٣}+١ = ٩ \Leftarrow س^{٣} = ٨ \Leftarrow س = ٢$

$ق^{٢}(س^{٣}+١) = ٢س \Leftarrow ق^{٢}(٩) = ٢ \times ٢ \Leftarrow ق^{٢}(٩) = ٤ \Leftarrow ق(٩) = ٢$ ✓ ، $ق(٩) = -٢$ ✗

نشتق $\cancel{٢}ق(س^{٣}+١)\,قَ(س^{٣}+١) \times ٣س^{٢} = \cancel{٢}\Big|_{س=٢}$

$ق(٩)\,قَ(٩) \times ٣ \times ٤ = ١$

$٢\,قَ(٩) \times ١٢ = ١ \Leftarrow قَ(٩) = \frac{١}{٢٤}$

• 2024 دور ثاني / إذا كان $ع = س^{٢} - ٤س + ٣$ ، $س = \sqrt{٣ص^{٢}+٦}$ ما قيمة $\frac{دع}{دص}$ عندما ص = ١

أ/ ١ ب/ ٢ جـ/ ٤ د/ ٦

الحل/ $ع = س^{٢} - ٤س + ٣$ ، $س = \sqrt{٣ص^{٢}+٦}$

$\frac{دع}{دس} = ٢س - ٤$ ، $\frac{دس}{دص} = \frac{٣ \times \cancel{٢}ص}{\cancel{٢}\sqrt{٣ص^{٢}+٦}} = \frac{٣ص}{س}$

عندما ص = ١ ⇐ $س = \sqrt{٣+٦} = \sqrt{٩} = ٣$

$\frac{دع}{دص} = \frac{دع}{دس} \times \frac{دس}{دص} = (٢س - ٤) \times \frac{٣ص}{س}\Big|_{ص=١,\ س=٣} = (٢ \times ٣ - ٤) \times \frac{\cancel{٣}}{\cancel{٣}} = ٢$

• 2024 دور ثاني / إذا كان ق(س) = جا(٢س) ، ما قيمة قً(س) + ٢ق(س)

أ/ ٢جا(٢س) ب/ -٢جا(٢س) جـ/ ٢جتا(٢س) د/ -٢جتا(٢س)

الحل/ ق(س) = جا(٢س)

قَ(س) = ٢جتا(٢س) ⇐ قً(س) = -٤جا(٢س)

قً(س) + ٢ق(س) = -٤جا(٢س) + ٢جا(٢س) = -٢جا(٢س)

أ.مي حواري

• 2024 دور ثالث / إذا كان $ق(٢س+١) = ٦س^{٤} - ٦س^{٢}$ ، ما قيمة قَ(٣)

أ/ ٦ ب/ ١٢ جـ/ ٢٤ د/ ٥١

الحل/ $٢س + ١ = ٣ \Leftarrow ٢س = ٢ \Leftarrow س = ١$

$ق(٢س+١) = ٦س^{٤} - ٦س^{٢} \Leftarrow قَ(٢س+١) \times ٢ = ٦ \times ٤س^{٣} - ٦ \times ٢س\Big|_{س=١}$

$\Leftarrow ٢\,قَ(٣) = ٢٤ - ١٢ \Leftarrow ٢\,قَ(٣) = ١٢ \Leftarrow قَ(٣) = ٦$

• 2025 دور أول / اذا كان ل(س) = هـ^{ق(س − √س)} ، وكان ق(س) اقتران خطي يمر بنقطة الأصل وعمودي على المستقيم (ص = س) ، ما قيمة ل′(١)

أ/ $\frac{١}{٢}$ ب/ $\frac{هـ}{٢}$ جـ/ $\frac{-١}{٢}$ د/ −هـ

الحل/ ق(س) يمر بـ نقطة الأصل ⇐ ق(٠) = ٠

ق(س) = أس + ب ⇐ ق(٠) = ب = ٠

⇐ ق(س) = أس.

ق′(س) = أ ⇐ ق′(٠) = أ ، ص = س ⇐ ص′ = ١ = ميل العمودي

⇐ −١ = أ ⇐ ميل المماس = −١

ق(س) = −س ⇐ ق′(س) = −١ ⇐ ق′(٠) = −١

ل(س) = هـ^{ق(س − √س)} ⇐ ل′(س) = هـ^{ق(س − √س)} × ق′(س − √س)(١ − $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$)

ل′(١) = هـ^{ق(١−١)} × ق′(١−١) × (١ − $\frac{١}{٢}$)

= هـ^{ق(٠)} ق′(٠) × $\frac{١}{٢}$ = هـ^٠ × −١ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{-١}{٢}$

• 2025 دور أول / أوجد قيمة نها_{س ← ٢} $\frac{ق(س^٢) - س\,ق(٢)}{س^٣ - ٨}$ علماً بأن ق(٢) = −٢ ، ق(٤) = −٤ ، ق′(٤) = −١

أ/ $\frac{-٥}{١٢}$ ب/ $\frac{١}{١٢}$ جـ/ $\frac{-١}{٦}$ د/ $\frac{-١}{٣}$

الحل/ نها_{س ← ٢} $\frac{ق(س^٢) - س\,ق(٢)}{س^٣ - ٨}$ = $\frac{ق(٤) - ٢ق(٢)}{٢^٣ - ٨}$ = $\frac{-٤ - ٢ \times -٢}{٨ - ٨}$ = $\frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / نها_{س ← ٢} $\frac{ق′(س^٢) \times ٢س - ق(٢)}{٣س^٢}$ = $\frac{ق′(٤) \times ٤ - ق(٢)}{٣ \times ٤}$ = $\frac{-١ \times ٤ - -٢}{١٢}$ = $\frac{-٢}{١٢}$ = $\frac{-١}{٦}$

• 2025 دور أول / إذا كان ق(س^٣) = $\frac{١}{س}$ ما قيمة ق′(٨)

أ/ $\frac{-١}{٦٤}$ ب/ $\frac{١}{٦٤}$ جـ/ $\frac{-١}{٤٨}$ د/ $\frac{-١}{٣٢}$

الحل/ س^٣ = ٨ ⇐ س = ٢

ق(س^٣) = $\frac{١}{س}$ ⇐ ق′(س^٣) × ٣س^٢ = $\frac{-١}{س^٢}$ |_{س = ٢}

⇐ ق′(٨) × ٣ × ٤ = $\frac{-١}{٤}$ ⇐ [ق′(٨) × ١٢ = $\frac{-١}{٤}$] × $\frac{١}{١٢}$ ⇐ ق′(٨) = $\frac{-١}{٤٨}$

• 2025 دور أول / اذا كان ص = $(٢ + \frac{٢}{س})^٤$ ، ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٢

أ/ ٥٤ ب/ −١٠٨ جـ/ ١٦٢ د/ −٥٤

الحل/ $\frac{دص}{دس}$ = ٤(٢ + $\frac{٢}{س}$)^٣ × $\frac{-٢}{س^٢}$ |_{س = ٢} = ٤(٢ + $\frac{٢}{٢}$)^٣ × $\frac{-٢}{٤}$ = ٤ × ٢٧ × $\frac{-١}{٢}$ = −٢ × ٢٧ = −٥٤

• 2025 دور أول / إذا علمت أن (ق ∘ هـ)′(٣) = ١٥ ، ق(س) = س^٢ − ٩ ، هـ′(٣) = ٥ ما قيمة هـ(٣)

أ/ صفر ب/ ١,٥ جـ/ ٢ د/ ٣

أ.مي حواري

الحل/ $ق(س) = س^2 - 9 \Leftarrow ق'(س) = 2س \Leftarrow ق'(هـ(3)) = 2هـ(3)$

$* \ (ق \circ هـ)'(3) = ق'(هـ(3))\, هـ'(3)$

$\frac{15}{5} = 2هـ(3) \times \frac{5}{5} \Leftarrow 3 = 2هـ(3) \Leftarrow \frac{3}{2} = هـ(3)$

• 2025 دور ثاني/ إذا كان $ق(\sqrt{2س+1}) = س^2 + 2$ ، ما قيمة $ق'(3)$

أ/ 8 ب/ 4 جـ/ 48 د/ 24

الحل/ $(\sqrt{2س+1} = 3)^2 \Leftarrow 2س+1 = 9 \Leftarrow 2س = 8 \Leftarrow س = 4$

$ق(\sqrt{2س+1}) = س^2 + 2 \Leftarrow ق'(\sqrt{2س+1}) \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2س+1}} = 2س \Big|_{س=4}$

$ق'(3) \times \frac{1}{\sqrt{8+1}} = 2 \times 4 \Leftarrow \frac{ق'(3)}{3} = 8 \Leftarrow ق'(3) = 24$

• 2025 دور ثاني/ إذا كان $ق(2س) = (2-س)^{-1}$ ، $س \neq 2$ ، ما قيمة $ق'(1)$

أ/ $\frac{-4}{9}$ ب/ $\frac{-2}{9}$ جـ/ $\frac{2}{9}$ د/ $\frac{4}{9}$

الحل/ $2س = 1 \Leftarrow س = \frac{1}{2}$

$ق(2س) = (2-س)^{-1} \Leftarrow ق'(2س) \times 2 = -(2-س)^{-2} \times -1 \Big|_{س=\frac{1}{2}}$

$2ق'(1) = (2-\frac{1}{2})^{-2} \Leftarrow 2ق'(1) = (\frac{3}{2})^{-2}$

$2ق'(1) = (\frac{2}{3})^2 \Leftarrow \cancel{2}ق'(1) = \frac{\cancel{4}^{2}}{9} \Leftarrow ق'(1) = \frac{2}{9}$

• 2025 دور ثاني/ اذا علمت أن $ص = \sqrt{3}ع$ ، $ع = جتا(\frac{\pi}{3}س)$ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = 1$

أ/ $-\pi$ ب/ $\frac{-\pi}{2}$ جـ/ $\frac{\pi}{2}$ د/ π

الحل/ $ص = \sqrt{3}ع \Leftarrow ص = \sqrt{3}\, جتا(\frac{\pi}{3}س)$

$\frac{دص}{دس} = \sqrt{3} \times -جا(\frac{\pi}{3}س) \times \frac{\pi}{3} \Big|_{س=1} = \frac{-\pi\sqrt{3}}{3} \times جا(\frac{\pi}{3}) = \frac{-\pi\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس}\Big|_{س=1} = \frac{-\pi \times 3}{3 \times 2} = \frac{\pi}{2}$

• 2025 دور ثاني/ إذا كان $ق(س) = \sqrt[3]{(س^2+7)^2}$ ، ما قيمة $ق''(1)$

أ/ $\frac{11}{18}$ ب/ $\frac{4}{9}$ جـ/ $\frac{15}{8}$ د/ $\frac{1}{2}$

الحل/

$ق(س) = (س^2+7)^{\frac{2}{3}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{2}{3}(س^2+7)^{-\frac{1}{3}} \times 2س = \frac{4}{3}س \times (س^2+7)^{-\frac{1}{3}}$

$ق''(س) = \frac{4}{3}س \times -\frac{1}{3}(س^2+7)^{-\frac{4}{3}} \times 2س + \frac{4}{3}(س^2+7)^{-\frac{1}{3}}$

$ق''(1) = \frac{4}{3} \times -\frac{1}{3} \times 2(1+7)^{-\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}(1+7)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{8}{9}(8)^{-\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}(8)^{-\frac{1}{3}}$

$ق''(1) = -\frac{8}{9}(2^3)^{-\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}(2^3)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{8}{9}(2)^{\cancel{3} \times -\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}(2^{\cancel{3} \times -\frac{1}{3}})$

$\Leftarrow ق''(1) = -\frac{8}{9} \times 2^{-4} + \frac{4}{3}(2)^{-1} = -\frac{\cancel{8}}{9} \times \frac{1}{\cancel{16}_{2}} + \frac{\cancel{4}^{2}}{3} \times \frac{1}{\cancel{2}} = -\frac{1}{18} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{18} + \frac{12}{18} = \frac{11}{18}$

• 2025 دور ثاني/ اذا كان ق(س) = ٣س ، هـ(س) = ١ − س ما قيمة $\frac{د}{دس}$ ((ق∘هـ)²(س)) عندما س = $\frac{١}{٢}$

أ/ −٩ ب/ ٩ جـ/ ١٨ د/ −١٢

الحل/ $\frac{د}{دس}$ ((ق∘هـ)²(س)) = ٢(ق∘هـ)(س) × قَ(هـ(س)) هـَ(س) | س = $\frac{١}{٢}$

= ٢(ق(هـ($\frac{١}{٢}$)) قَ(هـ($\frac{١}{٢}$)) هـَ($\frac{١}{٢}$)

= ٢ق($\frac{١}{٢}$) قَ($\frac{١}{٢}$) × −١

= ٢ × $\frac{٣}{٢}$ × ٣ × −١

= −٩

هـ(س) = ١ − س

هـ($\frac{١}{٢}$) = ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

هـَ(س) = −١

هـَ($\frac{١}{٢}$) = −١

ق(س) = ٣س ← ق($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٣}{٢}$

قَ(س) = ٣

أ.مي حواري

• 2019 قباطية/ إذا كان ص = قا(ظا(٥س)) فإن $\frac{دص}{دس}$

أ/ ٥قا(ظا(٥س)) ظا(٥س) ب/ ٥قا(ظا(٥س)) ظا(ظا(٥س)) قا²(٥س)

جـ/ ٥قا(٥س) ظا(٥س) د/ ٥قتا(٥س) ظتا(٥س)

الحل/ ص = قا(ظا(٥س)) ⇐ صَ = قا(ظا(٥س)) ظا(ظا(٥س)) × قا²(٥س) × ٥

• 2019 طوباس/ إذا كان $\frac{د}{دس}$ (ق²(س² − ١)) = ١٠س + ٢ وكان ق(٣) = ٤ فإن قَ(٣) ، س > ٠

أ/ $\frac{١١}{١٦}$ ب/ $\frac{١٦}{١١}$ جـ/ $\frac{٢}{٣}$ د/ $\frac{٣}{٢}$

الحل/ $\frac{د}{دس}$ (ق²(س² − ١)) = ١٠س + ٢

٢ق(س² − ١) قَ(س² − ١) × ٢س = ١٠س + ٢

٢ق(٣) قَ(٣) × ٢ × ٢ = ١٠ × ٢ + ٢

٢ × ٤ × قَ(٣) × ٤ = ١١

١٦قَ(٣) = ١١ ⇐ قَ(٣) = $\frac{١١}{١٦}$

• عندما س² − ١ = ٣ ⇐ س² = ٤

س = ٢ أو س = −٢ ← مرفوض

• 2019 سلفيت/ إذا كان ق(س) = $\frac{(س^٢ − ١)^٢}{(س + ١)^٢}$ ، س ≠ −١ ما قيمة قَ(١)

أ/ ٢ ب/ صفر جـ/ −٤ د/ −٢

الحل/ ق(س) = $\frac{(س^٢ − ١)^٢}{(س + ١)^٢}$ = $\frac{((س − ١)(س + ١))^٢}{(س + ١)^٢}$ = $\frac{(س − ١)^٢ (س + ١)^٢}{(س + ١)^٢}$ ، س ≠ −١

ق(س) = (س − ١)² ⇐ قَ(س) = ٢(س − ١) ⇐ قَ(١) = ٢(١ − ١) = صفر

• قباطية 2019/ إذا كان (ق∘هـ)(س) = س ، قَ(س) = $\frac{١}{س}$ فإن هـَ(س) =

أ/ هـ(س) ب/ ق(س) جـ/ س د/ ١

الحل/ (ق∘هـ)(س) = س نشتق

قَ(هـ(س)) هـَ(س) = ١ ⇐ $\frac{١}{هـ(س)}$ × هـَ(س) = ١ ⇐ هـَ(س) = هـ(س)

• 2019 الخليل/ إذا كان ق(٣) = ٤ ، قَ(٣) = -١ ، قً(٣) = ٦ فإن (٤√ق(س) قَ(س))'(٣) =

أ/ -٤٩ ب/ ٤٩ ج/ -٤٧ د/ -٥٠

الحل/ (٤√ق(س) × قَ(س))' = ٤√ق(س) × قً(س) + قَ(س) × ٤ قَ(س) / ٢√ق(س) | س = ٣

= ٤√ق(٣) قً(٣) + ٤(قَ(٣))^٢ / ٢√ق(٣)

= ٤√٤ × ٦ + ٢(-١)^٢ / √٤ = ٢٤ × ٢ + ٢/٢ = ٤٨ + ١ = ٤٩

• 2019 الوسطى/ إذا كان ق(س) = س^٣ / √٣ ، هـ(س) = ظا(٢س) ، ما قيمة (ق∘هـ)'(π/٢)

أ/ ٨ ب/ -٨ ج/ صفر د/ -١٦

الحل/ ق(س) = س^٣ / √٣ ، قَ(س) = ٣/√٣ س^٢

هـ(س) = ظا(٢س) ⇐ هـ(π/٢) = ظا(٢π/٢) = ظا(π) = ٠

هَ(س) = قا^٢(٢س) × ٢

(ق∘هـ)'(π/٢) = قَ(هـ(π/٢)) هَ(π/٢) = قَ(صفر) × ٢قا^٢(π)

= ٣/√٣ × (٠)^٢ × ٢ × ١ = صفر

أ.مي حواري

• 2019 الخليل/ اذا كان ص = ع^٢ + ٤ع ، ع = أس - ٨ ، أ > ٠ وكانت ع^٢ص/ع^٢س = ١٢٨ ، ما قيمة الثابت أ

أ/ ٨ ب/ ٦٤ ج/ ١٢٨ د/ ٣٢

الحل/ ص = ع^٢ + ٤ع ⇐ ص = (أس - ٨)^٢ + ٤(أس - ٨)

ع^٢ص/ع^٢س = ٢(أس - ٨) × أ + ٤أ ⇐ ع^٢ص/ع^٢س = ٢أ × أ = ١٢٨ ⇐ أ^٢ = ٦٤

أ = ٨ ✓ أو أ = -٨ × أ > ٠

• 2019 يطا/ إذا كان ق(٢جاس) = ٢قتاس ، س ∈ [٠، π/٢] ، ما قيمة قَ(√٢)

أ/ -١ ب/ ٣ ج/ -٣/√٢ د/ ٣√٢

الحل/ ق(٢جاس) = ٢قتاس

[قَ(٢جاس) × ٢قتاس = -٢جاس] ÷ ٢قتاس

قَ(٢جاس) = -ظاس | س = π/٤

قَ(√٢) = -ظا(π/٤)

= -١

٢جاس = √٢

جاس = √٢/٢ = √٢ × √٢ / ٢√٢

جاس = ٢/٢√٢

جاس = ١/√٢ ⇐ س = π/٤

• 2020 نابلس/ إذا كان ص = ع^٢ - ١/ع ، ع = ٢س^٢ ، س = لم وكان ع^٢ص/ع^٢م = ٨٥ عند (س = ١) ما قيمة الثابت ل

أ/ ٥ ب/ ١٧/٣ ج/ ١٥/٤ د/ ٥/٢

الحل/ ص = ع^٢ - ١/ع ، ع = ٢س^٢ ، س = لم

ع^٢ص/ع^٢س = ٢ع + ١/ع^٢ ، ع^٢س/ع^٢س = ٤س ، ل = ع^٢س/ع^٢م

عندما س = ١ ⇐ ع = ٢(١)^٢ ⇐ ع = ٢

$\frac{ص}{ع^3} = \frac{ص}{ع^2} \times \frac{ع^2}{س} \times \frac{س}{ع^3}$ ← $\frac{س}{ع^3} \times 2 \int_{س=1}^{ع=2} (\frac{1}{ع^2} + 2ع)(3س) د$ = 10

← $10 = (\frac{1}{4} + 4) \times 4 \times د$

← $10 = د(16+1)$ ← $10 = 17د$ ← $د = 5$

• 2020 بيت لحم/ إذا كان $\frac{ك}{كس}(2س^3 + س) = ف(س^3)$ فإن $ف'(2)$

ب/ 6 | ج/ $\frac{25}{2}$ | د/ 7 | أ/ $\frac{7}{2}$

الحل/ $ف(س^3) = 2س^3 + 1$ / عندما $س^3 = 2$ ← $س = 1$

$3س^2 = ف'(س^3) \times 2$ $\int_{س=1}$

$12 = 2ف'(2)$

$6 = ف'(2)$

أ.مي حواري

• 2020 الوسطى/ إذا كان $ص = ظتا^4 س - جتا^4 س$ فما تساوي $\frac{كص}{كس}$

أ/ -3 جا$(3س)$ | ب/ 4 ظتا$(3س)$ | ج/ -4 ظتا$(3س)$ | د/ 3 ظتا$^2 س$

الحل/ $ص = (ظتا^2 س - جتا^2 س)(ظتا^2 س + جتا^2 س)$

$ص = ظتا(2س) \times 1$

$ص' = -2$ جا$(2س)$ ← $ص'' = -4$ ظتا$(2س)$

• 2020 نابلس/ إذا كان $ص = \frac{2 - ظتا(2س)}{جتا س}$ فإن $\frac{كص}{كس} =$

أ/ -3 قا$س$ ظا$س$ | ب/ قا$س$ ظا$س$ | ج/ 3 قا$س$ ظا$س$ | د/ 3 قا$^2 س$ ظا$س$

الحل/ $ص = \frac{2 - ظتا(2س)}{جتا س} = \frac{2-1}{جتا س} = 3 \times \frac{1}{جتا س}$ ← $ص = 3$ قا$س$

$ص' = 3$ قا$س$ ظا$س$

• 2020 بيت لحم/ ما قيمة $نهـا_{س \to 0} \frac{لو(س+1)^2}{س^2}$

أ/ 2 | ب/ 1 | ج/ ∞ | د/ $\frac{1}{4}$

الحل/ تذكر/ $نهـا_{س \to 0} ف(س) = (نهـا_{س \to 0} ف(س))^2$

$نهـا_{س \to 0} \frac{لو(س+1)^2}{س} = (نهـا_{س \to 0} \frac{لو(س+1)}{س})^2 = (نهـا_{س \to 0} \frac{لو 1}{0})^2 = (\frac{0}{0})^2$

باستخدام لهوبتال/ $(نهـا_{س \to 0} \frac{1}{س+1})^2 = (1)^2 = 1$

• 2022 خانيونس/ اذا كان $ف(س) =$ جتا$س$ (1+ظتا$س$) فإن $ف'(\frac{\pi}{4})$

أ/ $\frac{1}{2}$ | ب/ $-\frac{1}{2}$ | ج/ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | د/ $\sqrt{2}$

الحل/ جتا$س$+ظتا$س$ = 1 ← جتا$س$ = 1 − ظتا$س$.

$\leftarrow$ $ق'(س) = (1-ظا^2 س)(1+ظا^2 س)(1+ظا^2 س)$

$ق'(س) = (1-ظا^2 س)^2 (1+ظا^2 س)$ $\leftarrow$ $ق'(س) = (1-ظا^2 س)(1+ظا^2 س)$

$ق'(س) = 1-(ظا^2 س)^2 = 1-ظا^2 س$

$ق''(س) = -ظا^2 س \times 2$ قا س $\times$ قا س

$ق''(\frac{\pi}{3}) = -8\,ظا^2(\frac{\pi}{3})\,قا^2(\frac{\pi}{3}) = -8(\sqrt{3})^2(2)^2 = -8\times\frac{1}{16} = -\frac{1}{2}$

• 2025 طولكرم / إذا كان $ق'(2س+1) = \frac{[3-\frac{1}{2}س]-س^3}{1+2س}$ حيث $ق(-5)$ و $س \neq -2$

ب/ $-\frac{1}{2}$ ج/ $\frac{1}{2}$ د/ 1 أ/ -1

الحل/ $2س+1 = -5 \leftarrow 2س = -6 \leftarrow س = -3$

$\leftarrow$ $|2س+1| = -(س+2)$ عندما $س = -3$ $\leftarrow$ $|-6+1| = |-5| = 5$ (سالب)

$\leftarrow$ $ق'(2س+1) = \frac{(س-2)(س+2)}{-(س+2)} = \frac{س^2-4}{-س-2} = \frac{3-\frac{1}{2}س^2-س^3}{1+2س}$ و $س \neq -2$

$\leftarrow$ $ق'(2س+1) = (س-2)$ $\leftarrow$ $ق'(2س+1)\times 2 = 1$ $\Big|_{س=-3}$

$ق'(-5)\times 2 = 1$

$ق'(-5) = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} 5 & ؛ س \in]-\infty, -3[\\ -3 & ؛ س \in [-3, 2] \\ -2س & ؛ س \in]2, 3[\\ -4 & ؛ س \in [3, \infty[\end{cases}$ $\leftarrow$ $س = -3 \in]-\infty, -3[$

$\leftarrow$ $[3-\frac{1}{2}س^2] = 5$

$ل = \frac{1}{2} = 2$

أ.مي حواري

• 2025 طولكرم / إذا كان $س = \frac{ع+1}{ع-1}$ و $ص = \frac{1-ع}{ع+1}$ فإن $\frac{ص}{س}$ عندما $ع = 0$

ب/ -2 ج/ 1 د/ -4 أ/ 2

الحل/ $س \times ص = (\frac{ع+1}{ع-1})(\frac{1-ع}{ع+1}) \leftarrow س ص = -1$

$\leftarrow$ $ص = \frac{-1}{س}$ $\leftarrow$ $ص' = \frac{1}{س^2}$ $\leftarrow$ $\frac{ص}{س} = \frac{-2}{س^3}$ $\Big|_{س=-1}$

$\leftarrow$ $ص' = \frac{-2}{-1} = 2$

• عندما $ع = 0$

$س = \frac{1}{-1} = -1$

• 2025 سلفيت / إذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق حيث $هـ(1) = 2$

$ق(1) = 3$ و $ق'(2) = 4$ ما قيمة $\frac{ك}{دس}(س^3 + ق(هـ(س)))$ $\Big|_{س=1}$

ب/ 12 ج/ 14 د/ 24 أ/ 18

الحل/ $\frac{ك}{دس}(س^3 + ق(هـ(س))) = 3س^2 + ق'(هـ(س))\,هـ'(س)$ $\Big|_{س=1}$

$= ٢(١) + ق(هـ(١))هـ(١) = ٢ + ق(٢) \times ٣ = ٢ + (٣ \times ٤) = ٢ + ١٢ = ١٤$

• خارجي/ إذا كان $\frac{ك}{كس}(ق(س^{٤})) = ٢س^{٣} + ٦س^{٣}$ فإن $ق(س)$ تساوي

د/ $٥س^{٣} + ٩س$ ب/ $س^{٤} + ٣س$ جـ/ $س^{٤} + ٦س$

الحل/

$\therefore$ [$ق(س^{٤}) \times ٤س^{٣} = ٢س^{٣} + ٦س^{٣}$] $\div ٤س^{٣}$ ، $س \neq ٠$

$ق(س^{٤}) = س^{٤} + ٣س^{٤}$

نفرض $س^{٤} = ص \Leftarrow ق(ع) = (س^{٤})^{٢} + ٣(س^{٤})$

$ق(ص) = ص^{٢} + ٣ص$.

• خارجي/ إذا كان $ص = ق(جاس)$ ، $س = ٣ع$ وكان $\frac{كص}{كع} = ٢$ عندما $ع = ١$ فما قيمة $ق(٠)$

د/ -٣ جـ/ ٣ ب/ ٢ **أ/ -٢**

الحل/ $ص = ق(جاس)$

$س = ٣ع$

$\frac{كص}{كس} = ق(جاس) \times جتاس$

$\frac{كس}{كع} = ٣$

عندما $ع = ١ \Leftarrow س = ٣$

$\frac{كص}{كع} = \frac{كص}{كس} \times \frac{كس}{كع} \Leftarrow \frac{كص}{كع} = ق(جاس) \times جتاس \times ٣$ | $_{ع=١}^{س=٣}$

$\Leftarrow ٢ = ق(جا(٣)) \times جتا(٣) \times ٣$

$٢ = ق(٠) \times -١ \Leftarrow -٢ = ق(٠)$

أ.مي حواري

• خارجي/ إذا كان $ص = ق(لوهـ س)$ فإن $\frac{كص}{كس} =$

د/ $\frac{١}{س} ق(س)$ جـ/ $\frac{١}{س} ق(لوهـ س)$ ب/ $\frac{١}{س} ق(لوهـ س)$ **أ/ $\frac{١}{س}$ لوهـ س**

• خارجي/ إذا كان $ص = ٧\sqrt{ع}$ ، $ع = جاس$ جد $\frac{كص}{كس}$ عندما $ص = ٢$ علماً بأن $س \in [٠, \frac{\pi}{٢}]$

د/ ١ جـ/ ٢ ب/ ٤ **أ/ ٤**

الحل/

$ص = ٧\sqrt{ع} = ٧\sqrt{جاس}$

$ص = ٧\sqrt{جاس} \times |جاس| \Leftarrow ص = ٧\sqrt{|جاس|}$

$\Leftarrow ص = ٧\sqrt{جاس}$

$\frac{كص}{كس} = ٧ جتاس$ | $_{س=\frac{\pi}{٤}}$

$ص = ٧ جا\frac{\pi}{٤} = ٧ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٢$

عندما $ص = ٢ \Leftarrow ٢ = ٧\sqrt{جاس}$

$\frac{١}{\sqrt{٢}} = جاس \Leftarrow س = \frac{\pi}{٤}$

$|جاس| = جاس$ في $[٠, \frac{\pi}{٢}]$ لأن جاس (+) في الربع الأول.

• خارجي/ إذا كان $ق(س)=\frac{ب}{س+1}$ ، $هـ(س)=|3س-4|$ وكان $(هـ\circ ق)'(1)=\frac{2}{3}$ ما قيمة الثابت ب:

م/ $\frac{3}{4}$ ب/ $\frac{4}{3}$ جـ/ $-\frac{4}{3}$ د/ $\frac{1}{3}$

الحل/ $هـ(س)=\begin{cases}3س-4 & ؛ س\geq 2 \\ 4-3س & ؛ س<2\end{cases}$ $\Rightarrow$ $هـ'(س)=\begin{cases}3 & ؛ س>2 \\ -3 & ؛ س<2 \\ \text{غير معرف} & ؛ س=2\end{cases}$

$ق(س)=\frac{ب}{س+1}$ $\Rightarrow$ $ق'(س)=\frac{-ب}{(س+1)^2}$

$(هـ\circ ق)'(1)=هـ'(ق(1))\times ق'(1)$ $\Rightarrow$ $\frac{2}{3}=هـ'(\frac{ب}{2})\times\frac{-ب}{4}$

$\Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{-ب}{4}\times هـ'(\frac{ب}{2})$

• عندما $\frac{ب}{2}>2$ $\Rightarrow$ $\frac{2}{3}=\frac{-ب}{4}\times 3$ $\Rightarrow$ $ب=-\frac{8}{3}$ مرفوض $\frac{ب}{2}\not>2$

• عندما $\frac{ب}{2}<2$ $\Rightarrow$ $\frac{2}{3}=\frac{-ب}{4}\times -3$ $\Rightarrow$ $ب=\frac{8}{3}$ $\checkmark$ $\frac{ب}{2}<2$

• ليكن $(هـ\circ ق)'(3)=\frac{8}{27}$ ، $هـ(س)=\frac{ب}{س}$ ، $ق(س)=س^3$ ما قيمة الثابت ب

م/ 3 ب/ 27 جـ/ -8 د/ -2

الحل/ $ق(س)=س^3$ $\Rightarrow$ $ق'(س)=3س^2$

$هـ(س)=\frac{ب}{س}$ $\Rightarrow$ $هـ'(س)=\frac{-ب}{س^2}$ $\Rightarrow$ $هـ'(3)=\frac{-ب}{9}$

$(هـ\circ ق)'(3)=ق'(3)\times هـ'(ق(3))$

$\frac{8}{27}=ق'(\frac{ب}{3})\times\frac{-ب}{9}$ $\Rightarrow$ $\frac{8}{3}=3(\frac{ب}{3})^2\times -ب$ $\Rightarrow$ $\frac{8}{3}=\frac{-ب^3}{9}\times 3$

$\Rightarrow \frac{8}{3}=\frac{-ب^3}{3}$ $\Rightarrow$ $-ب^3=8$ $\Rightarrow$ $ب=-2$

• القسم الثاني/ أجب عن الأسئلة الآتية:

• 2007/ إذا كان $ل(س)=س\times هـ(س^3-3س+3)$ ما قيمة $ل'(3)$ علماً بأن $هـ(3)=4$ ، $هـ'(3)=1$

الحل/ $ل'(س)=س\times هـ'(س^3-3س+3)(3س^2-3)+هـ(س^3-3س+3)$

$ل'(3)=3\times هـ'(27-9+3)(27-3)+هـ(27-9+3)$

$ل'(3)=3\times هـ'(21)\times 24+هـ(21)=9(1)+4=13$

• 2007 دراسات/ إذا كان $ق(س)=س^3+3س+5$ ، $هـ(س)=س^4+1$ جد $(ق\circ هـ)'(س)$.

الحل/ $ق(س)=س^3+3س+5$ $\quad$ $هـ(س)=س^4+1$

$ق'(س)=3س^2+3$ $\quad$ $هـ'(س)=4س^3$

$(ق\circ هـ)'(س)=ق'(هـ(س))\times هـ'(س)=ق'(س^4+1)\times 4س^3$

$=[3(س^4+1)^2+3]\times 4س^3$

$=12س^3(س^4+1)^2+12س^3$

أ.مي حواري

• 2008 إكمال/ إذا كان $ق(س) = ل(س^2+1)$ و $ل(0)=3$ و $ل'(0)=1$ جد معادلة المماس لمنحنى $ق(س)$ عندما $(س=2)$

الحل/ $ق(س) = ل(س^2+1)$

$ق'(س) = ل'(س^2+1) \times 2س \Leftarrow ق'(2) = 2 \times ل'(0) = 2 \times 1 = 2 \Leftarrow$ ميل المماس $= 2$

$ق(س) = ل(س^2+1) \Leftarrow ق(2) = ل(0) = 3 \Leftarrow (2, 3)$ نقطة التماس.

معادلة المماس/ $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص - 3 = 2(س - 2) \Leftarrow ص - 3 = 2س - 4 \Leftarrow ص = 2س - 1$

• 2009/ إذا كان $ص = ظا^3 س$ أثبت أن $ص'' = 2(1+ص)(1+3ص^2)$

الحل/ $ص' = 2ظا س \cdot قا^2 س \Leftarrow ص' = 2ظا س(ظا^2 س + 1)$

$ص' = 2ظا^3 س + 2ظا س$

$ص'' = 6ظا^2 س \cdot قا^2 س + 2قا^2 س$ اخراج $2قا^2 س$ عامل مشترك.

$ص'' = 2قا^2 س(3ظا^2 س + 1)$

$ص'' = 2(ظا^2 س + 1)(3ظا^2 س + 1)$ نعوض $ظا^2 س = ص$

$\Leftarrow ص'' = 2(ص+1)(3ص+1)$ #

• 2009 إكمال/ إذا كان $ص = ع^3 - 1$ و $ع = (س+1)^3$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ص = 0$

الحل/ $ص = ع^3 - 1$ $\quad ع = (س+1)^3$

$\frac{دص}{دع} = 3ع^2$ $\quad \frac{دع}{دس} = 3(س+1)^2$

عندما $ص = 0 \Leftarrow 0 = ع^3 - 1 \Leftarrow ع^3 = 1 \Leftarrow ع = 1$

عندما $ع = 1 \Leftarrow (س+1)^3 = 1 \Leftarrow س+1 = 1 \Leftarrow س = 0$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 3ع^2 \times 3(س+1)^2 \Big|_{\substack{ع=1 \\ س=0}} = 3 \times 3 = 9$

طريقة (2)/ $ص = ع^3 - 1 \Leftarrow ص = ((س+1)^3)^3 - 1 \Leftarrow ص = (س+1)^9 - 1$

$\frac{دص}{دس} = 9(س+1)^8 \Big|_{س=0} = 9(1)^8 = 9$

• 2010/ إذا كان $ص = (ع^3 - 2ع)^2$ و $ع = س^2 + 1$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = 1$

الحل/ $ص = (ع^3 - 2ع)^2$ $\quad ع = س^2 + 1$

$\frac{دص}{دع} = 2(ع^3 - 2ع)(3ع^2 - 2)$ $\quad دع/دس = 2س$

عندما $س = 1 \Leftarrow ع = 2 \Leftarrow ع = 1$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = 2(ع^3 - 2ع)(3ع^2 - 2) \times 2س \Big|_{\substack{ع=1 \\ س=1}}$

$= 2(1-2)(3-2)(2)$

$= 4$

• 2010 إكمال/ إذا كان ص = ع^{٣} + ع^{٢} − ٦ ، ع = س^{٢} − ٣ ، س > ١ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما ع = ١

الحل/ $\frac{دص}{دع}$ = ٣ع^{٢} + ٢ع ، $\frac{دع}{دس}$ = ٢س .

عندما ع = ١ ⇐ ١ = س^{٢} − ٣ ⇐ ٤ = س^{٢} ⇐ س = {٢ ، −٢} ← مرفوض س > ١

∴ س = ٢

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = (٣ع^{٢} + ٢ع) \times ٢س \Big|_{\substack{س=٢ \\ ع=١}} = (٣+٢) \times ٢ \times ٢ = ٥ \times ٤ = ٢٠$

• 2011/ إذا كان ص = $\sqrt{ع+١٣}$ ، ٣ع = ٤س^{٣} جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٣

الحل/ ص = $\sqrt{ع+١٣}$ ، ع = $\frac{٤}{٣}$س^{٣}

$\frac{دص}{دع} = \frac{١}{٢\sqrt{ع+١٣}}$ ، $\frac{دع}{دس}$ = ٤س^{٢}

عندما (س = ٣) ⇐ ~~٣~~ع = ٤ × ~~٣~~ × ٣ × ٣ ⇐ ع = ٣٦

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{ع+١٣}} \times ٤س^{٢} \Big|_{\substack{س=٣ \\ ع=٣٦}}$

⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{٢(٣)^{٢}}{\sqrt{٣٦+١٣}} = \frac{٢ \times ٩}{\sqrt{٤٩}} = \frac{١٨}{٧}$

أ.مي حواري

• 2011/ جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = $\frac{١}{٢}$ جتا(٢س) + جتا(س) عند النقطة/النقاط التي يكون المماس عندها أفقياً في [−$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]

الحل/ نفرض نقطة التماس (س ، ق(س))

ق(س) = $\frac{١}{٢}$ × −٢جا(٢س) + −جاس

المماس أفقياً ⇐ ميل المماس = ٠

⇐ −×(٠ = −جا(٢س) − جاس) ⇐ ٠ = جا(٢س) + جا(س)

⇐ ٠ = ٢جاس جتاس + جاس اخراج جاس عامل مشترك .

٠ = جاس (٢جتاس + ١)

إما جاس = ٠ أو ٢جتاس + ١ = ٠

س = ٠ ∈]−$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[جتا(س) = −$\frac{١}{٢}$ في الثاني والثالث ∉]−$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

ق(٠) = $\frac{١}{٢}$جتا(٠) + جتا(٠) = $\frac{١}{٢}$ + ١ = $\frac{٣}{٢}$ ⇐ (٠ ، $\frac{٣}{٢}$) نقطة التماس.

معادلة المماس/ ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)

ص − $\frac{٣}{٢}$ = ٠(س − ٠) ⇐ ص = $\frac{٣}{٢}$

• 2012/ إذا كان $\sqrt{ص} = \frac{ص}{س-١}$ أثبت أن ص″ص = ص′(س − ١)

الحل/

$\left(\sqrt{ص} = \frac{ص}{س-١}\right)^{٢}$ ⇐ ص = $\frac{ص^{٢}}{(س-١)^{٢}}$ ⇐ (ص(س − ١)^{٢} = ص^{٢}) ÷ ص

⇐ (س − ١)^{٢} = ص

$ص = (س-١)^٢ \Leftarrow ص' = ٢(س-١) \Leftarrow ص'' = ٢$

$ص''ص = ٢(س-١)^٢$

$ص''ص = ٢(س-١)(س-١)$

$ص''ص = ص'(س-١)$ #

• 2014/ إذا كان $ص = جاهـ$ ، $س = قتاهـ$ أثبت أن $ص'' + ٢ص ص' = ٠$

الحل/ $س = قتاهـ = \frac{١}{جاهـ} \Leftarrow س = \frac{١}{ص} \Leftarrow ص = \frac{١}{س}$

$ص' = -\frac{١}{س^٢}$

$ص'' = \frac{٢}{س^٣}$

المطلوب/ $ص'' + ٢ص ص' = \frac{٢}{س^٣} + ٢ \times \frac{١}{س} \times \frac{-١}{س^٢} = \frac{٢}{س^٣} - \frac{٢}{س^٣} = ٠$ #

طريقة (٢) $س = قتاهـ \Leftarrow س = \frac{١}{جاهـ} \Leftarrow س = \frac{١}{ص} \Leftarrow س ص = ١$ نشتق لـ س .

$س ص' + ص = ٠$ نشتق مرة ثانية

$س ص'' + ص' + ص' = ٠ \Leftarrow [س ص'' + ٢ص' = ٠] \div س$

$\Leftarrow ص'' + \frac{٢}{س} ص' = ٠ \Leftarrow ص'' + ٢ص ص' = ٠$ #

نعوض ($\frac{١}{س} = ص$)

أ.مي حواري

• 2014/ اذا كان $ق(س) = س^٣ + ٢$ ، $هـ(س) = س^٢ + ٣$ جد $(ق \circ هـ)''(٢)$

الحل/ $ق(س) = س^٣ + ٢$ ، $هـ(س) = س^٢ + ٣ \Leftarrow هـ(٢) = ٤ + ٣ = ٧$

$ق'(س) = ٣س^٢$ ، $هـ'(س) = ٢س \Leftarrow هـ'(٢) = ٢ \times ٢ = ٤$

$ق''(س) = ٦س$ ، $هـ''(س) = ٢$

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س))\, هـ'(س)$ نشتق

$(ق \circ هـ)''(س) = ق'(هـ(س))\, هـ''(س) + هـ'(س)\, ق''(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$(ق \circ هـ)''(٢) = ق'(هـ(٢))\, هـ''(٢) + (هـ'(٢))^٢ * ق''(هـ(٢))$

$= ق'(٧) \times ٢ + (٤)^٢ \times ق''(٧)$

$= ٣(٧)^٢ \times ٢ + ١٦ \times ٦ \times ٧ = (٦ \times ٤٩) + (١٦ \times ٤٢) = ٩٦٦$

• 2016/ إذا كان المماس لمنحنى $ق(س) = \left(س + \frac{٢}{س}\right)^٣$ عند $(س = ٢)$ يمر بالنقطة $(أ ، ٠)$ ما قيمة الثابت أ

الحل/ $(أ ، ٠)$ تقع على المماس $\Leftarrow$ يجب أن نجد معادلة أو ميل المماس .

$ق(٢) = \left(٢ + \frac{٢}{٢}\right)^٣ = (٣)^٣ = ٢٧ \Leftarrow (٢ ، ٢٧)$ نقطة التماس .

$ق'(س) = ٣\left(س + \frac{٢}{س}\right)^٢ \left(١ - \frac{٢}{س^٢}\right)$

$ق'(٢) = ٣(٢+١)^٢ \left(١ - \frac{٢}{٤}\right) = ٣ \times ٩ \times \frac{١}{٢} = \frac{٢٧}{٢} =$ ميل المماس .

(٢٧٤٢) (٢٩٠٤)

ميل المماس $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \Leftarrow \frac{٢٧}{٣} = \frac{٢٧}{ب - ٥} \Leftarrow ٣ = ب - ٥ \Leftarrow (ب = -٥) \times -١ \Leftarrow ٥ = ب$

• 2016/ إذا كان $هـ(٣س^٤ - ١) = \sqrt[٣]{(س+٦)^٤}$ ، $هـ(٧) = ٣$: اصبا قيمة $نهـ_{س \to ٢} \frac{هـ(٧+هـ) - هـ(٧)}{٥هـ}$

الحل/ $٣س^٤ - ١ = ٧ \Leftarrow ٣س^٤ = ٨ \Leftarrow س^٤ = ٤ \Leftarrow س = ٢$

$س = -٢ \times$

$هـ(٣س^٤ - ١) = (س+٦)^{\frac{٤}{٣}}$

$قـ(٣س^٤ - ١) \times ١٢س^٣ = \frac{٤}{٣}(س+٦)^{\frac{١}{٣}}$

$قـ(٧) \times ٣٢ = \frac{١}{٣}(٨)^{\frac{١}{٣}} \Leftarrow$ $س = ٢$ $\Leftarrow ٣٢قـ(٧) = \frac{٢}{٣} \Leftarrow قـ(٧) = \frac{١}{٣}$

المطلوب/ $نهـ_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٧+هـ) - هـ(٧)}{٥هـ} = \frac{هـ(٧) - هـ(٧)}{٥هـ} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبتال/ $نهـ_{هـ \to ٠} \frac{قـ(٧+هـ)}{٦} = \frac{قـ(٧)}{٦} = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{١٨}$

• 2017/ إذا كان $هـ(س) = ٢س^٣ + ب س$ وكان $(هـ \circ قـ)'(١) = ٣٤$ ما قيمة الثابت ب

الحل/ $هـ(س) = ٢س^٣ + ب س$

$قـ(س) = ٣س + ب \Leftarrow قـ(١) = ٣ + ب$

$قـ(س) = ٤ \Leftarrow قـ(١) = ٤$

$(هـ \circ قـ)'(١) = هـ'(قـ(١)) \, قـ'(١) = ٣٤ \Leftarrow قـ(٣+ب) \times ٤ = ٣٤$

$قـ(٣+ب) = ٦$

$٣(٣+ب) + ب = ٦$

$١٨ + ٤ب + ب = ٦ \Leftarrow ٥ب = -١٢ \Leftarrow ب = -٢$

أ.مي حواري

• 2017 دورة ثانية/ إذا كان $د(٣س - ١) = \frac{هـ(س)}{س^٣ + ٢}$ وكانت معادلة المماس لمنحنى $هـ(س)$ عندما $(س = ١)$ هي $٥ص - ٤س + ٧ = ٠$: أوجد قيمة $قـ(١)$

الحل/ $٥ص - ٤س + ٧ = ٠ \Leftarrow (١، هـ(١))$ نقطة تماس $\in$ للمماس .

$٥هـ(١) - ٤ + ٧ = ٠ \Leftarrow ٥هـ(١) = -٤ \Leftarrow هـ(١) = -٣$

$٥ص - ٤س + ٧ = ٠ \Leftarrow ٥ص = ٤س - ٧ \Leftarrow ص = \frac{٤}{٥}س - \frac{٧}{٥} \Leftarrow$ ميل المماس $= قـ(١) = \frac{٤}{٥}$

$د(٣س - ١) = \frac{هـ(س)}{س^٣ + ٢}$

$قـ(٣س - ١) \times ٣ = \left| \frac{(س^٣ + ٢) \, قـ(س) - هـ(س)(٣س^٢)}{(س^٣ + ٢)^٢} \right|_{س=١}$

• عندما $٣س - ١ = ١$

$٣س = ٢ \Leftarrow س = ١$

$قـ(١) \times ٣ = \frac{(٣)قـ(١) - (٣)هـ(١)}{(٣)^٢} \Leftarrow ٣قـ(١) = \frac{٣ - (-٣)}{٣} \Leftarrow ٣قـ(١) = \frac{٤}{٣}$

(خاص مشترك)

$\Leftarrow قـ(١) = \frac{٢}{٣}$

• 2018 دور أول/ إذا كان ص = أ جا(٢س) − ب قتا(٢س) أثبت أن (ص')² + ٤ص² = ٤أ² + ٤ب²

الحل/ ص = أ جا(٢س) − ب قتا(٢س)

ص' = ٢أ قتا(٢س) + ٢ب جا(٢س).

(ص')² + ٤ص² = (٢أ قتا(٢س) + ٢ب جا(٢س))² + ٤(أ جا(٢س) − ب قتا(٢س))²

= ٤أ² قتا²(٢س) + ٤ب² جا²(٢س) + ٨أ ب جا(٢س) قتا(٢س) + ٤(أ² جا²(٢س) + ب² قتا²(٢س) − ٢أ ب جا(٢س) قتا(٢س))

← (ص')² + ٤ص² = ٤أ² قتا²(٢س) + ٤ب² جا²(٢س) + ٨أ ب جا(٢س) قتا(٢س) + ٤أ² جا²(٢س) + ٤ب² قتا²(٢س) − ٨أ ب جا(٢س) قتا(٢س)

(ص')² + ٤(ص)² = ٤أ²(جا²(٢س) + قتا²(٢س)) + ٤ب²(جا²(٢س) + قتا²(٢س))

(ص')² + ٤(ص)² = ٤أ²(١) + ٤ب²(١) = ٤أ² + ٤ب² #

• 2018 دور أول/ ما قيمة $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{(جاس + قتاس)^4 - 4}{جا(٢س) - 1}$

الحل/ (جاس + قتاس)⁴ = ((جاس + قتاس)²)² = (جا²س + قتا²(س) + ٢جاس قتاس)²

= (١ + جا(٢س))²

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{(1 + جا(٢س))^2 - 4}{جا(٢س) - 1} = \frac{(1 + جا(\frac{\pi}{2}))^2 - 4}{جا(\frac{\pi}{2}) - 1} = \frac{(1+1)^2 - 4}{1 - 1} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2(1 + جا(٢س)) \times \cancel{قتا(٢س) \times 2}}{\cancel{قتا(٢س) \times 2}} = 2(1 + جا(\frac{\pi}{2})) = 2(1+1) = 4$

• 2019 دور ثاني/ اذا كان ص = أ جا(ن س) + ب قتا(ن س)، حيث ن، أ، ب أعداد حقيقية، أثبت أن $\frac{ص''}{ص} = -ن^2$

الحل/ ص' = أ ن قتا(ن س) − ب ن جا(ن س)

ص'' = −أ ن² جا(ن س) − ب ن² قتا(ن س)

ص'' = −ن²(أ جا(ن س) + ب قتا(ن س))

ص'' = −ن² × ص ⇐ $\frac{ص''}{ص} = -ن^2$ #

أ.مي حواري

• 2020 دور أول/ إذا كان ص = ٤ ظا²ن، ن س = جـ، ن ≠ ٠ حيث جـ ثابت، وكان $\frac{دص}{دس} = \frac{-\pi^2}{6}$ عندما ن = $\frac{\pi}{4}$، ما قيمة الثابت جـ

الحل/ ص = ٤ ظا²ن

$\frac{دص}{دن} = 4 \times 2$ ظان قا²ن

ن س = جـ ⇐ س = $\frac{جـ}{ن}$

$\frac{دس}{دن} = \frac{-جـ}{ن^2}$ ⇐ $\frac{دن}{دس} = \frac{-ن^2}{جـ}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = 8$ ظان قا²ن × $\frac{ن^2}{-جـ}$ $\Big|_{ن = \frac{\pi}{4}}$

⇐ $\frac{-\pi^2}{6} = 8$ ظا($\frac{\pi}{4}$) قا²($\frac{\pi}{4}$) × $(\frac{\pi}{4})^2$ × $\frac{-1}{جـ}$

$\frac{-\pi^2}{6} = 8(1)(\sqrt{2})^2 \times \frac{\pi^2}{16} \times \frac{-1}{جـ}$ ⇐ $\frac{1}{6} = \frac{8 \times 2}{16 جـ}$ ⇐ جـ = ٦

• 2020 دور أول/ أوجد معادلة المماس لمنحنى ص = لو$_{هـ}$ (٢ − √٢ جتاس) عند النقط الواقعة عليه وإحداثها السيني يساوي ($\frac{\pi}{4}$)

الحل/ ص$_{س=\frac{\pi}{4}}$ = لو$_{هـ}$ (٢ − √٢ جتا $\frac{\pi}{4}$) = لو$_{هـ}$ (٢ − √٢ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$) = لو$_{هـ}$ ١ = ٠ ⇐ ($\frac{\pi}{4}$ ، ٠) نقطة التماس.

ص = لو$_{هـ}$ (٢ − √٢ جتاس) ⇐ ص' = $\frac{-\sqrt{2} \times -\text{جاس}}{2 - \sqrt{2}\,\text{جتاس}}$

ميل المماس = ص'$_{س=\frac{\pi}{4}}$ = $\frac{\sqrt{2}\,\text{جا}(\frac{\pi}{4})}{2 - \sqrt{2}\,\text{جتا}(\frac{\pi}{4})}$ = $\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}$ = $\frac{1}{2-1}$ = ١

م = (١) (س$_1$ ، ص$_1$) = ($\frac{\pi}{4}$ ، ٠)

معادلة المماس/ ص − ص$_1$ = م(س − س$_1$) ⇐ ص − ٠ = ١(س − $\frac{\pi}{4}$)

⇐ ص = س − $\frac{\pi}{4}$

أ.مي حواري

• 2020 دور ثاني/ إذا كان جا^2(ق(٢س)) = $\frac{3}{س}$ + $\frac{1}{2}$ ، س ≠ ٠ وكان ق(٦) = $\frac{\pi}{3}$ جد قيمة ق'(٦)

الحل/ ٢س = ٦ ⇐ س = ٣

جا^2(ق(٢س)) = $\frac{3}{س}$ + $\frac{1}{2}$ ⇐ ٢جا(ق(٢س)) جتا(ق(٢س)) ق'(٢س) × ٢ = $\frac{-3}{س^2}$ |$_{س=3}$

⇐ ٢جا(ق(٦)) جتا(ق(٦)) × ق'(٦) × ٢ = $\frac{-3}{(3)^2}$

٢جا($\frac{\pi}{3}$) جتا($\frac{\pi}{3}$) × ق'(٦) × ٢ = $\frac{-1}{3}$

٢ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × $\frac{1}{2}$ × ق'(٦) × ٢ = $\frac{-1}{3}$ ⇐ √٣ ق'(٦) = $\frac{-1}{3}$ ⇐ ق'(٦) = $\frac{-1}{3\sqrt{3}}$

• 2020 دور ثالث/ إذا كان ص = ع^2 − ٢ع ، ع = ٤ + ظا(٢س) جد $\frac{دص}{دس}$ عندما (س = ٠)

الحل/ ص = ع^2 − ٢ع ع = ٤ + ظا(٢س)

$\frac{دص}{دع}$ = ٢ع − ٢ $\frac{دع}{دس}$ = قا^2(٢س) × ٢

عندما س = ٠ ⇐ ع = ٤ + ظا(٠) ⇐ ع = ٤

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{دع}$ × $\frac{دع}{دس}$ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = (٢ع − ٢) × ٢ قا^2(٢س) |$_{س=0,\ ع=4}$

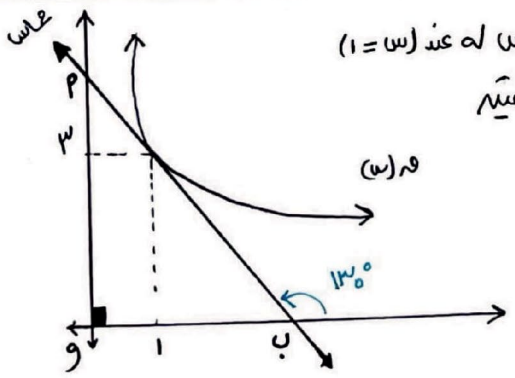
= (٨ − ٢) × ٢ قا^2(٠)

= ٦ × ٢ × ١ = ١٢

• 2021 دور أول/ الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) والمماس له عند (س = ١)

إذا كان المثلث (أ و ب) قائم الزاوية في (و) ومتساوي الساقين

جد ل'(١) ، إذا كان ل(س) = ق^2(س) − ق(س^2)



الحل/ △ أ و ب قائم الزاوية ومتساوي الساقين

⇐ ∠ب = ∠أ = $\frac{180 - 90}{2}$ = ٤٥°

⇐ ق'(١) = ميل المماس = ظا(١٨٠ − ٤٥)°

ق'(١) = ظا ١٣٥ = −١

من الرسمة ق(١) = ٣

$ل(س) = ق^2(س) - ق(س^2)$

$ل'(س) = 2ق(س)\,ق'(س) - ق'(س^2) \times 2س$

$ل'(1) = 2ق(1)\,ق'(1) - 2ق'(1) \Leftarrow ل'(1) = 2\times3\times-1 - 2\times-1 = -6+2 = -4$

• 2021 دور أول/ إذا كان $ق(س) = س^2\,قا(\frac{\pi}{س})$ ، $س \neq 0$ ، ما قيمة $ق'(1)$

الحل/ $ق'(س) = س^2\,قا(\frac{\pi}{س})\,ظا(\frac{\pi}{س}) \times \frac{-\pi}{س^2} + قا(\frac{\pi}{س}) \times 2س$

$ق'(1) = قا(\pi)\,ظا(\pi) \times -\pi + 2\,قا\,\pi$

$= \frac{1}{قتا(\pi)} \times 0 \times -\pi + 2 \times \frac{1}{قتا\,\pi} = \frac{2}{-1} = -2$

• 2021 دور أول/ إذا كان $ص = (\sqrt{ع} + هـ)^3$ ، $ع = هـ^{-2س}$ حيث هـ العدد النيبري ، جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = -1$

الحل/ $ص = (\sqrt{ع} + هـ)^3$

$\frac{دص}{دع} = 3(\sqrt{ع} + هـ)^2 \times \frac{1}{2\sqrt{ع}}$

$ع = هـ^{-2س}$

$\frac{دع}{دس} = -2هـ^{-2س}$

عندما $س = -1 \Leftarrow ع = هـ^{-2\times-1} = هـ^2$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{3}{2\sqrt{ع}}(\sqrt{ع} + هـ)^2 \times -2هـ^{-2س}$ ، $س = -1$ ، $ع = هـ^2$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{3}{\sqrt{هـ^2}}(\sqrt{هـ^2} + هـ)^2 \times -هـ^{-2\times-1}$

$= \frac{3}{هـ}(هـ + هـ)^2 \times -هـ^2 = \frac{-3هـ^2}{هـ}(2هـ)^2 = -3هـ \times 4هـ^2 = -12هـ^3$

• 2021 دور أول/ إذا كان $ق(س)$ كثير حدود حيث $ق(2س) = 9س + س^2 - ق(س)$ جد قيمة $\lim_{س \to 0} \frac{3س - ق(س)}{س^2}$

أ.مي حواري

الحل/ $ق(2س) + ق(س) = 9س + س^2$ ، $س = 0$

$ق(0) + ق(0) = 0$

$2ق(0) = 0 \Leftarrow ق(0) = 0$

* $ق(2س) + ق(س) = 9س + س^2$ نشتق

$2ق'(2س) + ق'(س) = 9 + 2س$ ، $س = 0$

$2ق'(0) + ق'(0) = 9$

$3ق'(0) = 9 \Leftarrow ق'(0) = 3$

$2ق'(2س) + ق'(س) = 9 + 2س$

$2ق''(2س) \times 2 + ق''(س) = 2$ ، $س = 0$

$4ق''(0) + ق''(0) = 2$

$5ق''(0) = 2 \Leftarrow ق''(0) = \frac{2}{5}$

$\lim_{س \to 0} \frac{3س - ق(س)}{س^2} = \frac{0\times3 - ق(0)}{0} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to 0} \frac{3 - ق'(س)}{2س} = \frac{3 - ق'(0)}{0} = \frac{3-3}{0} = \frac{0}{0}$

لوبيتال مرة ثانية/ $\lim_{س \to 0} \frac{-ق''(س)}{2} = \frac{-ق''(0)}{2} = \frac{-2}{5} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}$

• 2021 دور أول/ إذا كان $ق(س) = (س+٢)^{ن+٢}$ ، $ق''(س) = ٤٢(س+٢)^{ن}$ ، $ن > ٠$ ما قيمة $ق'(-١)$

الحل/ $ق'(س) = (ن+٢)(س+٢)^{ن+١}$

$ق''(س) = (ن+٢)(ن+١)(س+٢)^{ن}$

$٤٢(س+٢)^{ن} = (ن+٢)(ن+١)(س+٢)^{ن}$ بالمقارنة

$٤٢ = (ن+٢)(ن+١) \Leftarrow ٤٢ = ن^٢+٣ن+٢ \Leftarrow ن^٢+٣ن-٤٠ = ٠$

$\Leftarrow (ن+٨)(ن \mp ٥) = ٠$

إما $ن \mp ٥ = ٠ \Leftarrow ن = ٥$

أو $ن + ٨ = ٠ \Leftarrow ن = -٨$ ، $ن > ٠$ ✗

$\Leftarrow ق(س) = (س+٢)^{٧} \Leftarrow ق'(س) = ٧(س+٢)^{٦}$

$ق'(-١) = ٧(-١+٢)^{٦} = ٧$

أ.مي حواري

• 2021 دور ثاني/ إذا كان $ق(س) = س^٣ - ٢س$ ، $هـ(س) = \frac{٤}{س}$ ما قيمة $(ق \circ هـ)'(٢)$

الحل/ $ق(س) = س^٣ - ٢س$ ، $هـ(س) = \frac{٤}{س} \leftarrow هـ(٢) = \frac{٤}{٢} = ٢$

$ق'(س) = ٣س^٢ - ٢$ ، $هـ'(س) = \frac{-٤}{س^٢} \leftarrow هـ'(٢) = \frac{-٤}{٤} = -١$

$ق''(س) = ٦س$

$(ق \circ هـ)'(٢) = ق''(هـ(٢))\, هـ'(٢)$

$ق''(٢) \times -١ = ٦ \times ٢ \times -١ = -١٢$

• 2021 دور ثاني/ احسب $\lim_{س \to ٠} \frac{قا(٢س) - ١}{س^٢}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل/ $\lim_{س \to ٠} \frac{قا(٢س) - ١}{س^٢} = \frac{قا(٠) - ١}{(٠)^٢} = \frac{١ - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٠} \frac{\cancel{٢}قا(٢س)\,ظا(٢س)}{\cancel{٢}س} = \lim_{س \to ٠} قا(٢س) \times \lim_{س \to ٠} \frac{ظا(٢س)}{س} = قا(٠) \times \frac{ظا(٠)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

تعويض مباشر

باستخدام لوبيتال

$= قا(٠) \times \lim_{س \to ٠} \frac{قا^٢(٢س) \times ٢}{١}$

$= ١ \times ٢ \times قا^٢(٠) = ٢ \times ١ = ٢$

• 2021 دور ثاني/ إذا علمت أن $ق(س) = \begin{cases} \frac{٣}{٢-س} & ، س < ١ \\ ب س^٢ + أ س - ١ & ، س \geq ١ \end{cases}$ قابلاً للاشتقاق

على 2 ، جد:

١/ قيمة كل من الثابتين أ ، ب

٢/ $(ق \circ ق)'(٠)$

الحل/ 1/ $\text{قا}(1)$ موجودة ← $\text{قا}(س)$ متصل عند $س=1$

$\text{قا}(1)^+ = \text{قا}(1)^-$

$\frac{-3\times 1-1}{(2-1)^2} = 2ب(1)+ج$

$-4 = ب+ج$ ← معادلة (1)

نها$_{س\to 1^+}$ $(ب س^2+ج س-1)$ = نها$_{س\to 1^-}$ $\left(\frac{3}{2-س}\right)$

$ب+ج-1 = 3$

$ب+ج = 4$ ← معادلة (2)

بطرح (1) من (2): $ب=-1$ نعوضها في (2) ← $-1+ج=4$ ← $ج=5$

$\text{قا}(س) = \begin{cases} \frac{3}{2-س} & س<1 \\ -س^2+5س-1 & 1\le س<2 \\ \frac{3}{(2-س)^2}+5س+5 & س\ge 2 \end{cases}$

$(\text{قا}\circ\text{قا})'(ن) = \text{قا}'(\text{قا}(ن))\,\text{قا}'(ن)$

$= \text{قا}'(\frac{3}{4})\times\frac{3}{4}$

$= 2\times\frac{3}{4}$

$= \frac{3}{2}$

$\text{قا}'(ن) = \frac{3}{(2-ن)^2}$

$\text{قا}'(\frac{3}{4}) = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12$

$\text{قا}'(ن) = \frac{-2\times 3}{(2-ن)^3}$

$\text{قا}'(\frac{3}{4}) = \frac{-6}{\frac{1}{8}} = -48$

• 2021 دورثاني/ إذا كان $\text{قا}(س) = 4\,\text{جا}(\frac{\pi}{4}س)$ و $\text{ه}(س) = 2س^2+1$ وكانت $(\text{قا}\circ\text{ه})'(1) = 24$

ما قيمة الثابت 4

الحل/ $\text{قا}(س) = 4\,\text{جا}(\frac{\pi}{4}س)$

$\text{قا}'(س) = 4\times\frac{\pi}{4}\,\text{جتا}(\frac{\pi}{4}س)$

$(\text{قا}\circ\text{ه})'(1) = \text{قا}'(\text{ه}(1))\,\text{ه}'(1)$

$24 = \text{قا}'(3)\times 4$

$24 = 3\pi\,\text{جتا}(\frac{3\pi}{4})\times 8$

$\text{جتا}(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$-3\pi\sqrt{2} = 8$

$\text{ه}(س) = 2س^2+1$ ← $\text{ه}(1) = 2+1 = 3$

$\text{ه}'(س) = 4س$ ← $\text{ه}'(1) = 4$

$\text{قا}'(س) = 4\times\frac{\pi}{4}\,\text{جتا}(\frac{\pi}{4}س)$

$\text{قا}'(3) = \pi\,\text{جتا}(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$-\frac{\pi}{\sqrt{2}} = -3\pi$

$\sqrt{2} = 1$

$د = \frac{-\sqrt{2}}{\pi}$

أ.مي حواري

• 2021 دورثالث/ إذا كانت معادلة المماس لمنحنى $\text{قا}(س)$ عند $(س=6)$ هي $ص = س-2$

ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى $\text{ه}(س)$ عند $(س=2)$ هي $ص = -3س+8$ ما قيمة $(\text{قا}\circ\text{ه})'(6)$

الحل/ $ص = س-2$ مماس $\text{قا}(س)$

$(6, \text{قا}(6))$ ∈ المماس ← $\text{قا}(6)-6=2$ ← $\text{قا}(6)=8$ ← $\text{ه}(8)=2$

$ص = س-2$ ← $صَ = 1$ ← ميل المماس $= \frac{1}{2}$ ← $\text{ه}'(6) = \frac{1}{2}$

$ص = -3س+8$ عمودي لـ $\text{ه}(س)$

$(2, \text{ه}(2))$ ∈ $\text{ه}(س)$ ← $\text{ه}(2) = -3\times 2+8 = 2$

$ص = -3س+8$ ← $صَ = -3$ = ميل العمودي ← $-\frac{1}{3}$ = ميل المماس $= \text{ه}'(2)$

$(\text{قا}\circ\text{ه})'(6) = \text{ه}'(\text{قا}(6))\,\text{قا}'(6) = \text{ه}'(2)\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

• 2021 دور ثالث/ إذا كان ق(س) = { أس² + س + ٣ ، ∴ ≤ س ≤ ٢ ؛ ب − ٣س ، ٢ < س ≤ ٣ }

قابلاً للاشتقاق عند (س = ٢) ، جد:

١/ ما قيم الثابتين أ ، ب

٢/ إذا كان هـ(س) = ٣ / (٥ − س) ما قيمة (ق∘هـ)′(٢)

الحل/ ١/ قَ(٢) موجودة

قَ(٢)⁺ = قَ(٢)⁻ ← ق(س) متصل عند س = ٢

−٣ = ٢أس + ١ | س = ٢

−٣ = ٤أ + ١

−٤ = ٤أ ⇐ −١ = أ

نها س ← ٢⁺ (ب − ٣س) = نها س ← ٢⁻ (−س² + س + ٣)

ب − ٦ = −٤ + ٢ + ٣

ب = ٧

٢/ (ق∘هـ)′(٢) = قَ(هـ(٢)) هـَ(٢)

= قَ(١) × ١/٣

= −١ × ١/٣

= −١/٣

هـ(س) = ٣ / (٥ − س) ⇐ هـ(٢) = ٣/٣ = ١

هـَ(س) = (−٣ × −١) / (٥ − س)² ⇐ هـَ(٢) = ٣/٣² = ١/٣

قَ(١) = −٢س + ١ | س = ١ = −٢ + ١ = −١

• 2022 دور أول/ إذا كان ق(س) = ٢س² ، وكان ميل المماس لمنحنى هـ(س) عند (١ ، أ) يساوي (ب)

وكانت (ق∘هـ)′(١) = (هـ∘ق)′(١) بين أن هـَ(٢) = أ × ب

الحل/ ميل المماس لـ هـ(س) عند (١ ، أ) = ب ⇐ هـَ(١) = ب

⇐ هـ(١) = أ

ق(س) = ٢س² ⇐ قَ(س) = ٤س ⇐ قَ(١) = ٤

ق(١) = ٢(١)² = ٢

* (ق∘هـ)′(١) = (هـ∘ق)′(١) ⇐ قَ(هـ(١)) هـَ(١) = هـَ(ق(١)) قَ(١)

قَ(أ) × ب = هـَ(٢) × ٤

~~٤~~أ × ب = هـَ(٢) × ~~٤~~

أ × ب = هـَ(٢) #

أ.مي حواري

• 2022 دور أول/ إذا كان ٣ص = ٣ظتاس + ظتا³س بين أن/ صً / صَ = −٤ظتاس

الحل/ (٣صَ = −٣قتا²س + ٣ظتا²س × −قتا²س) / ٣

صَ = −قتا²س + −قتا²س ظتا²س

صَ = −قتا²س (١ + ظتا²س) = −قتا²س × قتا²س

صَ = −قتا⁴س

صً = −٤قتا³س × −قتاس ظتاس = ٤قتا⁴س ظتاس.

المطلوب/ صً / صَ = (٤قتا⁴س × ظتاس) / (−قتا⁴س) = −٤ظتاس #

• 2022 دور أول / إذا كان $\lim_{س \to 1} \frac{2ق^2(س) - 2}{س^2 - 1} = 6$ ، $هـ(س) = \sqrt[3]{ق(س)}$

ق(س) كثير حدود موجب ، جد $هـ'(1)$

الحل / $\lim_{س \to 1} \frac{2ق^2(س) - 2}{س^2 - 1} = \frac{2ق^2(1) - 2}{1 - 1} = \frac{2ق^2(1) - 2}{0}$

بما أن المقام = 0 والنهاية موجودة ⇐ البسط = 0 ⇐ $2ق^2(1) - 2 = 0$

$2ق^2(1) = 2$ ⇐ $ق^2(1) = 1$ ⟵ $ق(1) = 1$ ✓

$ق(1) = -1$ ، $ق(س) > 0$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to 1} \frac{4ق(س)\,ق'(س)}{2س} = 6$

$2ق(1)\,ق'(1) = 6$ ⇐ $2 \times 1\,ق'(1) = 6$ ⇐ $ق'(1) = 3$

* $هـ(س) = (ق(س))^{\frac{1}{3}}$

$هـ'(س) = \frac{1}{3}(ق(س))^{-\frac{2}{3}}\,ق'(س)$ ⇐ $هـ'(1) = \frac{1}{3}(ق(1))^{-\frac{2}{3}}\,ق'(1)$

$= \frac{1}{3}(1)^{-\frac{2}{3}} \times 3 = \frac{1}{3} \times 1 \times 3 = 1$

• 2022 دور ثاني / إذا كان الاقتران $ق(س) = أ\,جا(\frac{\pi}{6}س)$ ، $هـ(س) = س^2 + 1$ وكان $(ق \circ هـ)'(1) = \frac{\pi}{3}$ ، ما قيمة الثابت أ

الحل / $ق(س) = أ\,جا(\frac{\pi}{6}س)$ ، $هـ(س) = س^2 + 1$ ⟵ $هـ(1) = 1 + 1 = 2$

$ق'(س) = \frac{أ\pi}{6}\,جتا(\frac{\pi}{6}س)$ ، $هـ'(س) = 2س$ ⟵ $هـ'(1) = 2(1) = 2$

$(ق \circ هـ)'(1) = ق'(هـ(1))\,هـ'(1)$ ⇐ $\frac{\pi}{3} = ق'(2) \times 2$

$\frac{\pi}{3} = \frac{أ\pi}{6}\,جتا(\frac{2\pi}{6}) \times 2$

$\frac{1}{3} = \frac{أ}{3}\,جتا(\frac{\pi}{3})$ ⇐ $1 = أ \times \frac{1}{2}$ ⇐ $أ = 2$

أ.مي حواري

• 2022 دور ثاني / إذا كان الاقتران $ل(س) = ق^3(س) \times هـ(س^3)$ وكانت $هـ(1) = 1$ ، $ل(1) = 27$

$(ق \times هـ)'(1) = 0$ ما قيمة $ل'(1)$

الحل / $ل(س) = ق^3(س)\,هـ(س^3)$

$ل(1) = ق^3(1)\,هـ(1)$ ⇐ $27 = ق^3(1)$ ⇐ $3 = ق(1)$

* $(ق \times هـ)'(1) = 0$ ⇐ $ق(1)\,هـ'(1) + هـ(1)\,ق'(1) = 0$

$3هـ'(1) + 1 \times ق'(1) = 0$ ⇐ $\boxed{3هـ'(1) + ق'(1) = 0}$

$ل(س) = ق^3(س) \times هـ(س^3)$

$ل'(س) = ق^3(س) \times هـ'(س^3) \times 3س^2 + هـ(س^3) \times 3ق^2(س)\,ق'(س)$

$ل'(1) = 3ق^3(1)\,هـ'(1) + 3هـ(1)\,ق^2(1)\,ق'(1)$

$ل'(1) = 3(3)^3\,هـ'(1) + 3(1)(3)^2\,ق'(1)$

$ل'(1) = 27(\boxed{3هـ'(1) + ق'(1)}) = 27 \times 0 = 135$

• 2022 دور ثاني / إذا كان $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{م}(\text{س}))}{2\text{س}}$ ، $\text{م}(\text{س}) > 2$ ؛ وكان $\text{م}(2) = \text{هـ}$ ، $\text{م}'(2) = \frac{3}{2}\text{هـ}$

جد قيمة $\text{ق}''(2)$

الحل / $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{م}(\text{س}))}{2\text{س}} \Leftarrow \text{ق}''(\text{س}) = \frac{2\text{س} \times \frac{\text{م}'(\text{س})}{\text{م}(\text{س})} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{م}(\text{س}) \times 2}{(2\text{س})^2}$

$\Leftarrow \text{ق}''(2) = \frac{4\frac{\text{م}'(2)}{\text{م}(2)} - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{م}(2))}{(4)^2} = \frac{4 \times \frac{\frac{3}{2}\text{هـ}}{\text{هـ}} - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}}{16} = \frac{6-2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

• 2023 دور أول / إذا كان $\text{ص} = \left(\frac{\text{ع}+1}{\text{ع}-1}\right)^2$ ، $\text{ع} \neq 1$ ، $\text{ع} = \text{س}^2 + 2\text{س}$ جد قيمة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = 1$

$\text{ع} = \text{س}^2 + 2\text{س}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = 2\text{س} + 2$

الحل / $\text{ص} = \left(\frac{\text{ع}+1}{\text{ع}-1}\right)^2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = 2\left(\frac{\text{ع}+1}{\text{ع}-1}\right)\left(\frac{\text{ع}-1-(\text{ع}+1)}{(\text{ع}-1)^2}\right)$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{2(\text{ع}+1)}{(\text{ع}-1)} \times \frac{-2}{(\text{ع}-1)^2} = \frac{-4(\text{ع}+1)}{(\text{ع}-1)^3}$

أ.مي حواري

عندما $\text{س} = 1 \Leftarrow \text{ع} = 1+2 \Leftarrow \text{ع} = 3$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{-4(\text{ع}+1)}{(\text{ع}-1)^3} \times (2\text{س}+2) \Big|_{\substack{\text{س}=1 \\ \text{ع}=3}}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-4(4)}{2^3} \times 4 = \frac{-4 \times 4 \times 4}{2 \times 2 \times 2} = \frac{-16}{2} = -8$

• 2023 دور أول / إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{\text{س}+3} - \text{أ} & \text{س} \geq 1 \\ \text{س}^2 - \text{ب}\text{س} & \text{س} < 1 \end{cases}$ ، جد قيمة كل من الثابتين أ، ب علماً بأن $\text{ق}'(\text{س})$ موجودة لجميع قيم س الحقيقية.

الحل / $\text{ق}'(\text{س})$ موجودة $\forall \text{س} \in \mathbb{Z} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س})$ موجودة عند $(\text{س} = 1)$

$\text{ق}'(1)$ موجودة ← $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $(\text{س} = 1)$

$\text{ق}'(1)^+ = \text{ق}'(1)^-$

$\frac{1}{2\sqrt{\text{س}+3}} = 2\text{س} - \text{ب} \Big|_{\text{س}=1}$

$\frac{1}{2\sqrt{4}} = 2 - \text{ب} \Leftarrow \frac{1}{4} = 2 - \text{ب}$

$\Leftarrow \text{ب} = 2 - \frac{1}{4} \Leftarrow \text{ب} = \frac{8-1}{4} \Leftarrow \text{ب} = \frac{7}{4}$

$\lim_{\text{س} \to 1^+} (\sqrt{\text{س}+3} - \text{أ}) = \lim_{\text{س} \to 1^-} (\text{س}^2 - \frac{7}{4}\text{س})$

$\sqrt{1+3} - \text{أ} = 1 - \frac{7}{4}$

$2 - \text{أ} = -\frac{3}{4}$

$2 + \frac{3}{4} = \text{أ} \Leftarrow \frac{8+3}{4} = \text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{11}{4}$

• 2023 دور أول / إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 + 5\text{أ}\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}+1}{2\text{أ}}$ وكان $(\text{ق} \circ \text{هـ})'(1) = \frac{13}{2}$

ما قيمة / قيم الثابت أ

الحل / $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 + 5\text{أ}\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س} + 5\text{أ}$

$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{1}{2\text{أ}}(\text{س}+1) \leftarrow \text{هـ}(1) = \frac{1}{2\text{أ}} \times 2 = \frac{1}{\text{أ}}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \frac{1}{2\text{أ}}$

$(\text{ق}\circ\text{هـ})'(1) = \text{ق}'(\text{هـ}(1))\,\text{هـ}'(1)$

$\frac{13}{2} = \text{ق}'(\frac{1}{\text{أ}}) \times \frac{1}{2\text{أ}} \Leftarrow 13 = (2\times\frac{1}{\text{أ}} + 0\text{أ}) \times \frac{1}{\text{أ}} \Leftarrow 13 = \frac{2}{\text{أ}^2} + 0$

$\Leftarrow 8 = \frac{2}{\text{أ}^2} \Leftarrow 4 = \frac{1}{\text{أ}^2} \Leftarrow \text{أ}^2 = \frac{1}{4} \Leftarrow \text{أ} = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$

• 2023 دور أول / إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[3]{\text{س}^2+7}$ وكان $\text{هـ}(1) = 1$ ، $\text{هـ}'(1) = 12$ جد قيمة

$\lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\text{ق}\circ\text{هـ})^2(\text{س}) - 4}{1-\text{س}}$

الحل / $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{ق}^2(\text{هـ}(\text{س})) - 4}{1-\text{س}} = \frac{\text{ق}^2(\text{هـ}(1)) - 4}{1-1} = \frac{\text{ق}^2(1) - 4}{0} = \frac{4-4}{0}$

$= \frac{0}{0}$

$\Leftarrow$ باستخدام لوبيتال / $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{2\text{ق}(\text{هـ}(\text{س}))\,\text{ق}'(\text{هـ}(\text{س}))\,\text{هـ}'(\text{س})}{-1}$

$= -2\text{ق}(\text{هـ}(1))\,\text{ق}'(\text{هـ}(1))\,\text{هـ}'(1)$

$= -2\text{ق}(1)\,\text{ق}'(1) \times 12$

$= -2\times 2\times \frac{1}{6}\times 12 = -4\times 2 = -8$

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[3]{\text{س}^2+7}$

$\text{ق}(1) = \sqrt[3]{8} = 2$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^2+7)^{\frac{1}{3}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{3}(\text{س}^2+7)^{-\frac{2}{3}} \times 2\text{س}$

$\text{ق}'(1) = \frac{2}{3}(8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(2)^{-\frac{2}{3}}$

$\Leftarrow \text{ق}'(1) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

أ.مي حواري

• 2023 دور ثاني / إذا كان الاقترانان $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{جاس}$ ، $\text{أ} \neq 0$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{3\text{س}}{\text{س}^2+1}$

جد قيمة / قيم الثابت أ علماً بأن $(\text{هـ}\circ\text{ق})'(\frac{\pi}{6}) = 0$

الحل / $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{جاس}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{أ}\,\text{جتاس}$

$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{3\text{س}}{\text{س}^2+1}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^2+1)(3) - 3\text{س}(2\text{س})}{(\text{س}^2+1)^2}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \frac{3\text{س}^2+3-6\text{س}^2}{(\text{س}^2+1)^2} = \frac{3-3\text{س}^2}{(\text{س}^2+1)^2}$

* $(\text{هـ}\circ\text{ق})'(\frac{\pi}{6}) = \text{هـ}'(\text{ق}(\frac{\pi}{6}))\,\text{ق}'(\frac{\pi}{6}) = 0$

إما $\text{ق}'(\frac{\pi}{6}) = 0 \Leftarrow \text{أ}\,\text{جتا}\frac{\pi}{6} = 0 \Leftarrow \text{أ} = 0$ مرفوض $\text{أ} \neq 0$

أو $\text{هـ}'(\text{ق}(\frac{\pi}{6})) = 0 \Leftarrow \text{هـ}'(\text{أ}\,\text{جا}\frac{\pi}{6}) = 0 \Leftarrow \text{هـ}'(\frac{\text{أ}}{2}) = 0$

$\Leftarrow \frac{3 - 3(\frac{\text{أ}}{2})^2}{((\frac{\text{أ}}{2})^2+1)^2} = 0 \Leftarrow 3 - 3(\frac{\text{أ}^2}{4}) = 0 \Leftarrow 3 = \frac{3\text{أ}^2}{4} \Leftarrow 1 = \frac{\text{أ}^2}{4}$

$\Leftarrow \text{أ}^2 = 4 \Leftarrow \text{أ} = \{2, -2\}$

• 2023 دور ثالث / إذا كانت $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{ق}(3\text{س}-5)+2}{3\,\text{جتا}(\frac{\pi}{2}\text{س})} = \text{ل}$ وكانت $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{هـ}^{4\text{س}}-1}{\text{جاس}} = \text{ك}$ ما قيمة

$\text{ك}\times\text{ل}$ علماً بأن $\text{ق}(-2) = -2$ ، $\text{ق}'(-2) = -9$

الحل/ * $\lim_{س \to ١} \frac{ق(٣س-٥)+٢}{٣ جتا(\frac{\pi}{٢}س)} = \frac{ق(-٢)+٢}{٣ جتا(\frac{\pi}{٢})} = \frac{-٢+٢}{٣ \times ٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ١} \frac{\cancel{٣}\,ق'(٣س-٥)}{\cancel{٣}\times -جا(\frac{\pi}{٢}س)\times\frac{\pi}{٢}} = \frac{ق'(-٢)}{-جا(\frac{\pi}{٢})\times\frac{\pi}{٢}} = \frac{-٩}{-١\times\frac{\pi}{٢}} = ٩\times\frac{٢}{\pi} = \frac{١٨}{\pi} = ل$

* $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{٤س}-١}{جاس} = \frac{هـ^{٠}-١}{جا(٠)} = \frac{١-١}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{س \to ٠} \frac{٤هـ^{٤س}}{قباس} = \frac{٤هـ^{٠}}{قبا(٠)} = \frac{٤\times١}{١} = ٤ = ك$

المطلوب/ $ك \times ل = ٤ \times \frac{١٨}{\pi} = \frac{٧٢}{\pi}$

• 2023 دور ثالث/ $م(س) = هـ^{٢س} + \frac{س^٢+ق(س)}{ع'(س)}$ وكان $ق(١)=٣$ ، $ق'(١)=٥$ ، $ع(١)=٦$

$ع'(١)=٢$ ، $ع''(١)=-٣$ ، ما قيمة $م'(١)$

أ.مي حواري

الحل/ $م(س) = هـ^{٢س} + \frac{س^٢+ق(س)}{ع'(س)}$

$م'(س) = ٢هـ^{٢س} + \left(\frac{ع'(س)(٢س+ق'(س)) - (س^٢+ق(س))ع''(س)}{(ع'(س))^٢}\right)$

$م'(١) = ٢هـ^{٢} + \left(\frac{ع'(١)(٢+ق'(١)) - (١+ق(١))ع''(١)}{(ع'(١))^٢}\right)$

$م'(١) = ٢هـ^{٢} + \left(\frac{٢(٢+٥) - (١+٣)(-٣)}{٢^٢}\right) = ٢هـ^{٢} + \left(\frac{١٤+١٢}{٤}\right)$

$م'(١) = ٢هـ^{٢} + \frac{٢٦}{٤} = ٢هـ^{٢} + \frac{١٣}{٢} \Leftarrow م'(١) = ٢هـ^{٢} + ٦,٥$

• 2024 دور أول/ إذا كان $ق(س) = س^٣ + ٤س - ٢$ ، $هـ(س) = \sqrt{أس}$ وكان $(ق\circ هـ)'(٢) = ١٨$

$أ > ٠$

ما قيمة / قيم الثابت أ

الحل/ $ق(س) = س^٣ + ٤س - ٢$

$ق'(س) = ٣س^٢ + ٤$

$ق''(س) = ٦س$

$هـ(س) = \sqrt{أ}\sqrt{س} \Leftarrow هـ(٢) = \sqrt{أ}\times\sqrt{٢} = \sqrt{٢أ}$

$هـ'(س) = \frac{\sqrt{أ}}{٢\sqrt{س}} \Leftarrow هـ'(٢) = \frac{\sqrt{أ}}{٢\sqrt{٢}}$

$(ق\circ هـ)'(٢) = ق''(هـ(٢))\,هـ'(٢) \Leftarrow ١٨ = ق''(\sqrt{٢أ}) \times \frac{\sqrt{أ}}{٢\sqrt{٢}}$

$\Leftarrow ١٨ = ٦\sqrt{٢أ} \times \frac{\sqrt{أ}}{٢\sqrt{٢}}$ ٣

$|أ| = أ$ لأن $أ > ٠$ «تحت جذر تربيعي»

$\Leftarrow ٣ = \frac{\sqrt{٢أ^٢}}{٢\sqrt{٢}} \Leftarrow ٣ = \frac{\sqrt{٢}\times\sqrt{أ^٢}}{٢\sqrt{٢}} \Leftarrow ٣ = \frac{أ}{٢} \Leftarrow ٦ = أ$

• 2024 دور أول/ جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = جاس + جا(٢س) عندما س = $\frac{\pi}{2}$

الحل/ جا($\frac{\pi}{2}$) + جا($\frac{2\pi}{2}$) = ق($\frac{\pi}{2}$) ⇐ ١ + ٠ = ق($\frac{\pi}{2}$) ⇐ ١ = ق($\frac{\pi}{2}$)

⇐ ($\frac{\pi}{2}$ ، ١) نقطة التماس.

ق(س) = جاس + جا(٢س) ⇐ قَ(س) = جتاس + ٢جتا(٢س)

قَ($\frac{\pi}{2}$) = جتا($\frac{\pi}{2}$) + ٢جتا(π) = ٠ + ٢×-١ = -٢ = ميل المماس

⇐ ميل العمودي = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}}$ = $\frac{-1}{-2}$ = $\frac{1}{2}$

معادلة العمودي/ ص - ص١ = م(س - س١)

ص - ١ = $\frac{1}{2}$(س - $\frac{\pi}{2}$) ⇐ ص - ١ = $\frac{1}{2}$س - $\frac{\pi}{4}$ ⇐ ص = $\frac{1}{2}$س - $\frac{\pi}{4}$ + ١

• 2024 دور أول/ إذا كان ص = $\frac{\text{س هـ}^{\text{٦س}}}{\text{جاس}}$ ، جاس ≠ ٠ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما (س = $\frac{\pi}{2}$)

الحل/ صَ = $\frac{\text{جاس}(\text{س هـ}^{\text{٦س}} \times ٦ + \text{هـ}^{\text{٦س}}) - \text{س هـ}^{\text{٦س}}\,\text{جتاس}}{(\text{جاس})^2}$

أ.مي حواري

صَ$_{\text{س}=\frac{\pi}{2}}$ = $\frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2})(\frac{6\pi}{2}\text{هـ}^{\frac{6\pi}{2}} + \text{هـ}^{\frac{6\pi}{2}}) - \frac{\pi}{2}\text{هـ}^{\frac{6\pi}{2}} \times \cancelto{0}{\text{جتا}(\frac{\pi}{2})}}{(\text{جا}(\frac{\pi}{2}))^2}$

⇐ صَ$_{\text{س}=\frac{\pi}{2}}$ = $\frac{1(3\pi\text{هـ}^{3\pi} + \text{هـ}^{3\pi})}{(1)^2}$ = $3\pi\text{هـ}^{3\pi} + \text{هـ}^{3\pi}$ = $\text{هـ}^{3\pi}(3\pi + 1)$

• 2024 دور أول/ إذا كان ق(س) كثير حدود حيث ق(٠) = ٠ ، قَ(٠) = ٧ جد قيمة

$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{هـ}^{\text{ق(س)}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{2\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \text{س}}$

الحل/ $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{هـ}^{\text{ق(س)}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{2\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \text{س}}$ = $\frac{\text{هـ}^{\text{ق(٠)}} - \text{هـ}^{0}}{2\text{لو}_{\text{هـ}}1 - 0}$ = $\frac{\text{هـ}^{0} - 1}{2\times 0 - 0}$ = $\frac{1-1}{0}$ = $\frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{\text{س}\to \text{صفر}} \frac{\text{هـ}^{\text{ق(س)}}\,\text{قَ(س)} - \text{هـ}^{\text{س}}}{\frac{2}{\text{س}+1} - 1}$ = $\frac{\text{هـ}^{\text{ق(٠)}}\,\text{قَ(٠)} - \text{هـ}^{0}}{\frac{2}{1} - 1}$ = $\frac{\text{هـ}^{0}\times 7 - 1}{2-1}$ = $\frac{7-1}{1}$ = ٦

• 2024 دور ثاني/ إذا كان هـ(س) = س² + ٢س - ٤ ، ق(س) = $\begin{cases} 11\text{س} - 16 & \text{، س} \le 4 \\ \text{س}^2 + 3\text{س} & \text{، س} > 4 \end{cases}$

جد (ق∘هـ)'(٢)

الحل/ * (ق∘هـ)'(٢) = قَ(هـ(٢)) هـَ(٢) = قَ(٤) × ٦

هـ(س) = س² + ٢س - ٤ ⇐ هـ(٢) = ٤ + ٤ - ٤ = ٤

هـَ(س) = ٢س + ٢ ⇐ هـَ(٢) = ٢×٢ + ٢ = ٤ + ٢ = ٦

بالنسبة لـ ق(س) عند (س = ٤) تحول نبحث في الاتصال.

$\lim_{\text{س}\to 4^+}(\text{س}^2 + 3\text{س})$ = ١٦ + ١٢ = ٢٨ ، $\lim_{\text{س}\to 4^-}$ ١١س - ١٦ = ٤٤ - ١٦ = ٢٨ = ق(٤)

أ.مي حواري

ق(س) متصل عند (س = ٤)

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ١١ & ، \text{س} \le ٤ \\ ٢\text{س}+٣ & ، \text{س} > ٤ \end{cases}$$

$\text{ق}'(٤)^+ = ٢\times٤+٣ = ٨+٣ = ١١$ / $\text{ق}'(٤)^- = ١١$

$\Leftarrow \text{ق}'(٤)^+ = \text{ق}'(٤)^- = ١١ \Leftarrow \text{ق}'(٤) = ١١$

المطلوب/ $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(٢) = \text{ق}'(٤)\times٦ = ١١\times٦ = ٦٦$

• 2024 دور ثاني/ جد $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \dfrac{\text{ظا}(\frac{\pi}{٤}+٧\text{هـ}) - \text{ظا}(\frac{\pi}{٤}-٧\text{هـ})}{٥\text{هـ}}$

الحل/ $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \dfrac{\text{ظا}(\frac{\pi}{٤}+٧\text{هـ}) - \text{ظا}(\frac{\pi}{٤}-٧\text{هـ})}{٥\text{هـ}} = \dfrac{\text{ظا}(\frac{\pi}{٤}) - \text{ظا}(\frac{\pi}{٤})}{٥\times٠} = \dfrac{١-١}{٠} = \dfrac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \dfrac{\text{قا}^٢(\frac{\pi}{٤}+٧\text{هـ})\times٧ - \text{قا}^٢(\frac{\pi}{٤}-٧\text{هـ})\times-٧}{٥}$

$= \dfrac{٧\text{قا}^٢(\frac{\pi}{٤}) + ٧\text{قا}^٢(\frac{\pi}{٤})}{٥} = \dfrac{١٤\text{قا}^٢(\frac{\pi}{٤})}{٥} = \dfrac{١٤(\sqrt{٢})^٢}{٥} = \dfrac{١٤\times٢}{٥} = \dfrac{٢٨}{٥}$

• 2024 دور ثاني/ إذا كان $\text{ق}(\text{س}^٣+١) = ٥\text{هـ}^{\text{س}-١} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١)^٣$ ما قيمة $\text{ق}'(٢)$

الحل/ $\text{س}^٣+١ = ٢ \Leftarrow \text{س}^٣ = ١ \Leftarrow \text{س} = ١$

$\text{ق}(\text{س}^٣+١) = ٥\text{هـ}^{\text{س}-١} + ٣\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١)$

$\text{ق}'(\text{س}^٣+١)\times٣\text{س}^٢ = ٥\text{هـ}^{\text{س}-١} + \dfrac{٣}{\text{س}+١}\Big|_{\text{س}=١} \Leftarrow ٣\text{ق}'(٢) = ٥\text{هـ}^{١-١} + \dfrac{٣}{١+١}$

$\Leftarrow ٣\text{ق}'(٢) = ٥\times١ + \dfrac{٣}{٢} \Leftarrow ٣\text{ق}'(٢) = \dfrac{١٠+٣}{٢} \Leftarrow (٣\text{ق}'(٢) = \dfrac{١١}{٢})\times\dfrac{١}{٣} \Leftarrow \text{ق}'(٢) = \dfrac{١٣}{٦}$

• 2024 دور ثاني/ إذا كان $\text{ص} = \text{جا}^٤\text{س}$ أثبت أن $\text{ص}'' + ١٦\text{ص} = ١٢\sqrt{\text{ص}}$

الحل/ $\text{ص} = \text{جا}^٤\text{س} \Leftarrow \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{\text{جا}^٤\text{س}} \Leftarrow \sqrt{\text{ص}} = \text{جا}^٢\text{س}$.

$\text{ص}' = ٤\text{جا}^٣\text{س}\,\text{جتا}\text{س}$

$\text{ص}'' = ٤\text{جا}^٣\text{س}\times-\text{جا}\text{س} + \text{جتا}\text{س}\times٤\times٣\text{جا}^٢\text{س}\,\text{جتا}\text{س}$

$\text{ص}'' = -٤\text{جا}^٤\text{س} + ١٢\text{جا}^٢\text{س}\,\text{جتا}^٢\text{س}$

$\text{ص}'' + ١٦\text{ص} = -٤\text{جا}^٤\text{س} + ١٢\text{جا}^٢\text{س}\,\text{جتا}^٢\text{س} + ١٦\text{جا}^٤\text{س}$

$= ١٢\text{جا}^٤\text{س} + ١٢\text{جا}^٢\text{س}\,\text{جتا}^٢\text{س}$ اخراج ١٢جا²س عامل مشترك.

$= ١٢\text{جا}^٢\text{س}(\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س})$

$= ١٢\text{جا}^٢\text{س}\times١$

$= ١٢\sqrt{\text{ص}}$ #

• 2024 (الضفة) دور ثالث/ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \dfrac{١}{\text{س}}$ ، $\text{س} \ne ٠$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{جاس}$ أثبت أن $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(\text{س}) = -\text{ظتا}^٢\text{س}\,\text{جتاس}$.

الحل/ $ق(س) = س + \frac{1}{س}$ ، $هـ(س) = جاس$

$ق'(س) = 1 - \frac{1}{س^2}$ ، $هـ'(س) = جتاس$

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س))\, هـ'(س) = ق'(جاس) \times جتاس$

$\Leftarrow (ق \circ هـ)'(س) = \left(1 - \frac{1}{جا^2 س}\right) جتاس = \left(\frac{جا^2 س - 1}{جا^2 س}\right) \times جتاس$

توحيد مقامات

$= \left(\frac{-جتا^2 س}{جا^2 س}\right) \times جتاس = -ظتا^2 س \times جتاس$ #

أ.مي حواري

• 2024 (مصر) دور ثالث/ إذا كان $ص = ع^2 - \frac{27}{ع}$ ، $ع \neq 0$ ، $ع = 3س^2$ ، $س = أم - 0$

وكان $\left.\frac{دص}{دم}\right|_{س=1} = 54$ ، ما قيمة الثابت أ.

الحل/

$ص = ع^2 - \frac{27}{ع}$ ، $ع = 3س^2$ ، $س = أم - 0$

$\frac{دص}{دع} = 2ع + \frac{27}{ع^2}$ ، $\frac{دع}{دس} = 6س$ ، $\frac{دس}{دم} = أ$

عندما $س = 1 \Leftarrow ع = 3(1)^2 = 3$

$\frac{دص}{دم} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} \times \frac{دس}{دم} \Leftarrow \frac{دص}{دم} = \left(2ع + \frac{27}{ع^2}\right)(6س) \times أ \Big|_{\substack{س=1 \\ ع=3}}$

$\Leftarrow 54 = \left(6 + \frac{27}{9}\right)(6 \times 1) \times أ$

$54 = 9 \times 6 \times أ \Leftarrow 54 = 54أ \Leftarrow أ = 1$

• 2024 (مصر) دور ثالث/ إذا كان الاقترانان ق(س) ، ل(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح حيث

$\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(1+3هـ) - ق(1)}{\sqrt{1+هـ} - 1} = -12$ وكان $ق(س) = ل(2س+1)$ ما قيمة $ل'(3)$

الحل/ $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(1+3هـ) - ق(1)}{\sqrt{1+هـ} - 1} = \frac{ق(1) - ق(1)}{1 - 1} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق'(1+3هـ) \times 3}{\frac{1}{2\sqrt{هـ+1}}} = \frac{3ق'(1)}{\frac{1}{2\sqrt{1}}} = -\cancel{12}^{4} \Leftarrow \frac{ق'(1)}{\frac{1}{2}} = -4$

$\Leftarrow ق'(1) = -2$

$ق(س) = ل(2س+1)$

$ق'(س) = 2ل'(2س+1)$

• عندما $2س + 1 = 3 \Leftarrow 2س = 2 \Leftarrow س = 1$

$ق'(1) = 2ل'(3) \Leftarrow -2 = 2ل'(3)$

$\frac{-2}{2} = ل'(3) \Leftarrow -1 = ل'(3)$

وتظن أنك حُرمت والحق أنك رُحمت ... رحمات الله تترى عليك يا فتى!

• 2025 دور أول / إذا كان $ق(س) = (1+جتا\pi س)(2-جتا\pi س)\left(جا\frac{\pi}{4س}\right)^3$ ، ما قيمة $قَ(\frac{1}{2})$

الحل/

$ق(\frac{1}{2}) = (1+جتا\frac{\pi}{2})(2-جتا\frac{\pi}{2})\left(جا\frac{\pi}{4\times\frac{1}{2}}\right)^3 = (1+0)(2-0)\left(جا\frac{\pi}{2}\right)^3 = 1\times2\times1 = 2$

$\Leftarrow ق(\frac{1}{2}) = 2$

$ق(س) = (1+جتا(\pi س))(2-جتا\pi س)\left(جا\frac{\pi}{4س}\right)^3$ ،، نأخذ اللوغاريتم للطرفين

$لو_هـ ق(س) = لو_هـ(1+جتا\pi س) + لو_هـ(2-جتا\pi س) + 3لو_هـ جا\left(\frac{\pi}{4س}\right)$ نشتق

$\frac{قَ(س)}{ق(س)} = \frac{-\pi جا(\pi س)}{1+جتا\pi س} + \frac{\pi جا(\pi س)}{2-جتا(\pi س)} + 3\times\frac{جتا\left(\frac{\pi}{4س}\right)\times\frac{-\pi}{4س^2}}{جا\left(\frac{\pi}{4س}\right)}$

$\frac{قَ(\frac{1}{2})}{ق(\frac{1}{2})} = \frac{-\pi جا(\frac{\pi}{2})}{1+\cancel{جتا(\frac{\pi}{2})}} + \frac{\pi جا(\frac{\pi}{2})}{2-\cancel{جتا(\frac{\pi}{2})}} + 3\cancel{\frac{جتا(\frac{\pi}{2})\times\frac{-\pi}{4\times\frac{1}{4}}}{جا(\frac{\pi}{2})}}$

$\Leftarrow \frac{قَ(\frac{1}{2})}{2} = -\pi + \frac{\pi}{2} \Leftarrow \frac{قَ(\frac{1}{2})}{\cancel{2}} = \frac{-2\pi+\pi}{\cancel{2}} \Leftarrow قَ(\frac{1}{2}) = -\pi$

• 2025 دور ثاني / إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{ب}{س+أ} & س \geq 0 \\ أس+1+لو_هـ(س+هـ^س) & ، س < 0 \end{cases}$

وكانت $قَ(0)$ موجودة ، ما قيمة الثابتين أ ، ب

الحل/ $قَ(0)$ موجودة ← $ق(س)$ متصل عند $س = 0$

$قَ(0)^+ = قَ(0)^-$

$أ + 0 + \frac{1+هـ^س}{س+هـ^س} = \frac{-ب}{(س+أ)^2}\Big|_{س=0}$

$\Leftarrow أ + \frac{1+هـ^0}{هـ^0} = \frac{-ب}{أ^2}$

$أ + 2 = \frac{-ب}{أ^2}$

$أ+2 = \frac{-أ}{أ^2} \Leftarrow أ+2 = \frac{-1}{أ}$

$أ^2+2أ = -1$

$أ^2+2أ+1 = 0 \Leftarrow (أ+1)^2 = 0 \Leftarrow أ+1 = 0 \Leftarrow أ = -1$

وبما أن $أ = ب \Leftarrow ب = -1$

نعوضها

$\lim_{س\to0^+}(أس+1+لو_هـ(س+هـ^س)) = \lim_{س\to0^-}\left(\frac{ب}{س+أ}\right)$

$\cancel{أ(0)} + لو_هـ(0+هـ^0) + 1 = \frac{ب}{أ}$

$لو_هـ 1 + 1 = \frac{ب}{أ} \Leftarrow 1 = \frac{ب}{أ}$

$\Leftarrow \boxed{أ = ب}$

أ.مي حواري

• 2019 الوسطى / إذا كان $ق(س^3-1) = س^2+1$ ، ما قيمة $\lim_{هـ\to0}\frac{ق(7+3هـ)-ق(7)}{هـ}$

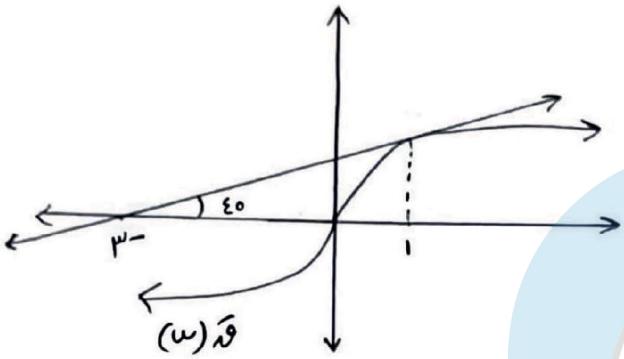
الحل/ $س^3-1 = 7 \Leftarrow س^3 = 8 \Leftarrow س = 2$

$ق(س^3-1) = س^2+1 \Leftarrow 3س^2 قَ(س^3-1) = 2س\Big|_{س=2} \Leftarrow 3\times\cancel{4}قَ(7) = \cancel{4} \Leftarrow قَ(7) = \frac{1}{3}$

$\lim_{هـ\to0}\frac{ق(7+3هـ)-ق(7)}{هـ} = \frac{ق(7)-ق(7)}{هـ} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{هـ\to0} قَ(7+3هـ)\times3 = 3قَ(7) = 3\times\frac{1}{3} = 1$

• 2020 القدس الشريف / الشكل المجاور يمثل منحنى $ق(س)$ إذا كان $ل(س) = ق(س^2) - ق(س) + 1$
جد قيمة $(ق \circ ل)'(1)$



الحل / $(ق \circ ل)'(1) = ق'(ل(1)) \cdot ل'(1)$

$ل(س) = ق(س^2) - ق(س) + 1$

$ل(1) = ق(1) - ق(1) + 1$

$\Leftarrow ل(1) = 1$

$ل(س) = ق(س^2) - ق(س) + 1$

$ل'(س) = 2س\, ق'(س^2) - ق'(س)$

$ل'(1) = 2\, ق'(1) - ق'(1) = ق'(1)$

$\Leftarrow$ المطلوب $(ق \circ ل)'(1) = ق'(ل(1)) \cdot ل'(1)$

$= ق'(1) \times ق'(1)$

$= 1 \times 4$

$= 4$

من الرسمة

$(1، ق(1))$ $(-3، 0)$

الميل $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = ظا\theta$

$\Leftarrow ظا\theta = \frac{ق(1) - 0}{1 - (-3)}$

$\Leftarrow \frac{ق(1)}{4} = 1 \Leftarrow ق(1) = 4$

وأيضاً ميل المماس $= ق'(1) = ظا(45) = 1$

أ.مي حواري

• 2020 خانيونس / إذا كان الاقتران $هـ$ قابلاً للاشتقاق وكان $(هـ \circ ه)(س) = \frac{س^3 + ب}{س + 1}$ ، $ه(1) = 1$ ، $هـ(1) = 4$ وكان $ق(س) = \sqrt[3]{س^3 + 7}$ ما قيمة الثابت ب

الحل / $(هـ \circ ه)(س) = \frac{س^3 + ب}{س + 1} + \frac{1}{2}$ نشتق

$ق(هـ(س)) \cdot هـ'(س) = \frac{(س+1)(3س^2) - (س^3 + ب)}{(س+1)^2}$ | $س = 1$

$ق(هـ(1)) \cdot هـ'(1) = \frac{3 \times 2 - (1 + ب)}{4}$

$ق'(1) = \sqrt[3]{8} = 2$

$\Leftarrow ق'(1) \times 4 = \frac{6 - 1 - ب}{4} \Leftarrow 4 \times 3 = 5 - ب \Leftarrow 3 = 5 - ب \Leftarrow ب = -2$

• 2021 الوسطى / إذا كان $ص = جا(2هـ س)$ أثبت أن $س^4 ص'' + س^3 ص' + 4س ص = 0$

الحل $ص = جا(2هـ س)$

$ص' = جتا(2هـ س) \times \frac{2}{س} \times س \Leftarrow س ص' = 2 جتا(2هـ س)$ نشتق لـ س.

$س ص'' + ص' = -2 \times جا(2هـ س) \times \frac{2}{س} \times س$

$س^2 ص'' + س ص' = -4 جا(2هـ س) \Leftarrow س^2 ص'' + س ص' = -4ص$

$\Leftarrow س^2 ص'' + س ص' + 4ص = 0$

• 2021 شمال غزة / اذا كان هـ(س) = قبا(π/س) ، ق(1/2) = 3 ، قَ(1/2) = √3/π

ما قيمة $\lim_{س \to 3} \frac{(ق \circ هـ)^2(س) - 9}{س^2 - 9}$

الحل/ $\lim_{س \to 3} \frac{ق^2(هـ(س)) - 9}{س^2 - 9} = \frac{ق^2(هـ(3)) - 9}{9 - 9} = \frac{ق^2(\frac{1}{2}) - 9}{0}$

$= \frac{3^2 - 9}{0} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to 3} \frac{2ق(هـ(س))\,قَ(هـ(س))\,هـَ(س)}{2س}$

$= \frac{ق(هـ(3))\,قَ(هـ(3))\,هـَ(3)}{3} = \frac{ق(\frac{1}{2})\,قَ(\frac{1}{2}) \times \frac{\pi\sqrt{3}}{18}}{3}$

$= \frac{\cancel{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{\pi}} \times \frac{\cancel{\pi}\sqrt{3}}{18}}{\cancel{3}} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

هـ(س) = قبا(π/س)

* هـ(3) = قبا(π/3) = 1/2

هـَ(س) = −π/س² × −جا(π/س)

* هـَ(3) = −π/9 × −جا(π/3)

= π/9 × √3/2 = √3 π/18

• 2023 رام الله/ اذا كان ق(س) = س + 1/س ، س ≠ 0 ، هـ(س) = قبا س أثبت أن

(ق∘هـ)′(س) = (ظا²س + 1)/قتا³س .

الحل/ ق(س) = س + 1/س

قَ(س) = 1 − 1/س²

هـ(س) = قبا س

هـَ(س) = −جا س

أ.مي حواري

(ق∘هـ)′(س) = قَ(هـ(س))هـَ(س) = قَ(قبا س) × −جا س

= (1 − 1/قبا²س) × −جا س = (قبا²س − 1)/قبا²س × −جا س

توحيد مقامات

⇐ (ق∘هـ)′(س) = (1 − قبا²س)(جا س)/قبا²س = جا²س × جا س/قبا²س = جا³س × 1/قبا²س

⇐ (ق∘هـ)′(س) = 1/قتا³س × قا²س = (ظا²س + 1)/قتا³س #

• 2023 الوسطى/ إذا كان ق(س) = س − 1/س ، س ≠ 0 ، هـ(س) = ظا س أثبت أن

(ق∘هـ)′(س) = 4 قتا²(2س)

الحل/ ق(س) = س − 1/س

قَ(س) = 1 + 1/س²

هـ(س) = ظا س

هـَ(س) = قا²س .

(ق∘هـ)′(س) = قَ(هـ(س))هـَ(س) = قَ(ظا س) × قا²س

⇐ (ق∘هـ)′(س) = (1 + 1/ظا²س) قا²س = ((ظا²س + 1)/ظا²س) × قا²س = قا²س × قا²س/ظا²س

توحيد مقامات

⇐ (ق∘هـ)′(س) = 1/(قبا⁴س) × قبا²س/جا²س = 1/(جا س قبا²س) = 1/(جا س قبا س)² = 1/(½ جا(2س))² = 1/(¼ جا²(2س))

= 4 قتا²(2س) #

• 2023 طولكرم/ إذا كان $\frac{٣ل(س) - ٤ل(\frac{٤}{س})}{س+٣} = س - ٣$ وكان $ص = ٧ل^٢(س)$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $(س = ٢)$

الحل/ $\frac{٣ل(س) + -٤ل(\frac{٤}{س})}{س+٣} = س - ٣ \Leftarrow ٣ل(س) - ٤ل(\frac{٤}{س}) = (س+٣)(س-٣)$

$\Leftarrow ٣ل(س) - ٤ل(\frac{٤}{س}) = س^٢ - ٩ \Big|_{س=٢}$

$٣ل(٢) - ٤ل(٢) = ٤ - ٩ \Leftarrow -ل(٢) = -٥ \Leftarrow ل(٢) = ٥$

$٣ل(س) - ٤ل(\frac{٤}{س}) = س^٢ - ٩$

$٣ل'(س) - ٤ل'(\frac{٤}{س}) \times \frac{-٤}{س^٢} = ٢س \Big|_{س=٢} \Leftarrow ٣ل'(٢) - ٤ل'(٢) \times \frac{-٤}{٤} = ٤$

$\Leftarrow ٣ل'(٢) + ٤ل'(٢) = ٤$

$٧ل'(٢) = ٤ \Leftarrow ل'(٢) = \frac{٤}{٧}$

* $ص = ٧ل^٢(س) \leftarrow \frac{دص}{دس} = ٧ \times ٢ل(س) \times ل'(س) \Leftarrow \frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢} = ٧ \times ٢ل(٢)\, ل'(٢)$

$= ٧ \times ٢ \times ٥ \times \frac{٤}{٧} = ٤٠$

• 2023 مديرية الخليل/ إذا كان الاقتران $ق(س) = ب ظاس$ ، $هـ(س) = \frac{أ}{٢س+١}$ وكان $(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{٨}{٢٥}$

$\lim_{س \to \frac{٥\pi}{٤}} ق(س) = ٢$ جد قيمة كل من الثابتين أ، ب علماً بأن $ق(س)$ متصل على $]\frac{\pi}{٢}، \pi[$

الحل/ $\lim_{س \to \frac{٥\pi}{٤}} ق(س) = \lim_{س \to \frac{٥\pi}{٤}} ب ظاس = ٢ \Leftarrow ب ظا\frac{٥\pi}{٤} = ٢ \Leftarrow ب \times ١ = ٢ \Leftarrow ب = ٢$

$ق(س) = ٢ظاس$ ، $ق(\frac{\pi}{٤}) = ٢ظا\frac{\pi}{٤} = ٢ \times ١ = ٢$

$ق'(س) = ٢قا^٢س$

$ق'(\frac{\pi}{٤}) = ٢قا^٢(\frac{\pi}{٤}) = ٢(\sqrt{٢})^٢ = ٤$

$هـ(س) = \frac{أ}{٢س+١}$

$هـ'(س) = \frac{-أ \times ٢}{(٢س+١)^٢} \leftarrow هـ'(٢) = \frac{-٢أ}{٢٥}$

$(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{٤}) = هـ'(ق(\frac{\pi}{٤}))\, ق'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{٨}{٢٥}$

$هـ'(٢) \times ٤ = \frac{٨}{٢٥} \leftarrow \frac{-٢أ}{٢٥} = \frac{٢}{٢٥} \leftarrow أ = -١$

• 2024 صوافي القدس/ إذا كان $ق(س) = ٣ + ٢س$ ، $ق(س) + ل(س) = (ق \circ ل)(س)$

ما قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{هـ^{س^٢-٤} \times ل(س) - ل(٢)}{س-٢}$

أ.مي حواري

الحل/ * $ق(س) = ٣ + ٢س \leftarrow ق'(س) = ٢$

$ق(٢) = ٣ + ٢(٢) = ٧$

* $ق(س) + ل(س) = (ق \circ ل)(س)$

$ق(٢) + ل(٢) = ق(ل(٢)) \Leftarrow ٧ + ل(٢) = ٣ + ٢ل(٢)$

$٤ = ل(٢)$

$ق(س) + ل(س) = (ق \circ ل)(س) \longrightarrow ق'(س) + ل'(س) = ق'(ل(س))\, ل'(س)$

$ق'(٢) + ل'(٢) = ق'(ل(٢))\, ل'(٢)$

$٢ + ل'(٢) = ق'(٤) \times ل'(٢) \longrightarrow ٢ + ل'(٢) = ٢ل'(٢) \longrightarrow ٢ = ل'(٢)$

$* \lim_{س \to ٢} \frac{هـ^{س^٢-٤} \times ل(س) - ل(٢)}{س - ٢} = \frac{هـ^{٤-٤} \times ل(٢) - ل(٢)}{٢-٢} = \frac{ل(٢) - ل(٢)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٢} هـ^{س^٢-٤} \times ل'(س) + ل(س)\, هـ^{س^٢-٤} \times ٢س$

$= هـ^{٤-٤}\, ل'(٢) + ل(٢)\, هـ^{٤-٤} \times ٤ = هـ^{٠} \times ٢ + ٤ \times هـ^{٠} \times ٤$

$= ١ \times ٢ + ١٦ \times ١ = ١٨$

• 2024 مديرية نابلس/ اذا كان $ص = (جاس + جتاس)^٤$ أثبت أن $ص'' + ٤ص = ١٢ جتا^٢(٢س)$.

الحل/ $ص = (جاس + جتاس)^٤$

$ص' = ٤(جاس + جتاس)^٣ (جتاس - جاس)$

$ص'' = ٤(جاس + جتاس)^٣ (-جاس - جتاس) + (جتاس - جاس) \times ١٢(جاس + جتاس)^٢ (جتاس - جاس)$

اخراج (-) عامل مشترك.

$ص'' = -٤(جاس + جتاس)^٣ (جاس + جتاس) + ١٢(جاس + جتاس)^٢ (جتاس - جاس))^٢$

$ص'' = -٤(جاس + جتاس)^٤ + ١٢((جتاس + جاس)(جتاس - جاس))^٢$

$ص'' = -٤ص + ١٢(جتا(٢س))^٢$

$ص'' + ٤ص = ١٢ جتا^٢(٢س)$ #

• 2024 مديرية نابلس/ إذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ قابلين للاشتقاق وكان $(ق \circ هـ)(س) = \frac{س^٣ + أ}{س + ١} + \frac{١}{٢}$

$س \neq -١$ ، $هـ(١) = ١$ ، $هـ'(١) = ٤$ ، $ق'(س) = \sqrt[٣]{س^٢ + ٧}$ ما قيمة الثابت أ

الحل/ $أ = -٢٧$ "مكرر سؤال خانيونس 2020"

• 2024 بيت لحم/ اذا كان $ص = \frac{أع}{ع^٢ + ٢}$ ، $ع = (٢س - ٥)^٣$ جد قيمة أ حيث $\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{٣}$ عندما $(س = ٢)$

الحل/

$ص = \frac{أع}{ع^٢ + ٢}$

$ع = (٢س - ٥)^٣$

$\frac{دع}{دس} = ٣(٢س - ٥)^٢ \times ٢$

$\frac{دص}{دع} = \frac{(ع^٢ + ٢)(أ) - أع \times ٢ع}{(ع^٢ + ٢)^٢}$

$= \frac{أع^٢ + ٢أ - ٢أع^٢}{(ع^٢ + ٢)^٢} = \frac{٢أ - أع^٢}{(ع^٢ + ٢)^٢}$

* عندما $ع = (٢س - ٥)^٣ \Big|_{س = ٢} \Leftarrow ع = (٤ - ٥)^٣ = (-١)^٣ = -١$

أ.مي حواري

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{٢أ - أع^٢}{(ع^٢+٢)^٢} \times ٦(٣س-٥)^٢ \Big|_{\substack{ع=-١ \\ س=٢}}$

$\Leftarrow \frac{٢}{٣} = \frac{٢أ - أ}{(٣)^٢} \times ٦(٤-٥)^٢$

$\frac{٢}{٣} = \frac{أ}{\cancel{٩}_{٣}} \times \cancel{٦}^{٢} \Leftarrow \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}أ \Leftarrow أ = ١$

• 2024 مديرية قباطية / إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق وكان (ق∘هـ)(س) = س

قَ(س) = ١ + (ق(س))^٢ جد هَ(س)

الحل/ (ق∘هـ)(س) = س ⇐ ق(هـ(س)) = س ⇐ ق^٢(هـ(س)) = س^٢

نعوض س = هـ(س)

قَ(هـ(س)) هَ(س) = ١

(١ + ق^٢(هـ(س))) هَ(س) = ١ ⇐ (١ + س^٢) هَ(س) = ١

هَ(س) = $\frac{١}{س^٢+١}$

• 2025 قباطية / إذا كان المستقيم ٤س − ص + ١ = ٠ يمس منحنى هـ(س) عند (س = ٢) وكان

ق^٣(٣س − ١) = س^٤ + ٢س^٣ + ٥ جد قيمة $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(٢)$

الحل/ ٤س − ص + ١ = ٠ مماس هـ(س) عند س = ٢

(٢ ، هـ(٢)) ∈ للمماس ⇐ ٤×٢ − هـ(٢) + ١ = ٠ ⇐ ٩ − هـ(٢) = ٠ ⇐ ٩ = هـ(٢)

٤س − ص + ١ = ٠ ⇐ ٤ − صَ = ٠ ⇐ ٤ = صَ = هَ(٢) "ميل المماس"

ق^٣(٣س − ١) = س^٤ + ٢س^٣ + ٥ $\Big|_{س=١}$

ق^٣(٢) = ١ + ٢ + ٥

ق^٣(٢) = ٨ ⇐ ق(٢) = ٢

• عندما ٣س − ١ = ٢ ⇐ ٣س = ٣ ⇐ (س = ١)

أ.مي حواري

ق^٣(٣س − ١) = س^٤ + ٢س^٣ + ٥ ⇐ ٣ق^٢(٣س − ١) قَ(٣س − ١) × ٣ = ٤س^٣ + ٦س^٢ $\Big|_{س=١}$

⇐ ٣ق^٢(٢) قَ(٢) × ٣ = ٤ + ٦

٣(٢)^٢ × قَ(٢) × ٣ = ١٠ ⇐ ٩ × $\cancel{٤}^{٢}$ قَ(٢) = $\cancel{١٠}^{٥}$ ⇐ ١٨ قَ(٢) = ٥ ⇐ قَ(٢) = $\frac{٥}{١٨}$

* المطلوب/ $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(٢) = \frac{هـ(٢)قَ(٢) - ق(٢)هَ(٢)}{هـ^٢(٢)} = \frac{(\cancel{٩} \times \frac{٥}{\cancel{١٨}_{٢}}) - ٢(٤)}{(٩)^٢}$

$= \frac{\frac{٥}{٢} - ٨}{٨١} = \frac{\frac{٥}{٢} - \frac{١٦}{٢}}{٨١} = \frac{-١١}{٢} \times \frac{١}{٨١} = \frac{-١١}{١٦٢}$

• 2025 رام الله/ إذا كان ص = ق^٣(هـ^{٢ع} + ٢) ، ع = جا(٢√س) جد $\frac{دص}{دس}$ عندما

س = π^٢ علماً بأن ق(٣) = ٢ ، قَ(٣) = −١

الحل/ $ص = ق^{٣}(هـ^{٢ع} + ٢)$

$\frac{دص}{دع} = ٣ق^{٢}(هـ^{٢ع}+٢)\,قَ(هـ^{٢ع}+٢) \times هـ^{٢ع} \times ٢$

$ع = جا(٢\sqrt{س})$

$\frac{دع}{دس} = جتا(٢\sqrt{س}) \times \frac{٢}{٢\sqrt{س}}$

• عندما $س = \pi^{٢} \leftarrow ع = جا(٢\sqrt{\pi^{٢}}) = جا(٢\pi) = ٠$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = ٦ق^{٢}(هـ^{٢ع}+٢)\,قَ(هـ^{٢ع}+٢)\,هـ^{٢ع} \times \frac{جتا(٢\sqrt{س})}{\sqrt{س}} \Big|_{س=\pi^{٢},\ ع=٠}$

$= ٦ق^{٢}(هـ^{٠}+٢)\,قَ(هـ^{٠}+٢)\,هـ^{٠} \times \frac{جتا(٢\pi)}{\pi}$

$= ٦ق^{٢}(٣)\,قَ(٣) \times \frac{١}{\pi} = ٦ \times (٢)^{٢} \times \frac{-١}{\pi} = \frac{-٢٤}{\pi}$

• خارجي/ إذا كانت معادلة المماس لمنحنى هـ(س) عند (س=١) هي ص=٣س−٥ جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) حيث $ق(س) = (س^{٢}هـ(س))^{٣}$ عند (س=١)

الحل/ ص = ٣س − ٥ مماس هـ(س)

(١، هـ(١)) ∈ للمماس ⇐ هـ(١) = ٣ − ٥ ⇐ هـ(١) = −٢

ص = ٣س − ٥ ⇐ صَ = ٣ = هـَ(١) = ميل المماس.

$ق(س) = س^{٦}هـ^{٣}(س) \leftarrow ق(١) = هـ^{٣}(١) = (-٢)^{٣} = -٨ \leftarrow$ (١، −٨) نقطة تماس.

$قَ(س) = س^{٦} \times ٣هـ^{٢}(س)\,هـَ(س) + ٦س^{٥}هـ^{٣}(س)$

$قَ(١) = ٣هـ^{٢}(١)\,هـَ(١) + ٦هـ^{٣}(١)$

$قَ(١) = ٣(-٢)^{٢}(٣) + ٦(-٢)^{٣} = ٩ \times ٤ + ٦ \times -٨ = ٣٦ - ٤٨ = -١٢$ = ميل المماس

⇐ ميل العمودي = $\frac{-١}{ميل المماس} = \frac{١}{١٢}$

معادلة العمودي/ $ص - ص_{١} = م(س - س_{١}) \Leftarrow ص - -٨ = \frac{١}{١٢}(س - ١)$

$ص + ٨ = \frac{١}{١٢}س - \frac{١}{١٢} - ٨ \leftarrow ص = \frac{١}{١٢}س - \frac{٩٧}{١٢}$

-٨

خارجي/ إذا كان $ص = \frac{س+٤}{س-٢}$ ، $ع = \frac{ص+١}{ص-١}$ أثبت أن $\frac{دع}{دس} = \frac{١}{٣}$

الحل/ $ع = \frac{ص+١}{ص-١} = \frac{\frac{س+٤}{س-٢} + ١}{\frac{س+٤}{س-٢} - ١} = \left(\frac{س+٤+س-٢}{س-٢}\right) \div \left(\frac{\cancel{س}+٤-\cancel{س}+٢}{س-٢}\right)$

$\Leftarrow ع = \left(\frac{٢س+٢}{س-٢}\right) \div \left(\frac{٦}{س-٢}\right) \Leftarrow ع = \frac{٢س+٢}{\cancel{س-٢}} \times \frac{\cancel{(س-٢)}}{٦} \Leftarrow ع = \frac{٢(س+١)}{٦}$

$\Leftarrow ع = \frac{١}{٣}(س+١) \Leftarrow \frac{دع}{دس} = \frac{١}{٣}$ #

• خارجي/ لديك الاقتران $ق(س) = \frac{(س + [س + \frac{1}{2}])^4}{4 - س^2}$ ، $هـ(س) = س^3 + 8$ ما قيمة

$\frac{د}{دس}(ق(س) \times هـ(س))$ عندما $(س = 1)$

الحل/ $هـ(س) = س^3 + 8 \Leftarrow هـ(1) = 1 + 8 = 9$

$هـَ(س) = 3س^2 \Leftarrow هـَ(1) = 3(1)^2 = 3$

$[س + \frac{1}{2}] = \begin{cases} 0 ، -\frac{1}{2} \le س < \frac{1}{2} \\ \boxed{1 ، \frac{1}{2} \le س < \frac{3}{2}} \end{cases} \Leftarrow س = 1 \in [\frac{1}{2} ، \frac{3}{2}[$

$س + \frac{1}{2} = 0$

$س = -\frac{1}{2}$

$ل = 1$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{(س+1)^4}{4 - س^2} \Leftarrow ق(1) = \frac{(1+1)^4}{4-1} = \frac{16}{3}$

$قَ(س) = \frac{(4 - س^2)(4)(س+1)^3 - (س+1)^4 \times -2س}{(4 - س^2)^2} \Leftarrow قَ(1) = \frac{3 \times 4 \times 2^3 - 2^4 \times -2}{(4-1)^2}$

$\Leftarrow قَ(1) = \frac{12 \times 8 + 32}{9} = \frac{128}{9}$

$\frac{د}{دس}(ق(س) \times هـ(س)) = ق(س) هـَ(س) + هـ(س) قَ(س) \Big|_{س=1}$

$= ق(1) هـَ(1) + هـ(1) قَ(1)$

$= (\frac{16}{3} \times 3) + (\frac{128}{9} \times 9) = 16 + 128 = 144$

• خارجي/ إذا كان $-4قَ(2) = 3ق(2) = 12$ ، $2قَ(4) = 14$ أوجد قيمة

$\lim_{س \to 2} \frac{(ق \circ ق)(س) - ق(ق(2))}{س^2 + س - 6}$

الحل/ $\lim_{س \to 2} \frac{(ق \circ ق)(س) - ق(ق(2))}{س^2 + س - 6} = \frac{ق(ق(2)) - ق(ق(2))}{4 + 2 - 6} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to 2} \frac{قَ(ق(س)) قَ(س)}{2س + 1} = \frac{قَ(ق(2)) قَ(2)}{4 + 1} = \frac{قَ(4) \times -3}{5} = \frac{7 \times -3}{5} = \frac{-21}{5}$

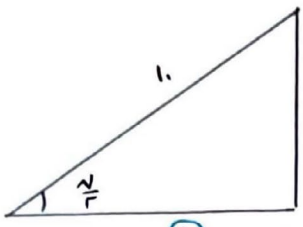
• ملاحظات/ $-4قَ(2) = 12 \Leftarrow قَ(2) = -3$ / $3ق(2) = 12 \Leftarrow ق(2) = 4$ / $2قَ(4) = 14 \Leftarrow قَ(4) = 7$

• خارجي/ إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم يتحرك في خط مستقيم بعد (ن) ثانية من بدء الحركة تعطى بالقانون $ف = جا^2(\frac{ن}{2})$ ، $ن \in [0 ، \pi]$ جد السرعة والتسارع عندما $ف = 36$ م.

الحل/ $ف = جا^2(\frac{ن}{2}) \Leftarrow 36 = جا^2(\frac{ن}{2}) \Leftarrow 6 = جا(\frac{ن}{2})$

$-6 = جا(\frac{ن}{2}) \times \frac{ن}{2} \in [0 ، \frac{\pi}{2}]$ والجيب موجب

$ع = \frac{دف}{دن} = 2جا(\frac{ن}{2}) جتا(\frac{ن}{2}) \times \frac{1}{2} = جا(\frac{ن}{2}) جتا(\frac{ن}{2})$



جا($\frac{\pi}{2}$) = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠٫٦

$٦^{٢} + س^{٢} = ١٠^{٢}$ ⇐ $٣٦ + س^{٢} = ١٠٠$

⇐ $س^{٢} = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤$ ⇐ س = ٨

ضا($\frac{\pi}{2}$) = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ = $\frac{٨}{١٠}$ = ٠٫٨

⇐ ع = جا($\frac{\pi}{2}$) ضا($\frac{\pi}{2}$) = ٠٫٦ × ٠٫٨ = ٠٫٤٨ م/ث .

ع = جا($\frac{\pi}{2}$) ضا($\frac{\pi}{2}$) ⇐ ت = جا($\frac{\pi}{2}$) × $\frac{١}{٢}$ جا($\frac{\pi}{2}$) + ضا($\frac{\pi}{2}$) × $\frac{١}{٢}$ ضا($\frac{\pi}{2}$)

ت = $-\frac{١}{٢}$ جا^{٢}($\frac{\pi}{2}$) + $\frac{١}{٢}$ ضا^{٢}($\frac{\pi}{2}$)

= $-\frac{١}{٢}$ (٠٫٦)^{٢} + $\frac{١}{٢}$ (٠٫٨)^{٢}

= $-\frac{١}{٢}$ × ٠٫٣٦ + $\frac{١}{٢}$ × ٠٫٦٤ = −٠٫١٨ + ٠٫٣٢ = ٠٫١٤ جول

• خارجي/ اذا كان م(س) = جاس + P ضا(Pس) و ضا(Pس) ≠ ٠ وكان م$'$(س) = −م(س)
ما قيمة / قيم الثابت P

الحل/ م$'$(س) = ضاس − P^{٢} جا(Pس)

م$''$(س) = − جاس − P^{٣} ضا(Pس)

م$''$(س) = − م(س) ⇐ − جاس − P^{٢} ضا(Pس) = − جاس − P ضا(Pس)

⇐ − P^{٢} ضا(Pس) = − P ضا(Pس) و ضا(Pس) ≠ ٠

⇐ − P^{٣} = − P ⇐ P^{٣} − P = ٠ ⇐ P(P^{٢} − ١) = ٠ ⇐ P(P − ١)(P + ١) = ٠

إما P = ٠ أو P − ١ = ٠ ⇐ P = ١ أو P + ١ = ٠ ⇐ P = −١

⇐ P ∈ {−١ ، ٠ ، ١}

أ.مي حواري

انتبه معي ، لنعد قليلاً للغاية ! لماذا نعمل كل ما نعمل ؟
لماذا كل هذا الجهد و التعب و الإعياء ؟ لماذا كل تلك
الساعات و الحركات و المحاولات ؟ (الغاية = الجنة)
(و الثمن = نفوسنا) و (و الوجهة = ما أمَر) (و الرجاء =
رضاه) ، فكل ما دون ذلك دون ، أليس كل هذا يهّون
قبلك ؟ أليست دنيا زائلة ؟ إذاً تهون ...

" قصي العسيلي "

الدرس السابع | الاشتقاق الضمني

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2008 / يتحرك جسم وفق العلاقة ع = ٦√ف حيث ع ، ف هما السرعة والإزاحة على الترتيب.
فإن تسارع هذا الجسم يساوي :

أ/ ٦ ب/ ١٢ ج/ ١٨ د/ ٣٦

الحل/ ع = ٦√ف ← دع/دن = ٦ × دف/دن / ٢√ف ⇐ ت = ٦ع / ٢√ف = ٦ × ٦√ف / ٢ × √ف = ٦ × ٦ / ٢ = ١٨م/ث²

• 2017 دور ثاني/ إذا كان س = جتا(ص) فإن صً =

أ/ -قتأص ظتاص ب/ -قتاص ظتاص ج/ -قتاص ظتأص د/ قتأص ظتأص

الحل/ س = جتا(ص) نشتق لـ س

١ = -جاص × صَ ⇐ -١/جاص = صَ ⇐ -قتاص = صَ نشتق مرة ثانية

⇐ -١ × -قتاص ظتاص × صَ = صً نعوض (صَ = -قتاص)

⇐ -قتاص ظتاص × قتاص = صً ⇐ -قتأص ظتاص = صً

• 2018 دور أول/ إذا كان س^(٢/٣) + ص^(٢/٣) = ١ فإن دص/دس

أ/ (ص/س)^(١/٣) ب/ -(ص/س)^(١/٣) ج/ ٢/٣ (ص/س)^(-١/٣) د/ -٢/٣ (ص/س)^(-١/٣)

الحل/ س^(٢/٣) + ص^(٢/٣) = ١ نشتق لـ س

٢/٣ س^(-١/٣) + ٢/٣ ص^(-١/٣) صَ = ٠ ⇐ ٢/٣ (س)^(-١/٣) = -٢/٣ (ص)^(-١/٣) صَ

⇐ (س)^(-١/٣) = -(ص)^(-١/٣) صَ ⇐ -س^(-١/٣) / ص^(-١/٣) = صَ ⇐ -(س/ص)^(-١/٣) = صَ

⇐ -(ص/س)^(١/٣) = صَ

* تذكر: (أ/ب)^(-ن) = (ب/أ)^ن

• 2019 دور أول/ إذا كان س = ظاص فإن صَ تساوي :

أ/ قتأص ب/ جتأص ج/ قاص ظاص د/ جأص

الحل/ س = ظاص نشتق لـ س

١ = قأص × صَ ⇐ ١/قأص = صَ ⇐ جتأص = صَ

أ.مي حواري

• 2019 دور ثاني/ إذا كان س = جاص ، ص ∈]٠ ، π/٢[ما قيمة دص/دس

أ/ س/√(١-س²) ب/ ١/√(١-س²) ج/ -س/√(١-س²) د/ -١/√(١-س²)

الحل/ س = جاص ← ١ = جتاص صَ ← ١/جتاص = صَ

نعلم أن / جا²ص + جتا²ص = ١ ⇐ س² + جتا²ص = ١ ⇐ جتا²ص = ١ − س² بأخذ الجذر التربيعي

إما جتاص = $\sqrt{١-س^٢}$ ، ص ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[✓

أو جتاص = $-\sqrt{١-س^٢}$ ∉]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

⇐ صَ = $\frac{١}{جتاص}$ = $\frac{١}{\sqrt{١-س^٢}}$

• 2020 دور أول / إذا كان ق²($\sqrt{س}$ + ١) = ٥س² − ١ ما قيمة قَ(٢) علماً بأن ق(س) > ٠

أ/ ٥ ب/ ١٠$\sqrt{٢}$ ج/ $\frac{٥}{٢}$ د/ ١٠

الحل/ $\sqrt{س}$ + ١ = ٢ ⇐ $\sqrt{س}$ = ١ ⇐ س = ١

ق²($\sqrt{س}$ + ١) = ٥س² − ١ |س = ١ ⇐ ق²(٢) = ٥ − ١ ⇐ ق²(٢) = ٤ ⇐ ق(٢) = ٢ ✓ ، ق(٢) = −٢ ✗

نشتق / ٢ق($\sqrt{س}$ + ١) قَ($\sqrt{س}$ + ١) × $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ = ٥ × ٢س |س = ١

⇐ ~~٢~~ق(٢) قَ(٢) × $\frac{١}{٢}$ = ~~١٠~~ ٥

⇐ ٢قَ(٢) × $\frac{١}{٢}$ = ٥ ⇐ قَ(٢) = ٥

• 2020 دور ثاني / إذا كان س²ص³ = ٤س² + ٤ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عند (س = ١)

أ/ $-\frac{٢}{٣}$ ب/ $\frac{١}{٣}$ ج/ $\frac{٢}{٣}$ د/ صفر

الحل/

[س²ص³ = ٤س² + ٤] ÷ س² ⇐ ص³ = ٤ + ٤س⁻²

عندما س = ١ ⇐ ص³ = ٤ + ٤ ⇐ ص³ = ٨ ⇐ ص = ٢

* ص³ = ٤ + $\frac{٤}{س^٢}$ ⇐ ٣ص²صَ = $\frac{-٤ \times ٢}{س^٣}$ |س = ١ ، ص = ٢

⇐ ٣(٢)²صَ = −٨

صَ = $\frac{-٨}{٣ \times ٤}$ = $-\frac{٢}{٣}$

أ.مي حواري

• 2021 دور أول / إذا كان لو$_هـ$(ص) = ٢ + لو$_هـ$(س) حيث س ، ص > ٠ ما قيمة $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

أ/ هـ² ب/ ٢هـ ج/ هـ د/ صفر

الحل/ لو$_هـ$(ص) = ٢ + لو$_هـ$س ⇐ ص = هـ$^{٢+لو_هـ س}$ = هـ² × ~~هـ^{لو_هـ س}~~

⇐ ص = هـ² × س ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = هـ² ⇐ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٠

• 2021 دور ثاني / إذا كان س² + ص² = ١ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$

أ/ −س ب/ $\frac{-س}{ص}$ ج/ $\frac{١}{ص}$ د/ $-\frac{ص}{س}$

الحل/ س² + ص² = ١ ⇐ ٢س + ٢ص صَ = ٠ ⇐ −٢س = ٢ص صَ

⇐ صَ = $\frac{-٢س}{٢ص}$ = $\frac{-س}{ص}$

• 2022 دور أول / إذا كان جاس = هـ^ص ما قيمة $\frac{د^2ص}{دس^2}$

أ/ -قتا^2س ب/ قتا^2س جـ/ -قتاس ظتاس د/ قا^2س

الحل/ جاس = هـ^ص بأخذ اللوغاريتم للطرفين

لو_هـ جاس = لو_هـ هـ^ص ⇐ ص = لو_هـ (جاس) ⇐ ص' = $\frac{قتاس}{جاس}$ = ظتاس

ص'' = -قتا^2س

• 2023 دور أول / اذا كان س قاص = 1 ، ص ∈]0 ، $\frac{\pi}{2}$[ما قيمة $\frac{دص}{دس}$

أ/ $\frac{-1}{\sqrt{1-س^2}}$ ب/ $\frac{1}{\sqrt{1-س^2}}$ جـ/ $\frac{س}{\sqrt{1-س^2}}$ د/ $\frac{-س}{\sqrt{1-س^2}}$

الحل/ س قاص = 1 ⇐ س = $\frac{1}{قاص}$ ⇐ س = جتاص نشتق لـ س

⇐ 1 = -جاص × ص' ⇐ ص' = $\frac{-1}{جاص}$

⇐ ص' = $\frac{-1}{\sqrt{1-س^2}}$

جا^2ص + جتا^2ص = 1
جا^2ص + س^2 = 1
جا^2ص = 1 - س^2
جاص = ± $\sqrt{1-س^2}$
مرفوض
جاص (+) في]0 ، $\frac{\pi}{2}$[

أ.مي حواري

• 2023 دور أول / إذا كان هـ^2ص = جاس ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ - $\frac{1}{2}$ ظتاس

أ/ $\frac{-1}{4}$ ب/ $\frac{-1}{2}$ جـ/ صفر د/ $\frac{1}{2}$

الحل/

هـ^2ص = جاس بأخذ اللوغاريتم للطرفين

لو_هـ هـ^2ص = لو_هـ جاس ⇐ 2ص = لو_هـ (جاس) ⇐ ص = $\frac{1}{2}$ لو_هـ (جاس) نشتق

ص' = $\frac{1}{2}$ × $\frac{قتاس}{جاس}$ = $\frac{1}{2}$ ظتاس ⇐ ص' = $\frac{1}{2}$ ظتاس ⇐ ص' - $\frac{1}{2}$ ظتاس = 0

• 2024 دور أول / إذا كان س = جاص ، ما قيمة $\left(\frac{دص}{دس}\right)^2$

أ/ $\frac{1}{س^2}$ ب/ $\frac{1}{1-س^2}$ جـ/ $\frac{1}{س^2-1}$ د/ $\frac{س}{1-س^2}$

الحل/

س = جاص نشتق لـ س ⇐ 1 = جتاص × ص' ⇐ ص' = $\frac{1}{جتاص}$

(ص')^2 = $\frac{1}{جتا^2ص}$ = $\frac{1}{1-جا^2ص}$ = $\frac{1}{1-س^2}$

• 2025 دور أول / إذا علمت أن ص = ق(س) وكانت $\frac{دص}{دس}$ = أ $\sqrt{ص}$ ، أ > 0 ، $\frac{د^2ص}{دس^2}$ = 32 ما قيمة الثابت أ

أ/ 3 ب/ 4 جـ/ 8 د/ 16

الحل/

ص = ق(س) ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = أ $\sqrt{ص}$. نشتق مرة أخرى لـ س .

$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{أ \times \frac{دص}{دس}}{2\sqrt{ص}} \Leftarrow \frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{أ \times أ\sqrt{ص}}{2\sqrt{ص}} \Leftarrow 32 = \frac{أ^2}{2} \Leftarrow 64 = أ^2$ بأخذ الجذر للطرفين

$أ = 8$

• 2025 دور أول/ إذا كان س = قاص ، ص ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[ما قيمة ص'

أ/ $\frac{1}{2\sqrt{س^2-1}}$ ب/ $\frac{-1}{س\sqrt{س^2-1}}$ جـ/ $\frac{1}{س\sqrt{س^2-1}}$ د/ $\frac{1}{س\sqrt{1-س^2}}$

الحل/ س = قاص ← 1 = قاص ظاص × ص'

⇐ ص' = $\frac{1}{قاص ظاص} = \frac{1}{س ظاص}$

⇐ ص' = $\frac{1}{س\sqrt{س^2-1}}$

ظا²ص + 1 = قا²ص

ظا²ص = س² − 1

ظاص = ± $\sqrt{س^2-1}$

مرفوض

ظاص موجب في]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[

أ.مي حواري

• 2025 دور ثاني/ إذا كانت العلاقة بين المسافة التي قطعها جسم يتحرك وسرعته هي ع²ف = 6

أي من المقادير التالية يساوي تسارعه:

أ/ $\frac{-3}{ف^2}$ ب/ $\frac{2}{3}ف^2$ جـ/ ف² د/ 12ف²

الحل/ ع²ف = 6 ⇐ ع² = $\frac{6}{ف}$ نشتق بالنسبة للزمن

⇐ ~~2ع~~ ت = $\frac{-6ع}{ف^2}$ ، ع ≠ 0 ⇐ 2ت = $\frac{-6}{ف^2}$ ⇐ ت = $\frac{-3}{ف^2}$

• 2019 الخليل/ إذا علمت أن المستقيم ص = مس + جـ يمس المنحنى ص² = 4أس حيث أ ، م ، جـ ثوابت ما قيمة الثابت جـ:

أ/ أم ب/ م ÷ أ جـ/ أ + م د/ أ ÷ م

الحل/ ص = مس + جـ ← ص' = م = ميل المماس

ص² = 4أس ← 2ص ص' = 4أ ⇐ ص' = $\frac{2أ}{ص}$ = ميل المنحنى

ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس

م = $\frac{2أ}{ص}$ ← مص = 2أ ← ص = $\frac{2أ}{م}$ نعوضها في المنحنى.

⇐ ص² = 4أس ⇐ $\left(\frac{2أ}{م}\right)^2$ = 4أس ⇐ $\frac{4أ^2}{م^2}$ = ~~4أ~~س ⇐ $\frac{أ}{م^2}$ = س

⇐ ($\frac{أ}{م^2}$ ، $\frac{2أ}{م}$) نقطة التماس ∈ المماس.

ص = مس + جـ ⇐ $\frac{2أ}{م}$ = ~~م~~ × $\frac{أ}{م^2}$ + جـ ⇐ $\frac{2أ}{م} - \frac{أ}{م}$ = جـ

⇐ $\frac{أ}{م}$ = جـ

• 2019 الوسطى/ إذا كانت $ص^3 + 3س ص = 18$ ، $ع = ص^2 - 5ص + 1$ ، ماذا تساوي $\frac{دع}{دس}$ عندما $س = -1$ ، $ص = 2$

أ/ 18 ب/ 14 جـ/ -14 د/ -8

الحل/ $ص^3 + 3س ص = 18$

$\frac{دص}{دس} 3ص^2 + 3س \frac{دص}{دس} + 3ص = 0$

$\left| \begin{matrix} س=-1 \\ ص=2 \end{matrix} \right.$ $\therefore 12 \frac{دص}{دس} + 3 \frac{دص}{دس} + 6 = 0$

$\therefore 12 \frac{دص}{دس} - 3 \frac{دص}{دس} + 18 = 0$

$\therefore 9 \frac{دص}{دس} + 18 = 0$

$9 \frac{دص}{دس} = -18 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = -2$

$ع = ص^2 - 5ص + 1$

$\frac{دع}{دس} = 2ص \frac{دص}{دس} - 5 \frac{دص}{دس}$

$\left| \begin{matrix} ص=2 \\ س=-1 \end{matrix} \right.$ $\frac{دع}{دس} = 4 \times -2 - 5 \times -2$

$= -8 + 10 = 2$

• 2019 خارج نيوسن/ إذا كانت $س = \log_{ه}(س ص)$ ، $ص^2 س = 6$ ، ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عند $(1، ه)$

أ/ $\frac{1}{ه}$ ب/ $2ه$ جـ/ $-ه$ د/ $ه$

الحل/ $س = \log_{ه}(س ص)$

$\left| \begin{matrix} (1، ه) \end{matrix} \right.$ $\frac{دس}{دص} = \frac{س ص}{س ص + ص}$

$\Leftarrow 2 = \frac{ه + ص}{ه}$ $\Leftarrow 2ه = ه + ص$ $\Leftarrow ص = ه$

• 2021 خارج نيوسن/ إذا كان $س = (1 - \tan ص)(1 + \tan ص + \tan^2 ص)$ فإن $\frac{دص}{دس}$

أ/ $\frac{1}{3\sec^2 ص}$ ب/ $\frac{-1}{3\sec^2 ص}$ جـ/ $-3\sec^2 ص$ د/ $3\sec^2 ص$

الحل/ $(1 - \tan ص)(1 + \tan ص + \tan^2 ص)$ ⇐ فرق مكعبين

$= (1)^3 - (\tan ص)^3 = 1 - \tan^3 ص$

⇐ $س = (1 - ص^3)(1 + ص^3 + ص^6)$ فرق مكعبين

⇐ $س = 1 - ص^9$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-1}{9ص^8}$ $\Leftarrow 1 = -9ص^8 \frac{دص}{دس}$

أ.مي حواري

• خارج/ إذا كان $\frac{دص}{دس} = ب\sqrt{ص}$ ، $\frac{دع}{دس} = 3$ ، ما قيمة الثابت ب:

أ/ -6 ب/ 6 جـ/ 3 د/ 3

الحل/ $\frac{دص}{دس} = ب\sqrt{ص}$ نشتقر بالنسبة لـ س

$\frac{دع}{دس} = \frac{ب}{2\sqrt{ب ص}} \times ب\sqrt{ب ص}$ $\Leftarrow 3 = \frac{ب^2}{2}$ $\Leftarrow ب = 6$

• خارج/ إذا كان $س = جا(2ص)$ ، $ص \in [0، \frac{\pi}{2}]$ ما قيمة المقدار $4ص$ جتا$(2ص)$

أ/ $\frac{س}{2}$ ب/ $س$ جـ/ $2س$ د/ $-2س$

الحل/ $س = جا(2ص)$

$1 = 2جتا(2ص) \times 2ص$ $\Leftarrow ص = \frac{1}{2جتا(2ص)} = \frac{1}{2}قا(2ص)$

$\text{ص}'' = \frac{1}{2} \times \text{قا}(2\text{ص})\,\text{ظا}(2\text{ص}) \times 2\text{ص}' \Leftarrow (\text{ص}'' = \text{قا}(2\text{ص})\,\text{ظا}(2\text{ص}) \times \frac{1}{2}\,\text{قا}(2\text{ص}) \;/\times 4$

$4\text{ص}'' = 2\,\text{قا}^2(2\text{ص})\,\text{ظا}(2\text{ص})$

$4\text{ص}'' = 2 \times \frac{1}{\text{جتا}^2(2\text{ص})} \times \frac{\text{جا}(2\text{ص})}{\text{جتا}(2\text{ص})} \Leftarrow 4\text{ص}'' = \frac{2\,\text{جا}(2\text{ص})}{\text{جتا}^3(2\text{ص})}$

$4\text{ص}''\,\text{جتا}^3(2\text{ص}) = 2\text{س}$

• خارجي/ اذا كان $\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{ص}}$ ما قيمة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $(-1,1)$

أ/ -2 ب/ 2 جـ/ 1 د/ -1

الحل/ $\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{ص}}$

$\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ص}' + \text{هـ}^{\text{س}} = -\text{هـ}^{-\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{ص}}\text{ص}' \;\Big|_{(-1,1)}$

$\Leftarrow \text{هـ}\text{ص}' + \text{هـ}^{-1} = -\text{هـ}^{1} - \text{هـ}^{-1}\text{ص}' \Leftarrow \text{هـ}\text{ص}' + \frac{1}{\text{هـ}} = -\text{هـ} - \frac{1}{\text{هـ}}\text{ص}'$

$\text{هـ}\text{ص}' + \frac{1}{\text{هـ}}\text{ص}' = -\text{هـ} - \frac{1}{\text{هـ}} \Leftarrow \text{ص}'\left(\cancel{\text{هـ} + \frac{1}{\text{هـ}}}\right) = -\left(\cancel{\text{هـ} + \frac{1}{\text{هـ}}}\right) \Leftarrow \text{ص}' = -1$

• خارجي/ إذا كان المستقيم $\text{س} = \text{جاص}$ ، $\text{ص} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ، فإن ميل العمودي على المماس عند $\text{س} = \frac{1}{2}$ هي:

أ/ $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ب/ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جـ/ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ د/ $\frac{-2}{\sqrt{3}}$

الحل/ $\text{س} = \text{جاص}$

$1 = \text{جتاص} \times \text{ص}' \;\Big|_{\text{ص} = \frac{\pi}{6}}$

$1 = \text{جتا}\frac{\pi}{6}\,\text{ص}'$

$1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{ص}' \Leftarrow \text{ص}' = \frac{2}{\sqrt{3}}$ = ميل المماس عند $(\text{س} = \frac{1}{2})$

عندما $\text{س} = \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{2} = \text{جاص}$

$\Leftarrow \text{ص} = \frac{\pi}{6} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Leftarrow$ ميل العمودي $= \frac{-\sqrt{3}}{2}$

أ.مي حواري

• خارجي/ ما ميل العمودي على مماس الدائرة التي معادلتها $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 25$ عند $(-3,4)$

أ/ $\frac{3}{4}$ ب/ $\frac{4}{3}$ جـ/ $\frac{-4}{3}$ د/ $\frac{-3}{4}$

الحل/ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 25 \leftarrow 2\text{س} + 2\text{ص}\text{ص}' = 0 \Leftarrow 2\text{س} = -2\text{ص}\text{ص}'$

$\Leftarrow \frac{-\text{س}}{\text{ص}} = \text{ص}' \Leftarrow \text{ص}' \;\Big|_{(-3,4)} = \frac{-(-3)}{4} = \frac{3}{4}$ = ميل المماس.

$\Leftarrow$ ميل العمودي $= \frac{-1}{\text{ميل المماس}} = \frac{-4}{3}$

• خارجي/ إذا كانت العلاقة $\frac{1}{2}\text{ع}^3 + \frac{9}{\text{ف}} = 7$ تربط إزاحة الجسم بالأمتار مع سرعته بالمتر/دقيقة ما قيمة تسارع الجسم عندما تكون قطع ٣ م

أ/ $\frac{1}{3}$ ب/ $\frac{-1}{3}$ جـ/ 3 د/ -3

الحل/ $\frac{1}{2}ع^3 + \frac{9}{ف} = 7 \Big|_{ف=3} \Leftarrow \frac{1}{2}ع^3 + \frac{9}{3} = 7 \Leftarrow \frac{1}{2}ع^3 = 7-3 \Leftarrow \frac{1}{2}ع^3 = 4$

$\Leftarrow ع^3 = 8 \Leftarrow ع = 2$ م/ث

* $\frac{1}{2}ع^3 + \frac{9}{ف} = 7$ نشتق بالنسبة للزمن $\Leftarrow \frac{3}{2}ع^2 ت - \frac{9ع}{ف^2} = 0 \Leftarrow \frac{3}{2}ع^2 ت = \frac{9ع}{ف^2}$

$\Leftarrow \frac{3}{2} \times 2ت = \frac{9}{3^2} \Leftarrow 3ت = 1 \Leftarrow ت = \frac{1}{3}$ م/ث²

• خارجي/ يتحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) ع(ن) = ٤ن حيث ف بعده بالأمتار ن الزمن بالثواني إذا كانت ع(٢) = ١م/ث ما قيمة تسارع الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة:

أ/ ٢ ب/ $\frac{3}{4}$ ج/ $-\frac{3}{8}$ د/ $\frac{3}{8}$

الحل/ $ف ع = 4ن \Big|_{ن=2,\ ع=1} \Leftarrow ف \times 1 = 4 \times 2 \Leftarrow ف = 8$ م

$ف ع = 4ن$ نشتق بالنسبة للزمن $\Leftarrow ف ت + ع ع = 4 \Big|_{ف=8,\ ع=1}$

$\Leftarrow 8ت + 1 = 4 \Leftarrow 8ت = 3 \Leftarrow ت = \frac{3}{8}$ م/ث²

• خارجي/ يتحرك جسم حسب العلاقة $ب ع = \sqrt{ف}$ وكان تسارعه ١٨م/ث² ما قيمة الثابت ب علماً بأن ب > ٠:

أ/ $\frac{1}{6}$ ب/ $\frac{1}{9}$ ج/ $\frac{1}{36}$ د/ $\frac{1}{3}$

الحل/ $ب ع = \sqrt{ف} \Leftarrow$ نشتق للزمن

$ب ت = \frac{ع}{2\sqrt{ف}} \Leftarrow ب ت = \frac{ع}{2ب ع}$ ، $ع \neq 0 \Leftarrow ت ب = \frac{1}{2ب}$

$2ب^2 ت = 1 \Big|_{ت=18} \Leftarrow 2ب^2 \times 18 = 1 \Leftarrow ب^2 = \frac{1}{36} \Leftarrow ب = \frac{1}{6}$

$ب = -\frac{1}{6} \times ب > 0$

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة الآتية:

• 2007 / إذا كان $(س+ص)^5 = س^2ص^3 + 31$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند (١،١)

الحل/ $5(س+ص)^4(1+ص') = س^2 \times 3ص^2 \times ص' + ص^3 \times 2س \Big|_{(1،1)}$

$5(1+1)^4(1+ص') = 3ص' + 2$

$5 \times 16(1+ص') = 3ص' + 2$

$80 + 80ص' = 3ص' + 2 \Leftarrow 77ص' = -78 \Leftarrow ص' = \frac{-78}{77}$

أ.مي حواري

من له ورد من القرآن وقته مبارك .. بل حياته كلها مباركة!

• 2008/ إذا كان $ع = ٥ص - ص^٢ + ٨$ ، $ص^٢ = س ص + ٢$ جد $\frac{دع}{دس}$ عند (-١،١)

الحل/ $ع = ٥ص - ص^٢ + ٨$ ، $ص^٢ = س ص + ٢$

$\frac{دع}{دص} = ٥ - ٢ص \Big|_{ص=١}$ ، $٢ص\frac{دص}{دس} = س\frac{دص}{دس} + ص \Big|_{(-١،١)}$

$\frac{دع}{دص} = ٥ - ٢ = ٣$ ، $٢\frac{دص}{دس} = -\frac{دص}{دس} + ١$

$\frac{٣دص}{دس} = ١ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٣}$

المطلوب/ $\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص} \times \frac{دص}{دس} = ٣ \times \frac{١}{٣} = ١$

• 2009/ اذا كان $ص^٢ + ٣س ص = ١٨$ ، $ع = ٥ص - ص^٢ + ٨$ جد $\frac{دع}{دس}$ عندما $ص = ٦$

الحل/ $ص^٢ + ٣س ص = ١٨$

عندما $ص = ٦ \Leftarrow ٣٦ + ١٨س = ١٨ \Leftarrow ١٨س = -١٨ \Leftarrow س = -١$

* $ص^٢ + ٣س ص = ١٨$

$٢ص\frac{دص}{دس} + ٣س\frac{دص}{دس} + ٣ص = ٠ \Big|_{(-١،٦)}$

$١٢\frac{دص}{دس} - ٣\frac{دص}{دس} = -٣ \times ٦$

$٩\frac{دص}{دس} = -١٨ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = -٢$

* $ع = ٥ص - ص^٢ + ٨$

$\frac{دع}{دص} = ٥ - ٢ص \Big|_{ص=٦}$

$= ٥ - ١٢ = -٧$

أ.مي حواري

$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص} \times \frac{دص}{دس} \Leftarrow \frac{دع}{دس} = -٧ \times -٢ = ١٤$

• 2010/ جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة $(س - ص)^٢ + ٢س - ص = ٦$ عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم $ص - س + ١ = ٠$

الحل/ نقطة التماس تمثل تقاطع المنحنى مع المستقيم ولايجاد نحل المعادلتين.

$ص - س + ١ = ٠ \Leftarrow ص = س - ١$ نعوضها في المنحنى.

$(س - (س - ١))^٢ + ٢س - (س - ١) = ٦ \Leftarrow (س - س + ١)^٢ + ٢س - س + ١ = ٦$

$\Leftarrow ١ + س + ١ = ٦ \Leftarrow س + ٢ = ٦ \Leftarrow س = ٤$ نعوضها في المستقيم

$ص = س - ١ = ٤ - ١ = ٣ \Leftarrow (٤،٣)$ نقطة التماس.

* لايجاد معادلة المماس نحتاج $\leftarrow (٤،٣)$ نقطة تماس

ميل المماس $= \frac{دص}{دس} \Big|_{(٤،٣)} = \frac{٤}{٣}$

$(س - ص)^٢ + ٢س - ص = ٦$

$٢(س - ص)(١ - ص') + ٢ - ص' = ٠ \Big|_{(٤،٣)} \Leftarrow ٢(٤ - ٣)(١ - ص') + ٢ - ص' = ٠$

$٢ - ٢ص' + ٢ - ص' = ٠ \Leftarrow ٤ = ٣ص' \Leftarrow \frac{٤}{٣} = ص' = م$

معادلة المماس $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٣ = \frac{٤}{٣}(س - ٤) \Leftarrow ص - ٣ = \frac{٤}{٣}س - \frac{١٦}{٣} \Leftarrow ص = \frac{٤}{٣}س - \frac{١٦}{٣} + \frac{٩}{٣}$

$ص = \frac{٤}{٣}س - \frac{٧}{٣}$

• 2012/ إذا كانت $ل = ص^2 + 4ص - 5$ ، $ص + س ص = 6$ جد $\frac{دل}{دس}$ عندما $ص = 2$

الحل/ * $ص + س ص = 6 \Leftarrow ص(1+س) = 6 \Leftarrow ص = \frac{6}{1+س}$

$ل = ص^2 + 4ص - 5$

$\frac{دل}{دص} = 2ص + 4$

$ص = \frac{6}{1+س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-6}{(1+س)^2}$

عندما $(ص = 2) \Leftarrow 2 + 2س = 6 \Leftarrow 2س = 4 \Leftarrow س = 2$

$\frac{دل}{دس} = \frac{دل}{دص} \times \frac{دص}{دس} = (2ص+4) \times \frac{-6}{(1+س)^2} \Big|_{(2,2)} = (4+4) \times \frac{-\cancel{6}^{2}}{\cancel{9}_{3}} = 8 \times \frac{-2}{3} = \frac{-16}{3}$

• 2013/ إذا كانت $ص ع = 1$ ، $س + ص^2 = 2$ جد $\frac{دع}{دس}$ عند $(س = 1)$

الحل/ $س + ص^2 = 2 \Big|_{س=1} \Leftarrow 1 + ص^2 = 2 \Leftarrow ص^2 = 1 \Leftarrow ص = 1$ ، $ص = -1$

$ص ع = 1 \Leftarrow ع = \frac{1}{ص}$

$\frac{دع}{دص} = \frac{-1}{ص^2}$

أ.مي

$س + ص^2 = 2$

$1 + 2ص \frac{دص}{دس} = 0$

$2ص \frac{دص}{دس} = -1 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-1}{2ص}$

* $\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص} \times \frac{دص}{دس} = \frac{-1}{ص^2} \times \frac{-1}{2ص} = \frac{1}{2ص^3}$

عندما $(ص = 1) \Leftarrow \frac{دع}{دس} = \frac{+1}{2}$ / عندما $ص = -1 \Leftarrow \frac{دع}{دس} = \frac{1}{2(-1)^3} = \frac{-1}{2}$

$\Leftarrow \frac{دع}{دس} = \{\frac{1}{2} ، \frac{-1}{2}\}$

• 2013 إكمال/ إذا كان $ص = 1 - جاس$ ، أثبت أن $\frac{د}{دس}\left(\frac{جتاس}{ص}\right) = \frac{1}{ص}$.

الحل/

$\frac{د}{دس}\left(\frac{جتاس}{ص}\right) = \frac{د}{دس}\left(\frac{جتاس}{1-جاس}\right) = \frac{(1-جاس)(-جاس) - جتاس \times -جتاس}{(1-جاس)^2}$

$= \frac{-جاس + جا^2س + جتا^2س}{(1-جاس)^2} = \frac{\cancel{1-جاس}}{\cancel{(1-جاس)^2}} = \frac{1}{1-جاس} = \frac{1}{ص}$ #

• 2014 إكمال/ أوجد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى القطع الذي معادلته $2س^2 - 3ص^2 = 0$ عند النقطة $(2، -1)$

الحل/ $2س^2 - 3ص^2 = 0 \Leftarrow 2 \times 2س - 3 \times 2ص ص' = 0 \Leftarrow \cancel{2} \times 2س = 3 \times \cancel{2}ص ص'$

$\Leftarrow ص' = \frac{2س}{3ص} \Big|_{(2,-1)} = \frac{2 \times 2}{3 \times -1} = \frac{-4}{3}$ = ميل المماس .

نقطة المماس (٢، -١)

$م = -\frac{٤}{٣}$

معادلة المماس / $ص - ص_١ = م(س - س_١)$ ← $ص - (-١) = -\frac{٤}{٣}(س - ٢)$ ← $ص + ١ = -\frac{٤}{٣}س + \frac{٨}{٣}$

← $ص = -\frac{٤}{٣}س + \frac{٨}{٣} - ١$ ← $ص = -\frac{٤}{٣}س + \frac{٥}{٣}$ "معادلة المماس"

← ميل العمودي = $\frac{-١}{م_{المماس}}$ ← معادلة العمودي / $ص + ١ = \frac{٣}{٤}(س - ٢)$

← $ص + ١ = \frac{٣}{٤}س - \frac{٣}{٢}$ ← $ص = \frac{٣}{٤}س - \frac{٣}{٢} - ١$ ← $ص = \frac{٣}{٤}س - \frac{٥}{٢}$ "معادلة العمودي"

. 2016 كمال / إذا كانت $ص^٦ س^٣ = ١$ أثبت أن $ص'' = \frac{٣ص}{٤س^٢}$

الحل / • ملاحظات هامة في الإشتقاء ضمني :

↙ إذا كان ص' = لمقدار لا يوجد به ص) نشتق ثم نحل ص موضوع القانون ثم نشتق ثانية .

↙ إذا كان ص' و ص ملخبطين مع بعض نشتق مرتين دون حل ص موضوع القانون

↙ إذا رأينا $\frac{ص'}{ص}$ أو كان مثال أس مجهولة أو كبيرة نأخذ اللوغاريتم للطرفين قبل الاشتقاء .

الحل / $ص^٦ س^٣ = ١$ نشتق لـ س ← $ص^٦ \times ٣س^٢ + س^٣ \times ٦ص^٥ ص' = ٠$

$-٣س^٢ ص^٦ = ٦س^٣ ص^٥ ص'$ ← $ص' = \frac{-٣س^٢ ص^٦}{٦س^٣ ص^٥}$ ← $ص' = \frac{-ص}{٢س}$ نشتق مرة أخرى

$ص'' = \frac{(٢س)^٢ (-ص' - ٢ص) - (-ص - ٢س \times ص')}{(٢س)^٤}$ نعوض ($ص' = \frac{-ص}{٢س}$)

$ص'' = \frac{-٢س \times \frac{-ص}{٢س} + ٢ص}{٤س^٢} = \frac{ص + ٢ص}{٤س^٢} = \frac{٣ص}{٤س^٢}$ #

أ.مي

. 2017 / إذا كان $س = ٤^{١٠}$ ، $ص^٢ = ٤ص + ١$ أثبت أن $٢س ص ص' = ص^٢ - ١$

الحل / $س = ٤^{١٠}$

$١ = ١٠ \times ٤^٩ \frac{دع}{دس}$

$\frac{دع}{دس} = \frac{١}{١٠ \times ٤^٩}$

$\frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \times \frac{دس}{دع}$ ← $\frac{دص}{دع} = \frac{١}{٢ص} \times ١٠ \times ٤^٩$ ← $ص' = \frac{١}{٢ص \times ١٠ \times ٤^٩} \times ٢ص س$

← $ص ص' = \frac{س}{٤^٩} = \frac{٤^{١٠}}{٤^٩} = ٤$ ← $٢س ص ص' = ٤ = ص^٢ - ١$ #

. 2019 دور أول / يتحرك جسم حسب العلاقة $ع = ف^٢ - ٥ف + ٢$ حيث ف بالأمتار ، ع بالثانية أوجد (١) من البداية ف عند السرعة اللحظية للجسم (٢) سبب تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٣ م/ث

الحل / $ع = ف^٢ - ٥ف + ٢$ ← $\frac{دع}{دف} = ٢ف - ٥$

عندما ع = ٣ ⇐ ٣ = ٥ف² − ٢ف ⇐ ٥ف² − ٢ف − ٣ = ٠ ⇐ (٥ف + ٣)(ف − ١) = ٠

إما ٥ف + ٣ = ٠ ⇐ ٥ف = −٣ ⇐ ف = −٣/٥ مرفوض (مُعطى ف > ٠).

أو ف − ١ = ٠ ⇐ ف = ١م

* ع = ٥ف² − ٢ف نشتق للزمن

$\frac{دع}{دن} = ١٠ف\frac{دف}{دن} - ٢\frac{دف}{دن}$ ⇐ ت = ١٠ف ع − ٢ع $\Big|_{\substack{ع=٣\\ ف=١}}$ = ١٠×٣ − ٢×٣ = ٣٠ − ٦ = ٢٤م/د²

• 2019 دور أول/ إذا كان $هـ^{٢س} = لو_{هـ}(س + ٣ص)$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند (٠، $\frac{هـ}{٣}$)

الحل/ $هـ^{٢س} = لو_{هـ}(س + ٣ص)$ نشتق بالنسبة لـ س

$هـ^{٢س} \times ٢ = \frac{١ + ٣ص'}{س + ٣ص} \Big|_{(٠، \frac{هـ}{٣})}$ ⇐ $٢هـ^{٠} = \frac{١ + ٣ص'}{\frac{هـ}{٣} \times ٣}$ ⇐ $٢ = \frac{١ + ٣ص'}{هـ}$

⇐ ٢هـ = ١ + ٣ص' ⇐ ٢هـ − ١ = ٣ص' ⇐ $ص' = \frac{٢هـ - ١}{٣}$

• 2020/ اذا كان $(س + ص)^٥ = س^٢ص^٣$ أثبت أن $ص' = \frac{ص}{س}$

الحل/ طريقة (١):

أ.مي

$(س + ص)^٥ = س^٢ص^٣$ «بأخذ اللوغاريتم للطرفين»

$لو_{هـ}(س + ص)^٥ = لو_{هـ}(س^٢ص^٣)$ ⇐ $٥لو_{هـ}(س + ص) = لو_{هـ}س^٢ + لو_{هـ}ص^٣$

⇐ $٥لو_{هـ}(س + ص) = ٢لو_{هـ}س + ٣لو_{هـ}ص$ نشتق بالنسبة لـ س.

$٥\frac{(١ + ص')}{(س + ص)} = \frac{٢}{س} + \frac{٣ص'}{ص}$ ⇐ $\frac{٥ + ٥ص'}{س + ص} = \frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص}ص'$

⇐ $\frac{٥}{س + ص} + \frac{٥ص'}{س + ص} = \frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص}ص'$ ⇐ $\frac{٥ص'}{س + ص} - \frac{٣}{ص}ص' = \frac{٢}{س} - \frac{٥}{س + ص}$

⇐ $\left(\frac{٥}{س + ص} - \frac{٣}{ص}\right)ص' = \frac{٢(س + ص) - ٥س}{س(س + ص)}$

⇐ $\frac{(٥ص - ٣(س + ص))}{ص(س + ص)}ص' = \frac{٢س + ٢ص - ٥س}{س(س + ص)}$ ⇐ $\frac{(٥ص - ٣س - ٣ص)ص'}{ص} = \frac{٢ص - ٣س}{س}$

⇐ $\frac{(٢ص - ٣س)ص'}{ص} = \frac{(٢ص - ٣س)}{س}$ ⇐ $\frac{ص'}{ص} = \frac{١}{س}$ ⇐ $ص' = \frac{ص}{س}$ #

طريقة (٢): $(س + ص)^٥ = س^٢ص^٣$ نشتق لـ س

$٥(س + ص)^٤(١ + ص') = س^٢ \times ٣ص^٢ص' + ص^٣ \times ٢س$

$٥(س + ص)^٤ + ٥(س + ص)^٤ص' = ٣س^٢ص^٢ص' + ٢س ص^٣$

$٥(س + ص)^٤ص' - ٣س^٢ص^٢ص' = ٢س ص^٣ - ٥(س + ص)^٤$

$ص'(٥(س + ص)^٤ - ٣س^٢ص^٢) = ٢س ص^٣ - ٥(س + ص)^٤$

$\Leftarrow$ ص' = $\frac{(٢س ص^٣ - ٥(س+ص)^٤)}{(٥(س+ص)^٤ - ٣س^٢ص^٢)} \times \frac{(س+ص)}{(س+ص)}$

أ.مي حواري

$\Leftarrow$ ص' = $\frac{٢س ص^٣(س+ص) - ٥(س+ص)^٤(س+ص)}{٥(س+ص)^٤(س+ص) - ٣س^٢ص^٢(س+ص)}$

ص' = $\frac{٢س^٢ص^٣ + ٢س ص^٤ - ٥(س+ص)^٥}{٥(س+ص)^٥ - ٣س^٣ص^٢ - ٣س^٢ص^٣}$ نعوض $(س+ص)^٥ = س^٢ص^٣$

ص' = $\frac{٢س^٢ص^٣ + ٢س ص^٤ - ٥س^٢ص^٣}{٥س^٢ص^٣ - ٣س^٣ص^٢ - ٣س^٢ص^٣}$ $\Leftarrow$ ص' = $\frac{٢س ص^٤ - ٣س^٢ص^٣}{٢س^٢ص^٣ - ٣س^٣ص^٢}$

$\Leftarrow$ ص' = $\frac{س ص^٣(٢ص - ٣س)}{س^٢ص^٢(٢ص - ٣س)}$ $\Leftarrow$ ص' = $\frac{ص}{س}$ #

• 2020 دور ثالث/ إذا كان $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند (١،٤)

الحل/ $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ نشتق لـ س

$\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} = ٠ \Big|_{(١،٤)}$ $\Leftarrow$ $\frac{١}{٢\sqrt{٤}} + \frac{ص'}{٢\sqrt{١}} = ٠$ $\Leftarrow$ $\frac{١}{٤} + \frac{ص'}{٢} = ٠$ $\Leftarrow$ $\frac{١}{\cancel{٤}_{٢}} = -\frac{ص'}{\cancel{٢}}$

$\Leftarrow$ ص' = $-\frac{١}{٢}$

• 2021 دور أول/ جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $س^٢ - ٤س + ص^٢ = ١$ ، ص ٢ ٠ عند نقط تقاطعها مع منحنى ص = $س^٢ - ٤س + ٥$.

الحل/ نقطة التماس تمثل نقطة تقاطع المنحنيين لذلك نحل معادلتيهما لإيجاد النقطة .

$س^٢ - ٤س + ص^٢ = ١$ نعوض

ص = $س^٢ - ٤س + ٥$ $\Leftarrow$ ص − ٥ = $س^٢ - ٤س$

$\Leftarrow$ ص − ٥ + $ص^٢$ = ١ $\Leftarrow$ $ص^٢$ + ص − ٦ = ٠ $\Leftarrow$ (ص + ٣)(ص − ٢) = ٠

إما ص + ٣ = ٠ $\Leftarrow$ ص = −٣ مرفوض (ص ٢ ٠)

أو ص − ٢ = ٠ $\Leftarrow$ ص = ٢ ✓ نعوضها في إحدى المنحنيين

$\Leftarrow$ $س^٢ - ٤س + ٢^٢ = ١$ $\Leftarrow$ $س^٢ - ٤س + ٣ = ٠$

(س − ١)(س − ٣) = ٠

إما س − ١ = ٠ $\Leftarrow$ س = ١ ✓ أو س − ٣ = ٠ $\Leftarrow$ س = ٣ ✓

$\Leftarrow$ هناك نقطتان تقاطع وهما (١، ٢) ، (٣، ٢) $\Leftarrow$ يوجد عمودين .

$س^٢ - ٤س + ص^٢ = ١$ نشتق لـ س .

٢س − ٤ + ٢ص ص' = ٠ $\Big|_{(١،٢)}$ $\Leftarrow$ ٢ − ٤ + ٤ص' = ٠ $\Leftarrow$ ٢ = ٤ص' $\Leftarrow$ ص' = $\frac{١}{٢}$ = ميل المماس .

أ.مي حواري

$\Leftarrow$ ميل العمودي $\Big|_{(١،٢)}$ = −٢

معادلة العمودي / ص − $ص_١$ = م(س − $س_١$) $\Leftarrow$ ص − ٢ = −٢(س − ١) $\Leftarrow$ ص − ٢ = −٢س + ٢

$\Leftarrow$ ص = −٢س + ٤

$س^3 - 4 + 2ص\,ص' = 0$ ← $|_{(3,2)}$ ← $6 - 4 + 2ص' = 0$ ← $2 = -2ص'$ ← $-\frac{1}{2} = ص'$ = ميل المماس

← ميل العمودي $|_{(3,2)} = 2$ / معادلة العمودي: $ص - 2 = 2(س - 3)$

$ص - 2 = 2س - 6$ ← $ص = 2س - 4$

• 2021 دور أول/ إذا كان $ص^2 = \frac{5}{س^4+1}$ أثبت أن $س ص^3 + 5ص' = 0$

الحل طريقة (1):

$2ص ص' = \frac{0 - 5(4س^3)}{(س^4+1)^2}$ ← $ص'(س^4+1) = 0$ نشتق بالنسبة لـ س

$\frac{ص}{2}$ × [$2ص ص' = 2ص ص' \times (س^4+1) + 2س \times ص^2$] ← $س ص^3 + (س^4+1)ص ص' = 0$ ← $س ص^3 + 5ص ص' = 0$ #

أ.مي حواري

طريقة (2): بأخذ اللوغاريتم للطرفين:

$لو ص^2 = لو\left(\frac{5}{س^4+1}\right)$ ← $2لو ص = لو 5 - لو(س^4+1)$ نشتقر لـ س.

← $\frac{2ص'}{ص} = \frac{-4س^3}{س^4+1}$ ← $2ص'(س^4+1) = -4س^3 ص$ ← [$2ص ص' + 2س ص ص = 0$] × $ص^2$

← $ص'(س^4+1)ص^2 + س ص^3 = 0$ ← $5ص' + س ص^3 = 0$ #

من الأصلية $ص = \frac{5}{س^4+1}$ ← $ص'(س^4+1) = 0$

• 2021 دور ثاني/ يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث $ع = 1 + 8\sqrt{ف+8}$ ، ف بعد الجسم بالأمتار عن بداية سريانه عندما تكون سرعته م/ث

الحل $ع = 1 + 8\sqrt{ف+8}$ | $_{ع=0}$ ← $25 = 1 + 8\sqrt{ف+8}$ ← $24 = 8\sqrt{ف+8}$ / 8

← $\boxed{3 = \sqrt{ف+8}}$

$ع = 1 + 8\sqrt{ف+8}$ نشتقر بالنسبة لـ ن ← $ع' = 8 \times \frac{1}{2\sqrt{ف+8}} \times ف'$ | $_{ع=0}$ ، $ف' = ع$

← $ن = 0$ ← $\frac{ع(1+0)}{2\sqrt{ف+8}} = ن$ ← $ن = \frac{ع}{6}$ ← $ن = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ م/ث²

• 2021 دور ثاني/ إذا كان $ص + س ص = ظاس$ بين أن $ص' + ص = \frac{-2ص}{(1+س)}$

الحل $ص(1+س) = ظاس$ نشتقر لـ س.

$ص(1) + (1+س)ص' = -ظاس$ "لاحظ / ص، ص' ملتصقين ببعض ولا نحذف ص' موضوع القانون"

$ص' + (1+س)ص' + ص' = -ظاس$.

$٢ص' + (١+س)ص'' = -جتاس \Leftarrow (١+س)ص'' + جتاس = -٢ص'$

$(١+س)ص'' + ص(١+س) = -٢ص'$ اخراج (١+س) عامل مشترك.

$\Leftarrow ((١+س)(ص'' + ص) = -٢ص') \div (١+س)$

$ص'' + ص = \frac{-٢ص'}{١+س}$ #

• 2021 دور ثاني/ بين أن المماس لمنحنى العلاقة $س^٢ = لو_هـ(س^٢ص)$ ، س، ص > ٠ عندما س = ١ أفقياً.

الحل/ المماس أفقي عند (س = ١) ⇐ ميله = ٠ ⇐ $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١} = ٠$

عندما س = ١

$(١)^٢ = لو_هـ(١^٢ص) \Leftarrow ١ = لو_هـ ص \Leftarrow هـ = ص \Leftarrow (١، هـ)$

$س^٢ = لو_هـ(س^٢ص) \Leftarrow س^٢ = لو_هـ س^٢ + لو_هـ ص \Leftarrow س^٢ = ٢لو_هـ س + لو_هـ ص$ نشتق لـ س.

$٢س = \frac{٢}{س} + \frac{ص'}{ص}\Big|_{(١، هـ)}$

$٢ = ٢ + \frac{ص'}{هـ} \Leftarrow ٠ = \frac{ص'}{هـ} \Leftarrow ص' = ٠$ #

أ.مي حواري

• 2021 دور ثاني/ ما معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $س ص = جا(\pi ص)$ عندما $ص = \frac{١}{٢}$

الحل/ $س ص = جا(\pi ص)\Big|_{ص=\frac{١}{٢}} \Leftarrow \frac{١}{٢}س = جا(\frac{\pi}{٢}) \Leftarrow \frac{١}{٢}س = ١ \Leftarrow س = ٢ \Leftarrow (٢، \frac{١}{٢})$ نقطة تماس

* $س ص = جا(\pi ص)$ نشتق لـ س

$س ص' + ص = جتا(\pi ص) \times \pi ص'\Big|_{(٢، \frac{١}{٢})} \Leftarrow ٢ص' + \frac{١}{٢} = \pi ص' \cancel{(جتا\frac{\pi}{٢})}$

$\Leftarrow ٢ص' + \frac{١}{٢} = ٠ \Leftarrow ٢ص' = -\frac{١}{٢} \Leftarrow ص' = \frac{-١}{٤}$ = ميل المماس.

⇐ ميل العمودي = ٤ نقطة التماس = $(٢، \frac{١}{٢})$

معادلة العمودي/ $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - \frac{١}{٢} = ٤(س - ٢) \Leftarrow ص - \frac{١}{٢} = ٤س - ٨$

$\Leftarrow ص = ٤س - ٨ + \frac{١}{٢} \Leftarrow ص = ٤س - \frac{١٥}{٢}$

• 2021 دور ثالث/ إذا كان $(١ - جتاس)^٢ = ٥ص - جا^٢(س)$ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$

الحل/ $(١ - جتاس)^٢ = ٥ص - جا^٢س$

$١ - ٢جتاس + جتا^٢س + جا^٢س = ٥ص \Leftarrow ١ - ٢جتاس + ١ = ٥ص$

$\Leftarrow ٢ - ٢جتاس = ٥ص$ نشتق

$٢جاس = ٥ص' \Leftarrow \frac{٢}{٥}جاس = ص'$

• 2021 دورثاني/ إذا كانت العلاقة $V=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}ع^{3}$ تربط إزاحة الجسم (بالأمتار) مع سرعته (بالمتر/دقيقة)، ما تسارع الصبم عندما ف تكون قطع ٣ أمتار.

الحل: $ت=\frac{1}{3}$ م/ث² "المقدار بالدرس: خارجي ضوء الزرقة"

• 2022 دورأول/ إذا كان $ص=هـ^{س}\times هـ^{ص}$ بيرهن أن $ص ص=ص+1$ $-هـ^{س+ص}$

الحل: طريقة (١):

$ص=هـ^{س}\times هـ^{ص}\leftarrow ص+1=هـ^{(س+ص)}$ نشتقر لـ س

$\leftarrow ص+1=(1+ص ص)هـ^{س+ص}\leftarrow ص=هـ^{س+ص}+هـ^{س+ص}ص ص$

$\leftarrow ص ص=-هـ^{س+ص}+ص$

$ص(هـ^{س+ص}-1)=-هـ^{س+ص}$ "نعوض $هـ^{س+ص}=ص+1$"

$ص(ص+1-1)=-هـ^{س+ص}\leftarrow ص ص=-هـ^{س+ص}$ #

طريقة (٢):

$ص=هـ^{س}\times هـ^{ص}\leftarrow ص+1=هـ^{س+ص}=(ص+1)$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين.

$\leftarrow لو_{هـ}(هـ^{(س+ص)})=لو_{هـ}(ص+1)\leftarrow س+ص=لو_{هـ}(ص+1)$ نشتقر لـ س.

$\leftarrow 1+ص ص=\frac{ص ص}{(ص+1)}\leftarrow (ص+1)+(ص+1)ص ص=ص ص\leftarrow (ص+1)ص ص-ص ص=-(ص+1)$

$\leftarrow ص(ص+1-1)=-(ص+1)$ نعوض $(ص+1)=هـ^{س+ص}$

$\leftarrow ص ص=-(هـ)^{س+ص}$ #

• 2022 دورثاني/ إذا كان $ص=هـ^{م س}$ ، م ∈ ط ، ص > ٠ بيرهن أن $ص ص=(\frac{ص}{هـ})^{ن}ص$.

الحل: بما أن الأسس مجهولة ← نأخذ اللوغاريتم للطرفين.

$لو_{هـ}ص=لو_{هـ}هـ^{م س}\leftarrow ن لو_{هـ}ص=م س\leftarrow لو_{هـ}ص=\frac{م}{ن}(س)$ نشتقر لـ س.

$\leftarrow \frac{ص ص}{ص}=\frac{م}{ن}\leftarrow ص ص=(\frac{م}{ن})ص$ نشتقر مرة أخرى لـ س

$ص ص=(\frac{م}{ن})ص ص$ نعوض $(ص ص=\frac{م}{ن}ص)$

$ص ص=\frac{م}{ن}\times\frac{م}{ن}ص=(\frac{م}{ن})^{2}ص$ #

• 2022/ إذا كان $ص^{3}+٥ص=ق(٤س-س^{2})$ وكان $ق'(٣)=٢$ ، $ق(٣)=-٦$ ما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ١

$ق(٣)=-٣$

الحل: عندما $(س=١)\leftarrow ص^{3}+٥ص=ق(٣)\leftarrow ص^{3}+٥ص=-٣$

$ص^{3}=-٨\leftarrow ص=-٢$ $(-٢,١)$

$ص^{2}+٥=ق'(٤س-س^{2})$ نشتقر لـ س.

$٣ص^٢ ص' = ق'(٤س - س^٢) \times (٤ - ٢س)\Big|_{س=١} \Leftarrow ٣ص^٢ ص' = ق'(٣)(٢)$

$\Leftarrow ٣(-٢)^٢ ص' = ٢ \times -٦$

$٣ \times ٤ ص' = -١٢ \Leftarrow ص' = -١$

• 2022 دور ثاني/ ما معادلة المماس لمنحنى العلاقة $س ص^٣ = ١٢$ عند $(\frac{٣}{٢}، ب)$ الواقعة عليه.

الحل/ $(\frac{٣}{٢}، ب) \in$ للمنحنى $\Leftarrow \frac{٣}{٢}(ب)^٣ = ١٢ \Leftarrow ب^٣ = ١٢ \times \frac{٢}{٣} \Leftarrow ب^٣ = ٨ \Leftarrow ب = ٢$

$\Leftarrow (\frac{٣}{٢}، ٢)$ نقطة التماس

$س ص^٣ = ١٢$ نشتق لـ س.

$س \times ٣ص^٢ ص' + ص^٣ = ٠ \Big|_{(\frac{٣}{٢}، ٢)} \Leftarrow \frac{٣}{٢} \times ٣ \times ٢^٢ ص' + ٢^٣ = ٠ \Leftarrow ١٨ ص' = -٨ \Leftarrow ص' = \frac{-٨}{١٨}$

أ.مي حواري

$\Leftarrow ص' = \frac{-٤}{٩}$ = ميل المماس

معادلة المماس/ $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٢ = \frac{-٤}{٩}(س - \frac{٣}{٢}) \Leftarrow ص - ٢ = \frac{-٤}{٩}س + \frac{٤}{٩} \times \frac{٣}{٢}$

$\Leftarrow ص - ٢ = \frac{-٤}{٩}س + \frac{٢}{٣} \Leftarrow ص = \frac{-٤}{٩}س + \frac{٨}{٣}$

• 2023 دور أول/ إذا كان $\sqrt[٣]{س(ص-١)} = \sqrt{س}$ ، $س، ص \in ح^+$ أثبت أن $٢\sqrt{س}\frac{دص}{دس} = ١$

الحل/

$(\sqrt[٣]{س(ص-١)} = \sqrt{س})^٣ \Leftarrow س(ص-١) = (س^{\frac{١}{٢}})^٣ \Leftarrow \frac{س(ص-١)}{س} = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{س}$

$\Leftarrow ص - ١ = س^{\frac{٣}{٢}-١} \Leftarrow ص - ١ = \sqrt{س}$ نشتق

$ص' = \frac{١}{٢\sqrt{س}} \Leftarrow ٢\sqrt{س}\frac{دص}{دس} = ١$ #

• 2023 دور ثاني/ إذا كان $\sqrt{س} = جاص$ أثبت أن $\frac{(ص')^٢}{ص''} = -\frac{١}{٢}ظا(٢ص)$

الحل/ $[\sqrt{س} = جاص]^٢ = س = جا^٢ص$ نشتق بالنسبة لـ س

$١ = ٢جاص \times جتاص \times ص' \Leftarrow ١ = جا(٢ص)ص'$ نشتق مرة أخرى لـ س

$\Leftarrow ٠ = جا(٢ص) \times ص'' + ص' \times ٢جتا(٢ص) \times ص'$

$[-ص'' جا(٢ص) = ٢جتا(٢ص)(ص')^٢] \div (٢جتا(٢ص)ص'')$

$-\frac{١}{٢}\frac{جا(٢ص)}{جتا(٢ص)} = \frac{(ص')^٢}{ص''} \Leftarrow -\frac{١}{٢}ظا(٢ص) = \frac{(ص')^٢}{ص''}$ #

• 2024 دور أول/ إذا علمت أن $ص^٢(س^٢+١) = ٦$ أثبت أن $س ص^٥ + ٦ص^٢(\frac{دص}{دس}) = ٠$

الحل/ طريقة (١):

$\boxed{ص^٢(س^٢+١) = ٦}$ نشتق لـ س $\Leftarrow (ص^٢ \times ٢س + (س^٢+١) \times ٢ص ص') = ٠ \quad / \times \frac{ص^٣}{٢}$

$\Leftarrow س ص^٥ + (س^٢+١)ص^٤ ص' = ٠ \Leftarrow س ص^٥ + \boxed{(س^٢+١)(ص^٢)}(ص^٢)ص' = ٠$

$\Leftarrow س ص^٥ + ٦ص^٢ ص' = ٠$ #

طريقة (٢): $ص^٢(س^٢+١) = ٦$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}^2(\text{س}^2+1)) = 6 \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^2 + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+1) = \text{لو}_{\text{هـ}}6 \Leftarrow 2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+1) = \text{لو}_{\text{هـ}}6$ نشتق لـ س.

$\frac{2\text{ص}'}{\text{ص}} + \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+1} = 0 \Leftarrow \frac{2\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{-2\text{س}}{\text{س}^2+1} \Leftarrow \text{ص}'(\text{س}^2+1) = -\text{ص}\,\text{س}$

$\Leftarrow [\text{ص}'(\text{س}^2+1) + \text{ص}\,\text{س} = 0] \times \text{ص}^2 \Leftarrow \text{ص}'\text{ص}^2 \times \boxed{\text{ص}^2(\text{س}^2+1)} + \text{ص}^3\text{س} = 0$

$\Leftarrow 6\text{ص}'\text{ص}^2 + \text{ص}^3\text{س} = 0$ #

• 2024 دور أول/ إذا كان $\text{ص}^2 + 2\text{س}\,\text{ص} = 12$ وكان $\text{ع} = 3\text{ص} - \text{ص}^2 + 5$ جد $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ عندما $(\text{ص} = 2)$

الحل/ عندما $(\text{ص} = 2) \Leftarrow 2^2 + 2\times 2\text{س} = 12 \Leftarrow 4 + 4\text{س} = 12 \Leftarrow 4\text{س} = 8 \Leftarrow (\text{س} = 2)$

$\text{ص}^2 + 2\text{س}\,\text{ص} = 12$

$2\text{ص}\text{ص}' + 2\text{س}\text{ص}' + 2\text{ص} = 0 \Big|_{(2,2)}$

$4\text{ص}' + 4\text{ص}' + 4 = 0$

$8\text{ص}' = -4 \Leftarrow \text{ص}' = \frac{-1}{2} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\text{ع} = 3\text{ص} - \text{ص}^2 + 5$

$\frac{\text{دع}}{\text{دص}} = 3 - 2\text{ص} \Big|_{\text{ص}=2}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دص}} = 3 - 4 = -1$

$\Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{\text{دع}}{\text{دص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Big|_{(2,2)} = -1 \times \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$

أ.مي حواري

• 2024 دور ثاني/ جد النقاط على منحنى العلاقة $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = 3$ ، التي يكون عندها $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ تساوي (-2)

الحل/ نفرض النقطة $(\text{س}, \text{ص})$

$\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = 3$ نشتق لـ س $\Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} + \frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}}\text{ص}' = 0 \Big|_{\text{ص}'=-2}$

$\Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} - \frac{2}{2\sqrt{\text{ص}}} = 0 \Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ص}}} \Leftarrow \sqrt{\text{ص}} = 2\sqrt{\text{س}}$ نعوضها في المنحنى.

* $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = 3 \Leftarrow \sqrt{\text{س}} + 2\sqrt{\text{س}} = 3 \Leftarrow 3\sqrt{\text{س}} = 3 \Leftarrow (\sqrt{\text{س}} = 1)^2 \Leftarrow \text{س} = 1$

* $\sqrt{\text{ص}} = 2\sqrt{\text{س}} \Big|_{\text{س}=1} \Leftarrow (\sqrt{\text{ص}} = 2)^2 \Leftarrow \text{ص} = 4 \Leftarrow$ النقطة $(\text{س}, \text{ص}) = (1, 4)$

• 2024 (دور ثالث / ضفة) / جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 1 = 4\text{س} - \text{ص}$ ، عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم $\text{ص} = 2\text{س} - 1$ ، والواقعة في الربع الأول.

الحل/ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 1 = 4\text{س} - \text{ص}$

نعوض $\text{ص} = 2\text{س} - 1$

(أولاً: نجد نقطة التقاطع).

$\Leftarrow \text{س}^2 + (2\text{س} - 1)^2 + 1 = 4\text{س} - (2\text{س} - 1)$

$\text{س}^2 + 4\text{س}^2 - 4\text{س} + 1 + 1 = 4\text{س} - 2\text{س} + 1$

$\Leftarrow 5\text{س}^2 - 4\text{س} + 2 = 2\text{س} + 1 \Leftarrow 5\text{س}^2 - 6\text{س} + 1 = 0$

$\Leftarrow (5\text{س} - 1)(\text{س} - 1) = 0$

إما $5\text{س} - 1 = 0 \Leftarrow \text{س} = \frac{1}{5} \Leftarrow \text{ص} = 2\text{س} - 1 = 2\times\frac{1}{5} - 1 \Leftarrow \text{ص} = -\frac{3}{5}$ $(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}) \notin$ الربع الأول

أو $\text{س} - 1 = 0 \Leftarrow \text{س} = 1$

$\text{ص} = 2\text{س} - 1 = 2 - 1 \Leftarrow \text{ص} = 1 \Leftarrow$ نقطة التقاطع $(1, 1) \in$ للربع الأول.

$س^3 + ص^2 + 1 = 3س - ص$ نشتقّ لـ س

$3س^2 + 2ص\,ص' - 3 - ص' = 0$ ⇐ $2ص' = 3 - 3س^2$ ⇐ $ص' = \frac{3-3س^2}{2ص}$ ⇐ $ص' = \frac{3}{2}$ = ميل المماس

(1) (1)

معادلة المماس / $ص - ص_1 = م(س - س_1)$ ⇐ $ص - 1 = \frac{3}{2}(س - 1)$

$ص - 1 = \frac{3}{2}س - \frac{3}{2}$ ⇐ $ص = \frac{3}{2}س - \frac{3}{2} + \frac{2}{2}$

⇐ $ص = \frac{3}{2}س + \frac{1}{2}$

• 2025 دور أول / إذا كانت $ص^3 - 3س ص + 3س^3 = 21$ فجد $ص - ص^2 + 8 = 0$ فإذا علمت أنّ $س = 2$ ، $\frac{ص}{س}$ عندما $ص = 6$

الحل / عندما $(ص = 6)$ ⇐ $6^3 - 3 \times 3 \times 6 + 3س^3 = 21$ ⇐ $36 - 18س + 3س^3 = 21$

⇐ $(3س^3 - 18س + 15 = 0 \div 3)$

$س^3 - 6س + 5 = 0$ ⇐ $(س - 1)(س - 5) = 0$

إما $س - 1 = 0$ ⇐ $س = 1$ مرفوض لأنه $س > 2$

أو $س - 5 = 0$ ⇐ $س = 5$

$ص^3 - 3س ص + 3س^3 = 21$

$3ص^2 ص' - 3س ص' - 3ص + 6س = 0$ (2) (2)

$12ص' - 15ص' - 18 + 30 = 0$

$-3ص' + 12 = 0$ ⇐ $12 = 3ص'$

⇐ $ص' = \frac{ص}{س} = 4$

$ص^2 - ص - 8 = 0$

$\frac{ص}{س} = ص' - 5$

$\frac{ص}{س}|_{ص=6} = 6 - 5 = 1$

المطلوب / $\frac{ع}{س} = \frac{ع}{ص} \times \frac{ص}{س} = |_{(2)}$ $-8 \times 4 = -32$

أ.مي حواري

• 2025 دور ثاني / لتكن $ص^2 = \frac{س}{س+1}$ أثبت أن $\frac{ص}{س} = \frac{ص^3}{2س^2}$

الحل / $ص^2 = \frac{س}{س+1}$ إضافة وطرح (1) للبسط ← فقط لتسهيل الاشتقاق

$ص^2 = \frac{(س+1)-1}{س+1}$ ⇐ $ص^2 = \frac{س+1}{س+1} - \frac{1}{س+1}$ ⇐ $ص^2 = 1 - \frac{1}{س+1}$ نشتقّ لـ س

⇐ $2ص\,ص' = 0 + \frac{1}{(س+1)^2}$ ⇐ $\frac{ص}{س} = \frac{ص'}{س} = \frac{1}{2ص(س+1)^2}$

„ معطى: $ص^2 = \frac{س}{س+1}$ ⇐ $ص^2(س+1) = س$

⇐ $(س+1) = \frac{س}{ص^2}$ „

⇐ $\frac{ص}{س} = \frac{1}{2ص(\frac{س}{ص^2})^2} = \frac{1}{2ص \times \frac{س^2}{ص^4}}$

$\frac{ص}{س} = \frac{1}{2س^2} \times \frac{ص^3}{1}$ ⇐ $\frac{ص}{س} = \frac{ص^3}{2س^2}$ #

" حتى إذا أعياه التعب .. تذكر أنّ الصبر جنّاتٌ عدنٍ .. فوثب ! "

• 2025 دور ثاني/ ليكن $(\text{س ص})^{٥} = \text{س}^{٢}$ ، س ، ص ≠ ٠ أثبت أن $\text{ص}' = \frac{-٣\text{ص}}{٥\text{س}}$

الحل/ $(\text{س ص})^{٥} = \text{س}^{٢} \Leftarrow [\text{س}^{٥} \times \text{ص}^{٥} = \text{س}^{٢}] \div \text{س}^{٥}$ ، س ≠ ٠

$\Leftarrow \text{س}^{٣}\text{ص}^{٥} = ١$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٣}\text{ص}^{٥}) = \text{لو}_{\text{هـ}}١ \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^{٥} = ٠ \Leftarrow ٣\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٥\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = ٠$ نشتق لـ س

$\Leftarrow \frac{٣}{\text{س}} + \frac{٥\text{ص}'}{\text{ص}} = ٠ \Leftarrow \left[\frac{-٣}{\text{س}} = \frac{٥\text{ص}'}{\text{ص}}\right] \times \frac{\text{ص}}{٥} \Leftarrow \frac{-٣\text{ص}}{٥\text{س}} = \text{ص}'$ #

• 2020 قلقيلية/ إذا كان $\text{س ص} + \frac{\text{س}}{\text{ص}} = ١$ أثبت أن $\text{ص}' = \frac{\text{ص}(١+\text{ص}^{٢})}{\text{س}(١-\text{ص}^{٢})}$

الحل/ $\left(\text{س ص} + \frac{\text{س}}{\text{ص}} = ١\right) \times \text{ص}$

طريقة (١)/ $\text{س ص}^{٢} + \text{س} = \text{ص} \Leftarrow \text{س}(\text{ص}^{٢}+١) = \text{ص}$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}^{٢}+١) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ نشتق لـ س

$\frac{١}{\text{س}} + \frac{٢\text{ص}\text{ص}'}{(\text{ص}^{٢}+١)} = \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} \Leftarrow \frac{١}{\text{س}} = \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} - \frac{٢\text{ص}\text{ص}'}{\text{ص}^{٢}+١}$

$\Leftarrow \frac{١}{\text{س}} = \text{ص}'\left(\frac{١}{\text{ص}} - \frac{٢\text{ص}}{\text{ص}^{٢}+١}\right) \Leftarrow \frac{١}{\text{س}} = \text{ص}'\left(\frac{\text{ص}^{٢}+١-٢\text{ص}^{٢}}{\text{ص}(\text{ص}^{٢}+١)}\right)$

توحيد مقامات

$\Leftarrow \frac{١}{\text{س}} = \frac{(١-\text{ص}^{٢})\text{ص}'}{\text{ص}(\text{ص}^{٢}+١)} \Leftarrow \left(\frac{\text{ص}(\text{ص}^{٢}+١)}{\text{س}} = (١-\text{ص}^{٢})\text{ص}'\right) \times \frac{١}{(١-\text{ص}^{٢})}$

$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{\text{ص}(\text{ص}^{٢}+١)}{\text{س}(١-\text{ص}^{٢})}$ #

أ.مي حواري

• طريقة (٢):

$\left(\text{س ص} + \frac{\text{س}}{\text{ص}} = ١\right) \times \text{ص} \Leftarrow \text{س ص}^{٢} + \text{س} = \text{ص} \Leftarrow \text{س}(\text{ص}^{٢}+١) = \text{ص}$ ، $\text{ص}^{٢}+١ = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}^{٢}+١}$ نشتق بالنسبة لـ (ص)

$\frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \frac{(\text{ص}^{٢}+١) - \text{ص}(٢\text{ص})}{(\text{ص}^{٢}+١)^{٢}} \Leftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \frac{١-\text{ص}^{٢}}{(\text{ص}^{٢}+١)^{٢}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{ص}^{٢}+١)^{٢}}{(١-\text{ص}^{٢})}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{ص}^{٢}+١)}{(١-\text{ص}^{٢})} \times (\text{ص}^{٢}+١)$ نعوض $(\text{ص}^{٢}+١) = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{ص}^{٢}+١)}{(١-\text{ص}^{٢})} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}(\text{ص}^{٢}+١)}{\text{س}(١-\text{ص}^{٢})}$ #

• 2020 طولكرم/ إذا كانت $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}$ أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\left(\frac{\text{ص}^{٢}+\text{س ص}-١}{\text{س}^{٢}+\text{س ص}-١}\right)$

الحل/ $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}$ نشتق لـ س

$\text{هـ}^{\text{س ص}}(\text{س ص}' + \text{ص}) = ١ + \text{ص}' \Leftarrow \text{س هـ}^{\text{س ص}}\text{ص}' + \text{ص هـ}^{\text{س ص}} = ١ + \text{ص}'$

$\Leftarrow \text{س هـ}^{\text{س ص}}\text{ص}' - \text{ص}' = ١ - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}$

$\text{ص}'(\text{س هـ}^{\text{س ص}} - ١) = ١ - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}$ نعوض $\text{هـ}^{\text{س ص}} = (\text{س} + \text{ص})$

$\Leftarrow$ ص َ(س(س+ص) − ١) = ١ − ص(س+ص)

ص َ(س² + س ص − ١) = ١ − ص س − ص² "اخراج (−) عامل مشترك"

ص َ(س² + س ص − ١) = −(ص² + س ص − ١) $\Leftarrow$ ص َ = $\frac{-(\text{ص}^2+\text{س ص}-1)}{(\text{س}^2+\text{س ص}-1)}$ #

• الوسطى 2020 / إذا كان س = ظا ص أثبت أن ص ً(١+س²) = − جا(٢ص)

الحل/ س = ظا ص نشتق لـ س

١ = قا²ص × ص َ $\Leftarrow$ ص َ = $\frac{1}{\text{قا}^2\text{ص}}$ = $\frac{1}{\text{ظا}^2\text{ص}+1}$ = $\frac{1}{(\text{س}^2+1)}$

$\Leftarrow$ $\frac{1}{\text{قا}^2\text{ص}}$ = ص َ

$\Leftarrow$ جتا²ص = ص َ نشتق مرة ثانية لـ س

$\Leftarrow$ ٢جتا ص × −جا ص × ص َ = ص ً

$\Leftarrow$ −(٢جا ص جتا ص) × $\frac{1}{(\text{س}^2+1)}$ = ص ً $\Leftarrow$ −(جا(٢ص)) × $\frac{1}{\text{س}^2+1}$ = ص ً

$\Leftarrow$ −جا(٢ص) = ص ً(١+س²) #

أ.مي حواري

• 2020 مديرية غرب غزة / إذا كان ص = $\sqrt{\text{س}+\sqrt{\text{س}^2+1}}$ برهن أن ٢ص َ $\sqrt{\text{س}^2+1}$ = ص

الحل/ ص = $\sqrt{\text{س}+\sqrt{1+\text{س}^2}}$ تربيع الطرفين

$\boxed{\text{ص}^2 = \text{س}+\sqrt{1+\text{س}^2}}$ نشتق لـ س.

٢ص ص َ = ١ + $\frac{\cancel{2}\text{س}}{\cancel{2}\sqrt{1+\text{س}^2}}$ "توحيد مقامات"

٢ص ص َ = $\frac{\boxed{\sqrt{\text{س}^2+1}+\text{س}}}{\sqrt{\text{س}^2+1}}$ $\Leftarrow$ ٢ص ص َ = $\frac{\text{ص}^2}{\sqrt{\text{س}^2+1}}$ $\Leftarrow$ ٢ص َ $\sqrt{\text{س}^2+1}$ = ص #

• 2023 الوسطى / اذا كان ص = لو$_{\text{هـ}}$(هـ^{س} + $\sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}}+1}$) أثبت أن (هـ$^{2\text{س}}$+١) ص ً − ص َ = ٠

الحل/ ص = لو$_{\text{هـ}}$(هـ^{س} + $\sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}}+1}$) $\Leftarrow$ هـ^{ص} = هـ^{س} + $\sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}}+1}$ نشتق لـ س.

$\Leftarrow$ هـ^{ص} ص َ = هـ^{س} + $\frac{\cancel{2}\text{هـ}^{2\text{س}}}{\cancel{2}\sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}}+1}}$ $\Leftarrow$ هـ^{ص} ص َ = هـ^{س} (١ + $\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}}+1}}$) توحيد مقامات.

$\Leftarrow$ هـ^{ص} ص َ = هـ^{س} ($\frac{\sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}}+1}+\text{هـ}^{\text{س}}}{\sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}}+1}}$) $\Leftarrow$ ص َ = $\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}}+1}}$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$\Leftarrow$ لو$_{\text{هـ}}$ ص َ = لو$_{\text{هـ}}$ ($\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}}+1}}$) $\Leftarrow$ لو$_{\text{هـ}}$(ص َ) = لو$_{\text{هـ}}$ هـ^{س} − لو$_{\text{هـ}}$(هـ$^{2\text{س}}$+١)$^{\frac{1}{2}}$

$\Leftarrow$ لو$_{\text{هـ}}$(ص َ) = س − $\frac{1}{2}$ لو$_{\text{هـ}}$(هـ$^{2\text{س}}$+١) "نشتق مرة أخرى لـ س"

$\frac{\text{ص ً}}{\text{ص َ}}$ = ١ − $\frac{1}{\cancel{2}}$ × $\frac{\cancel{2}\text{هـ}^{2\text{س}}}{(\text{هـ}^{2\text{س}}+1)}$ توحيد مقامات

$\Leftarrow$ $\frac{\text{ص ً}}{\text{ص َ}}$ = $\frac{\cancel{\text{هـ}^{2\text{س}}}+1-\cancel{\text{هـ}^{2\text{س}}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}+1}$ بالضرب التبادلي

$\Leftarrow$ ص ً(هـ$^{2\text{س}}$+١) = ص َ $\Leftarrow$ (هـ$^{2\text{س}}$+١) ص ً − ص َ = ٠ #

• 2023 مديرية غرب غزة / إذا كان $س^{ص} = ص^{س}$ أثبت أن $ص' = \frac{ص^2(1-لو_هس)}{س^2(1-لو_هص)}$.

الحل/ نأخذ اللوغاريتم للطرفين .

$لو_هس^{ص} = لو_هص^{س} \Leftarrow ص\,لو_هس = س\,لو_هص$ نشتق لـ س .

$\Leftarrow ص \times \frac{1}{س} + (لو_هس) \times ص' = (س \times \frac{ص'}{ص}) + (لو_هص)$

$\Leftarrow \frac{ص}{س} - لو_هص = \frac{س}{ص}ص' - (لو_هس)ص' \Leftarrow \frac{ص - س\,لو_هص}{س} = (\frac{س}{ص} - لو_هس)ص'$

$\Leftarrow (\frac{ص - س\,لو_هص}{س}) = (\frac{س - ص\,لو_هس}{ص})ص'$

$\Leftarrow \frac{(ص - ص\,لو_هس)}{س} = (\frac{س - س\,لو_هص}{ص})ص' \Leftarrow \frac{ص(1-لو_هس)}{س} = \frac{س(1-لو_هص)}{ص}ص'$

$\Leftarrow ص(1-لو_هس) \times ص = س^2(1-لو_هص)ص' \Leftarrow \frac{ص^2(1-لو_هس)}{س^2(1-لو_هص)} = ص'$ #

• 2024 مديرية الخليل / إذا كان المستقيم $2ص - 3س = أ$ يمس منحنى العلاقة $(س+1)^3 - 2ص^2 = 0$ جد قيمة الثابت أ ، أ > 0 .

الحل/ نفرض نقطة التماس (س ، ص)

* $2ص - 3س = أ \Leftarrow 2ص' - 3 = 0 \Leftarrow 2ص' = 3 \Leftarrow ص' = \frac{3}{2}$ = ميل المماس .

* $(س+1)^3 - 2ص^2 = 0$ نشتق لـ س

$3(س+1)^2 - 4ص\,ص' = 0$ ، $ص' = \frac{3}{2}$ $\Leftarrow 3(س+1)^2 - 4 \times \frac{3}{2}ص = 0$

$\cancel{3}(س+1)^2 = 2 \times \cancel{3}ص \Leftarrow \boxed{ص = \frac{(س+1)^2}{2}}$

* $(س+1)^3 - 2(\boxed{ص})^2 = 0 \Leftarrow (س+1)^3 - 2(\frac{(س+1)^2}{2})^2 = 0$

$\Leftarrow (س+1)^3 - \frac{\cancel{2}(س+1)^4}{\cancel{4}\,2} = 0$ اخراج $(س+1)^3$ عامل مشترك .

$\Leftarrow (س+1)^3(1 - \frac{(س+1)}{2}) = 0$

إما $س + 1 = 0 \Leftarrow س = -1 \Leftarrow ص = \frac{(-1+1)^2}{2} = 0 \Leftarrow (-1 ، 0)$ نقطة تماس .

أو $1 - \frac{(س+1)}{2} = 0 \Leftarrow 1 = \frac{س+1}{2} \Leftarrow 2 = س + 1 \Leftarrow 1 = س$

$\Leftarrow ص = \frac{(1+1)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Leftarrow (1 ، 2)$ نقطة تماس .

$(-1 ، 0) \in$ للمماس $\Leftarrow 2ص - 3س = أ \Leftarrow 2 \times 0 - 3 \times -1 \Leftarrow 3 = أ$

$(1 ، 2) \in$ للمماس $\Leftarrow 2 \times 2 - 3 \times 1 = أ \Leftarrow 4 - 3 = أ \Leftarrow 1 = أ$

$\Leftarrow \{3 ، 1\} = أ$

أ.مي حواري

• 2024 جنوب الخليل / إذا كان $س + ص = جاص$ أثبت أن $(ص')^2 = ص''$ (ظتاص - قتاص) .

الحل/ $س + ص = جاص$ نشتق لـ س

$1 + ص' = جتاص \times ص'$ نشتق مرة أخرى .

$\leftarrow$ $ص'' = (ظاص)ص' - (ق'ص)(ظاص)ص$

$(ص'' - (ظاص)ص' = -(ص)^2 ظاص)\times -1$ $\leftarrow$ $ظاص(ص'') - ص' = (ص)^2 ظاص$.

$\leftarrow$ $[ص'(ظاص - 1) = (ق'ص)^2 ظاص] \div ظاص$

$\leftarrow$ $ص'(\frac{ظاص}{ظاص} - \frac{1}{ظاص}) = (ق'ص)^2$ $\leftarrow$ $ص'(ظاص - قاص) = (ق'ص)^2$ $\neq$

• 2024 طولكرم/ إذا كان جاص = جاس أثبت أن $(ق'ص)^2 = 3ق^2ص + 1$

الحل/ جاص = جاس سنشتق لـ س

$(ظاص)ص' = 2ظاس)^2$ $\leftarrow$ $(ظاص)^2 (ق'ص)^2 = 4ظاس$

$\leftarrow$ $ظاص(ق'ص)^2 = 4(1 - جاس)$

$ظاص(ق'ص)^2 = 4 - 4جاس$ $\leftarrow$ $(ظاص(ق'ص)^2 = 4 - 4جاص) \div ظاص$

$\leftarrow$ $(ق'ص)^2 = \frac{4}{ظاص} - \frac{جاص}{ظاص}$ $\leftarrow$ $(ق'ص)^2 = 4ق^2ص - ظاص = 4ق^2ص - (ق^2ص - 1)$

$\leftarrow$ $(ق'ص)^2 = 4ق^2ص - ق^2ص + 1$ $\leftarrow$ $(ق'ص)^2 = 3ق^2ص + 1$ $\neq$

• 2024 الخليل/ جد النقط الواقعة على منحنى العلاقة $س^2 + ص^2 + 1 = 0$ حيث يكون المماس عندها عموديًا على المستقيم $4ص - س = 6$

الحل/ نفرض النقطة $(س_1، ص_1)$

$4ص - س = 6$ $\leftarrow$ $4ص' - 1 = 0$ $\leftarrow$ $4ص' = 1$ $\leftarrow$ $ص' = \frac{1}{4}$ = ميل العمودي

$\leftarrow$ ميل المماس $= \frac{-1}{\text{ميل العمودي}} = -4$

$*$ $س^2 + ص^2 + 1 = 0$ $\leftarrow$ $\frac{1}{2س} + \frac{ص'}{2ص + 1} = 0$ $\leftarrow$ $ص' = -4$ | $\leftarrow$ $\frac{1}{2س} - \frac{4^2}{2ص + 1} = 0$

$\leftarrow$ $\frac{1}{2س} = \frac{2}{ص + 1}$ $\leftarrow$ $ص + 1 = 4س$ نعوضها في المنحنى.

$*$ $س^2 + 4س = 0$ $\leftarrow$ $س(س + 4) = 0$ $\leftarrow$ $س = 0$ $\leftarrow$ $س = 1$

$ص + 1 = 4س$ $\leftarrow$ $(ص + 1 = 4)^2$ $\leftarrow$ $ص + 1 = 16$ $\leftarrow$ $ص = 15$

$\leftarrow$ النقطة $(س_1، ص_1) = (1، 15)$

أ.مي حواري

• 2024 رام الله/ إذا كان $ظا(ص) = \frac{3س + ب}{جس + د}$ و $\frac{ص}{س} = 1$ عندما $س = 0$ جد قيمة $3د - ب جـ$

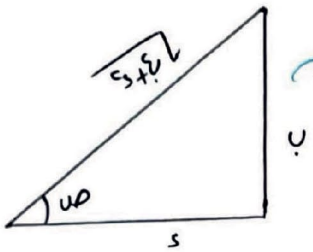
الحل/ $ظاص = \frac{3س + ب}{جس + د}$ $\leftarrow$ $قا^2(ص)ص' = \frac{(جس + د)(3) - (3س + ب)(جـ)}{(جس + د)^2}$

$\leftarrow$ $قا^2(ص) \times 1 = \frac{3د - ب جـ}{(جـ + د)^2}$ ---- (1) | $س = 0$، $ص = 1$

$*$ عندما $س = 0$ $\leftarrow$ $ظا(ص) = \frac{ب}{د}$ "نرسم مثلث قائم فيه زاوية حادة هـ و $ظاص = \frac{ب}{د}$"

$\leftarrow$

باستخدام فيثاغورس:



$(ب)^2+(د)^2=(\text{الوتر})^2 \Leftarrow \sqrt{ب^2+د^2}=\text{الوتر}$

$\text{قاص}=\frac{1}{\text{قباص}}=\frac{1}{\frac{د}{\sqrt{ب^2+د^2}}}=\frac{\sqrt{ب^2+د^2}}{د}$

نعوض في (1):

$\left(\frac{\sqrt{ب^2+د^2}}{د}\right)^2=\frac{د\text{أ}-ب\text{جـ}}{(د)^2} \Leftarrow \frac{ب^2+د^2}{\cancel{د^2}}=\frac{\text{أ}د-ب\text{جـ}}{\cancel{د^2}} \Leftarrow ب^2+د^2=\text{أ}د-ب\text{جـ}$

• 2025 الخليل/ إذا كان $\text{س}\,\text{قتا}^2\text{ص}=(\text{جتا}^2\text{ص}+\text{جتاص}+1)(\text{جتا}^2\text{ص}-\text{جتاص}+1)$ أثبت أن $\text{ص}'=\frac{\text{قا}^4\text{ص}}{3\,\text{جا}(2\text{ص})}$

الحل/ $\text{س}\,\text{قتا}^2\text{ص}=(\text{جتا}^2\text{ص}+\text{جتاص}+1)(\text{جتا}^2\text{ص}-\text{جتاص}+1)$

$\frac{\text{س}}{\text{جا}^2\text{ص}}=(\text{جتا}^2\text{ص}+\text{جتاص}+1)(\text{جتا}^2\text{ص}-\text{جتاص}+1)$

$\Leftarrow \text{س}=\text{جا}^2\text{ص}\,(\text{جتا}^2\text{ص}+\text{جتاص}+1)(\text{جتا}^2\text{ص}-\text{جتاص}+1)$

$\text{س}=(1-\text{جتا}^2\text{ص})(\text{جتا}^2\text{ص}+\text{جتاص}+1)(\text{جتا}^2\text{ص}-\text{جتاص}+1)$ فرق مربعين

$\Leftarrow \text{س}=(1-\text{جتاص})(1+\text{جتاص})(\text{جتا}^2\text{ص}+\text{جتاص}+1)(\text{جتا}^2\text{ص}-\text{جتاص}+1)$

$\Leftarrow \text{س}=(\text{جتاص}+1)(\text{جتا}^2\text{ص}-\text{جتاص}+1)(1-\text{جتاص})(1+\text{جتاص}+\text{جتا}^2\text{ص})$ فرق مكعبين

$\text{س}=(\text{جتا}^3\text{ص}+1)(1-\text{جتا}^3\text{ص})$ فرق مربعين

$\Leftarrow \text{س}=1-(\text{جتا}^3\text{ص})^2=1-\text{جتا}^6\text{ص}$ نشتق لـ س

$1=-6\,\text{جتا}^5\text{ص}\times-\text{جاص}\times\text{ص}'$

$1=6\times\text{جتا}^5\text{ص}\,\text{جاص}\,\text{ص}' \Leftarrow 1=3\times\text{جتا}^4\text{ص}\times2\,\text{جتاص}\,\text{جاص}\,\text{ص}'$

$\Leftarrow 1=3\,\text{جتا}^4\text{ص}\,\text{جا}(2\text{ص})\,\text{ص}' \Leftarrow \frac{1}{3\,\text{جتا}^4\text{ص}}=\text{جا}(2\text{ص})\,\text{ص}' \Leftarrow \frac{1}{3}\text{قا}^4\text{ص}=\text{جا}(2\text{ص})\,\text{ص}'$

$\Leftarrow \frac{\text{قا}^4(\text{ص})}{3\,\text{جا}(2\text{ص})}=\text{ص}'$ #

• 2025 الخليل/ يتحرك جسم حسب العلاقة $\text{ف}^2=2\text{ن}\,\text{ف}-\text{ن}^2+\text{ن}^4$ حيث (ف) الإزاحة بالأمتار أثبت أن الجسم يسير بتسارع ثابت.

الحل/ $\text{ف}^2=2\text{ن}\,\text{ف}-\text{ن}^2+\text{ن}^4 \Leftarrow \text{ف}^2-2\text{ن}\,\text{ف}+\text{ن}^2=\text{ن}^4$

$\Leftarrow (\text{ف}-\text{ن})^2=\text{ن}^4$ بأخذ الجذر التربيعي

$\Leftarrow \text{ف}-\text{ن}=\text{ن}^2$

$\Leftarrow \text{ف}=\text{ن}^2+\text{ن}$ نشتق

$\text{ع}=2\text{ن}+1$ نشتق

$\text{ت}=2\,\text{م}/\text{ث}^2 \Leftarrow$ الجسم يسير بتسارع ثابت مقداره (2). #

أ.مي حواري

• 2025 جنوب الخليل/ إذا كان $\text{س}^4+2\text{ص}^2\text{س}^2+\text{ص}^4=\text{هـ}^{-2\text{س}^2-2\text{ص}^2}$ أثبت أن $\text{ص}'=\frac{-\text{س}}{\text{ص}}$ ، $\text{س}\neq\text{ص}\neq$:

الحل/ $\text{س}^4+2\text{ص}^2\text{س}^2+\text{ص}^4=\text{هـ}^{-2\text{س}^2-2\text{ص}^2}$

$(\text{س}^2+\text{ص}^2)^2=\text{هـ}^{-2(\text{س}^2+\text{ص}^2)}$ بأخذ الجذر للطرفين.

$س^2 + ص^2 = هـ^{-(س^2+ص^2)}$ نشتق لـ س .

$2س + 2ص ص' = هـ^{-(س^2+ص^2)} \times -(2س + 2ص ص')$

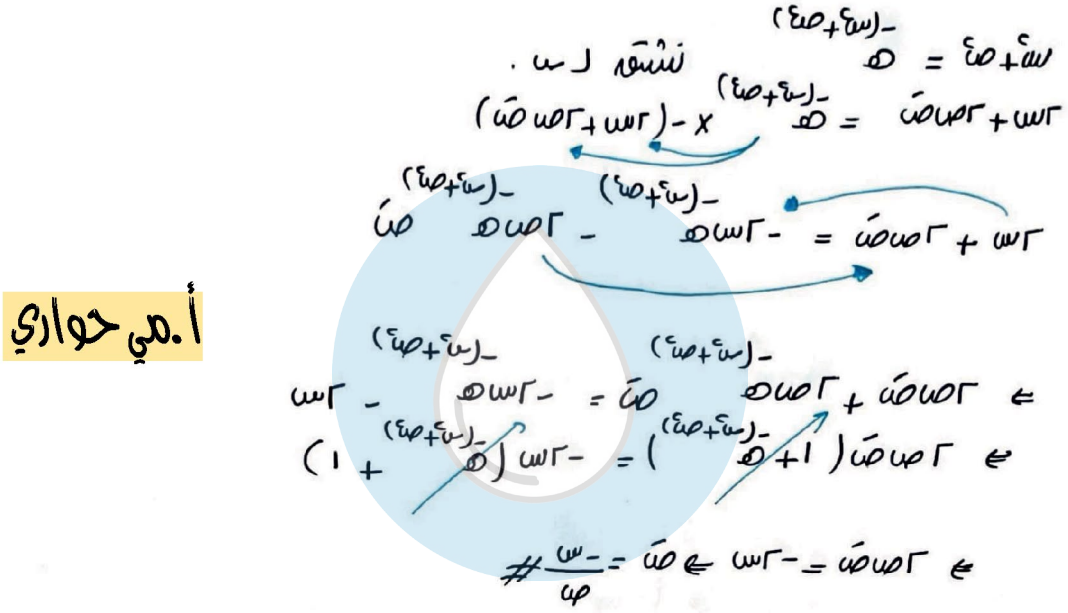
$2س + 2ص ص' = -2س هـ^{-(س^2+ص^2)} - 2ص هـ^{-(س^2+ص^2)} ص'$

أ.مي حواري

$\Leftarrow 2ص ص' + 2ص هـ^{-(س^2+ص^2)} ص' = -2س هـ^{-(س^2+ص^2)} - 2س$

$\Leftarrow 2ص ص' (1 + هـ^{-(س^2+ص^2)}) = -2س (هـ^{-(س^2+ص^2)} + 1)$

$\Leftarrow 2ص ص' = -2س \Leftarrow ص' = \frac{-س}{ص}$ #



• خارجي/ جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة $س ص^2 + \pi^2 جتا ص = 0$ عند $(1، \pi)$

الحل/ $س ص^2 + \pi^2 جتا ص = 0$ ، $(1، \pi) \in$ للمنحنى ✓

$س \times 2ص ص' + ص^2 + \pi^2 \times -جا ص ص' = 0 \Big|_{(1، \pi)}$

$\Leftarrow 2\pi ص' + \pi^2 - \pi^2 جا \pi ص' = 0 \Leftarrow 2\pi ص' = -\pi^2 \Leftarrow ص' = \frac{-\pi}{2}$ = ميل المماس

معادلة المماس/ $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص - \pi = \frac{-\pi}{2}(س - 1) \Leftarrow ص - \pi = \frac{-\pi}{2} س + \frac{\pi}{2} \Leftarrow ص = \frac{-\pi}{2} س + \frac{3}{2}\pi$

$+\pi \quad +\pi$

• إذا كان $ق^3(ص^2) = 5س^3 + 3$ وكانت $ص = 1$ عندما $(س = 1)$ وأيضاً $ق'(1) = 5$ جد قيمة $\frac{دص}{دس}\Big|_{(1،1)}$

الحل/ $ق^3(ص^2) = 5س^3 + 3 \Big|_{(1،1)} \Leftarrow ق^3(1) = 5 + 3 \Leftarrow ق^3(1) = 8 \Leftarrow ق(1) = 2$

$ق^3(ص^2) = 5س^3 + 3$ نشتق لـ س

$3ق^2(ص^2) ق'(ص^2) \times 2ص ص' = 15س^2 \Big|_{(1،1)} \Leftarrow \cancel{3} ق^2(1) ق'(1) \times 2ص' = \cancel{15}^{5}$

$\Leftarrow 2^2 \times 5 \times 2ص' = 5 \Leftarrow ص' = \frac{5}{8 \times 5} = \frac{1}{8}$

• خارجي/ إذا كان $س^2 + ص^2 + 2ص = س + 5$ ، $ع = \frac{1}{2}ص^2 + ص - 2$ أثبت أن $\frac{دع}{دس} = \frac{1}{2}(1 - 2س)$

الحل/ $س^2 + ص^2 + 2ص = س + 5$ ، $ع = \frac{1}{2}ص^2 + ص - 2$

$2س + 2ص ص' + 2ص' = 1$ ، $\frac{دع}{دص} = ص + 1$

$2ص'(ص + 1) = 1 - 2س$

$ص' = \frac{1 - 2س}{2(ص + 1)} = \frac{دص}{دس}$

$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص} \times \frac{دص}{دس} = \cancel{(ص + 1)} \frac{(1 - 2س)}{2\cancel{(ص + 1)}} = \frac{1}{2}(1 - 2س)$ #

• خارجي/ اذا كان $ص = (1-ص^2)^6$ أثبت أن : $2ص ص = (ص^2-1)$ ظتا$(3س)$

الحل طريقة (1) :

بأخذ اللغاريتم للطرفين $\Leftarrow$ لو ص $=$ لو $(1-ص^2)^6$

$\Leftarrow$ لو ص $=$ 6 لو $(1-ص^2)$ نشتقّ لـ س

$\Leftarrow \frac{ص ص}{ص} = 6 \times \frac{-2ص ص}{1-ص^2} \Leftarrow \frac{ص ص}{ص} = \frac{-12 ص ص}{1-ص^2}$

$\Leftarrow \frac{ص ص}{ص} = \frac{12 ص ص}{ص^2-1}$

$\Leftarrow$ ظتا$(3س)$ $= \frac{2ص ص}{ص^2-1} \Leftarrow$ ظتا$(3س)(ص^2-1) = 2ص ص$ #

• طريقة (2) : $ص = (1-ص^2)^6$ نشتقّ لـ س

$ص = 6(1-ص^2)^5 \times -2ص ص$

$\Leftarrow ص = \frac{-12 ص ص}{(1-ص^2)^5}$

$\Leftarrow \frac{(1-ص^2)}{(1-ص^2)} ص = \frac{-12 ص ص}{(1-ص^2)^5}$

$\Leftarrow \frac{(1-ص^2) ص}{-12 ص ص} = \frac{(1-ص^2)^5}{(1-ص^2)}$

$\Leftarrow \frac{(1-ص^2) ص}{-12 ص ص} = (1-ص^2)^4$ نعوض $(1-ص^2)^4 = ص^2$

$\Leftarrow \frac{(1-ص^2) ص}{-12 ص ص} = ص^2$

$\Leftarrow \frac{(ص^2-1) ص}{12 ص ص} = ص^2$

$\Leftarrow (ص^2-1)$ ظتا$(3س) = 2ص ص$ #

أ.مي حواري

• خارجي/ اذا كان $ص - س ص = هـ^{ص}$ ، بيّن أن $\frac{ص}{ص} = \frac{2-س}{1-س}$

الحل $ص - س ص = هـ^{ص}$

$ص(1-س) = هـ^{ص}$

لو$(ص(1-س)) =$ لو $هـ^{ص}$

لو ص + لو $(1-س) = ص$ نشتقّ لـ س.

$\frac{ص}{ص} + \frac{-1}{1-س} = 1 \Leftarrow \frac{ص}{ص} = 1 + \frac{1}{1-س} \Leftarrow \frac{ص}{ص} = \frac{1-س+1}{1-س}$

$\Leftarrow \frac{ص}{ص} = \frac{2-س}{1-س}$ #

نأخذ اللغاريتم للطرفين عندما نرى $\frac{ص}{ص}$

• خارجي/ إذا كان $\sqrt{\frac{س}{ص}} + \sqrt{\frac{ص}{س}} = 18$ فأثبت أن $\frac{ص}{س} + \frac{س}{ص} = 1$

الحل بتربيع الطرفين

$\left(\sqrt{\frac{س}{ص}} + \sqrt{\frac{ص}{س}} = 18\right)^2$

$\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} + 2 \sqrt{\frac{س}{ص}} \times \sqrt{\frac{ص}{س}} = 18$

$\frac{٢ص}{س} + \frac{٢س}{ص} + ٢\sqrt{\frac{٢س}{ص} \times \frac{٢ص}{س}} = ٨ \Leftarrow \frac{٢ص}{س} + \frac{٢س}{ص} + ٢\sqrt{٤} = ٨$

$\Leftarrow \left(\frac{٢ص}{س} + \frac{٢س}{ص} = ٤\right) \times \frac{ص س}{٢} \Leftarrow ص^٢ + س^٢ = ٢س ص \Leftarrow ص^٢ - ٢س ص + س^٢ = ٠$

$\Leftarrow (ص - س)^٢ = ٠ \Leftarrow ص - س = ٠ \Leftarrow ص = س$ نشتق

$ص' = ١$ #

• خارجي/ إذا كان $س\sqrt{١+ص} = ص\sqrt{١+س}$ أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{(س+١)^٢}$ ، $س \neq ص$

الحل/ نربع الطرفين/ $(س\sqrt{١+ص} = ص\sqrt{١+س})^٢$

$س^٢(١+ص) = ص^٢(١+س)$

$س^٢ + س^٢ص = ص^٢ + ص^٢س$

$\Leftarrow س^٢ - ص^٢ = ص^٢س - س^٢ص \Leftarrow (س - ص)(س + ص) = ص(س)(ص - س)$ ، -١

$\Leftarrow س + ص = -ص س \Leftarrow س = -ص س - ص \Leftarrow س = -ص(س+١)$

$\Leftarrow ص = \frac{-س}{س+١}$ نشتق

$ص' = \frac{(س+١)(-١) - -س}{(س+١)^٢} = \frac{-س - ١ + س}{(س+١)^٢} = \frac{-١}{(س+١)^٢}$ #

• خارجي/ إذا كان $\sqrt[٣]{ص} = س + \sqrt{س^٢+١}$ أثبت أن $(س^٢+١)(ص')^٢ = ٩ص^٢$

الحل/ بأخذ اللوغاريتم للطرفين/ $لو_هـ(ص)^{\frac{١}{٣}} = لو_هـ(س + \sqrt{س^٢+١})$

$\Leftarrow \frac{١}{٣} لو_هـ ص = لو_هـ(س + \sqrt{س^٢+١})$ نشتق لـ س.

توحيد مقامات

$\frac{١}{٣} \times \frac{ص'}{ص} = \left(١ + \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢+١}}\right) \times \left(\frac{١}{س + \sqrt{س^٢+١}}\right)$

$\frac{١}{٣} \times \frac{ص'}{ص} = \frac{(\sqrt{س^٢+١} + س)}{\sqrt{س^٢+١}} \times \frac{١}{(س + \sqrt{س^٢+١})}$

$\Leftarrow \left(\frac{ص'}{٣ص} = \frac{١}{\sqrt{س^٢+١}}\right)^٢ \Leftarrow \frac{(ص')^٢}{٩ص^٢} = \frac{١}{س^٢+١} \Leftarrow (س^٢+١)(ص')^٢ = ٩ص^٢$ #

أ.مي حواري

• خارجي/ إذا كان $\sqrt{\frac{ص}{س}} + \sqrt{\frac{س}{ص}} = ٢$ أثبت أن $\frac{دص}{دس} = ١$ ، $س > ٠$ ، $ص > ٠$

الحل/ نربع الطرفين

$\left(\sqrt{\frac{ص}{س}} + \sqrt{\frac{س}{ص}} = ٢\right)^٢ \Leftarrow \frac{ص}{س} + \frac{س}{ص} + ٢\sqrt{\frac{ص}{س}}\sqrt{\frac{س}{ص}} = ٤$

$\Leftarrow \frac{ص}{س} + \frac{س}{ص} + ٢\sqrt{\frac{ص}{س} \times \frac{س}{ص}} = ٤ \Leftarrow \frac{ص}{س} + \frac{س}{ص} + ٢ = ٤$

$\Leftarrow \left(\frac{ص}{س} + \frac{س}{ص} = ٢\right) \times س ص \Leftarrow ص^٢ + س^٢ = ٢س ص \Leftarrow ص^٢ - ٢س ص + ص^٢ = ٠$

$\Leftarrow (\text{ص}-\text{س})^2 = 0 \Leftarrow \text{ص}-\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = \text{س}$ نشتق

$\text{ص}' = 1$ #

• خارجي/ إذا كان $\text{س}^2+\text{ص}^2 = \text{ن}+\frac{1}{\text{ن}}$ ، $\text{س}^4+\text{ص}^4 = \text{ن}^2+\frac{1}{\text{ن}^2}$ ، $\text{س ص} > 0$: أثبت أن $\text{س}^3\text{ص}'' = 2$

الحل/ $\left(\text{س}^2+\text{ص}^2 = \text{ن}+\frac{1}{\text{ن}}\right)^2$

$(\text{س}^2)^2 + 2\text{س}^2\text{ص}^2 + (\text{ص}^2)^2 = \text{ن}^2 + 2\text{ن}\times\frac{1}{\text{ن}} + \left(\frac{1}{\text{ن}}\right)^2$

$\Leftarrow \text{س}^4+\text{ص}^4 + 2\text{س}^2\text{ص}^2 = \text{ن}^2+2+\frac{1}{\text{ن}^2}$

$\Leftarrow \cancel{\text{ن}^2+\frac{1}{\text{ن}^2}} + 2\text{س}^2\text{ص}^2 = \cancel{\text{ن}^2+\frac{1}{\text{ن}^2}} + 2 \Leftarrow 2\text{س}^2\text{ص}^2 = 2$

$\Leftarrow \text{س}^2\text{ص}^2 = 1 \Leftarrow (\text{س ص})^2 = 1$ نأخذ الجذر للطرفين

$\text{س ص} = 1$ أو $\text{س ص} = -1$ × س ، $\text{ص} > 0$:

$\text{ص} = \frac{1}{\text{س}}$

$\text{ص}' = \frac{-1}{\text{س}^2} \Leftarrow \text{ص}'' = \frac{2}{\text{س}^3} \Leftarrow 2 = \text{ص}''\text{س}^3$ #

أ.مي حواري

• خارجي/ إذا كان $\text{ص} = \sqrt{\frac{1+\text{جا}(2\text{س})}{1-\text{جا}(2\text{س})}}$ ، $\text{س} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ أثبت أن $\text{ص}' = \frac{-2}{1-\text{جا}(2\text{س})}$

الحل/ $\frac{1+\text{جا}(2\text{س})}{1-\text{جا}(2\text{س})} = \frac{\text{جا}^2\text{س}+\text{جتا}^2\text{س}+2\text{جاس جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}+\text{جتا}^2\text{س}-2\text{جاس جتاس}} = \frac{(\text{جاس}+\text{جتاس})^2}{(\text{جاس}-\text{جتاس})^2} = \left(\frac{\text{جاس}+\text{جتاس}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}\right)^2$

$\Leftarrow \text{ص} = \sqrt{\left(\frac{\text{جاس}+\text{جتاس}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}\right)^2} = \left|\frac{\text{جاس}+\text{جتاس}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}\right|$

$\Leftarrow \text{ص} = \frac{\text{جاس}+\text{جتاس}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}$ ، $\text{س} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. نشتق

$\text{ص}' = \frac{(\text{جاس}-\text{جتاس})(\text{جتاس}-\text{جاس}) - (\text{جاس}+\text{جتاس})(\text{جتاس}+\text{جاس})}{(\text{جاس}-\text{جتاس})^2}$

اخراج (-) عامل مشترك

$\text{ص}' = \frac{-(\text{جتاس}-\text{جاس})(\text{جتاس}-\text{جاس}) - (\text{جاس}+\text{جتاس})^2}{1-\text{جا}(2\text{س})} = \frac{-(\text{جتاس}-\text{جاس})^2 - (\text{جاس}+\text{جتاس})^2}{1-\text{جا}(2\text{س})}$

$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{-(\text{جتا}^2\text{س}+\text{جا}^2\text{س}-2\text{جاس جتاس}) - (\text{جا}^2\text{س}+\text{جتا}^2\text{س}+2\text{جاس جتاس})}{1-\text{جا}(2\text{س})}$

$\text{ص}' = \frac{-1+\cancel{\text{جا}(2\text{س})}-1-\cancel{\text{جا}(2\text{س})}}{1-\cancel{\text{جا}(2\text{س})}} = \frac{-2}{1-\text{جا}(2\text{س})}$ #

• خارجي/ إذا كان $\text{ص} = \text{ظا}^4\text{س}$ أثبت أن $\frac{1}{4}\text{ص}'' = (\sqrt{\text{ص}}+1)(5\text{ص}+3\sqrt{\text{ص}})$.

الحل/ $(\text{ص}'' = 4\,\text{ظا}^3\text{س}\,\text{قا}^2\text{س}) \div 4$

$\frac{1}{4}$ ص' = ظا^{3}س (ظا^{2}س + 1) ⇐ $\frac{1}{4}$ ص' = ظا^{5}س + ظا^{3}س نشتق ثانية.

⇐ $\frac{1}{4}$ ص'' = 5 ظا^{4}س قا^{2}س + 3 ظا^{2}س قا^{2}س اخراج قا^{2}س عامل مشترك.

$\frac{1}{4}$ ص'' = قا^{2}س (5 ظا^{4}س + 3 ظا^{2}س)

$\frac{1}{4}$ ص'' = (ظا^{2}س + 1) (5 ظا^{4}س + 3 ظا^{2}س) / ص = ظا^{4}س ⇐ $\sqrt{ص}$ = ظا^{2}س.

$\frac{1}{4}$ ص'' = ($\sqrt{ص}$ + 1) (5 ص + 3$\sqrt{ص}$) #

• خارجي/ إذا كان ص = (جاس + جتاس)^{2ن} أثبت أن ص' = $\frac{2ن ص جتا(2س)}{1 + جا(2س)}$

الحل/ بأخذ اللوغاريتم للطرفين/

لو$_هـ$ ص = لو$_هـ$ (جاس + جتاس)^{2ن} ⇐ لو$_هـ$ ص = 2ن لو$_هـ$ (جاس + جتاس) نشتق لـ س.

⇐ $\frac{ص'}{ص}$ = 2ن × $\frac{(جتاس - جاس)}{(جاس + جتاس)}$ ⇐ ص' = 2ن ص $\frac{(جتاس - جاس)}{(جاس + جتاس)}$ × $\frac{(جتاس + جاس)}{(جتاس + جاس)}$

⇐ ص' = 2ن ص $\frac{(جتا^2س - جا^2س)}{(جاس + جتاس)^2}$ ⇐ ص' = $\frac{2ن ص جتا(2س)}{1 + جا(2س)}$ #

• ملاحظة/ (جاس + جتاس)^2 = جا^{2}س + جتا^{2}س + 2 جاس جتاس

= 1 + جا(2س).

• خارجي/ اذا كان جاص + جتا(2س) = جتا($\frac{2\pi}{3}$) أثبت أن ص'' − (ص')^2 ظاص = 4 جتا(2س) قاص

الحل/ جاص + جتا(2س) = جتا($\frac{2\pi}{3}$) نشتق لـ س.

جتاص × ص' − 2 جا(2س) = 0 نشتق مرة أخرى لـ س.

جتاص × ص'' + (ص') × −جاص × ص' − 4 جتا(2س) = 0

[ص'' جتاص − (ص')^2 جاص = 4 جتا(2س)] ÷ جتاص

ص'' $\frac{جتاص}{جتاص}$ − (ص')^2 $\frac{جاص}{جتاص}$ = 4 جتا(2س) × $\frac{1}{جتاص}$

⇐ ص'' − (ص')^2 ظاص = 4 جتا(2س) قاص #

أ.مي حواري

أَوَّلُ الفَشَلِ؟

تَرْكُ الصَّلَاةِ

أسئلة للمهتمين | الوحدة الأولى

١/ اذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} + \frac{\text{ب}}{\text{س}} & ، ١ \le \text{س} < ٥ \\ \text{س} + ١ & ، \text{س} \ge ٥ \end{cases}$ ، وكان متوسط تغير $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س}^{٢}) + ٢\text{س} - \sqrt[٥]{٣٢\text{ب}^{٣}}$

في $[١ ، ٣]$ يساوي (٦) ما قيمة الثابت ب :

أ/ ٣٠ ب/ ٩ ج/ ١ د/ -١

الحل/ $\frac{\Delta \text{ق}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١} = ٦ \Leftarrow \text{ق}(٣) - \text{ق}(١) = ١٢$

$\Leftarrow \left(\text{هـ}(٩) + ٦ - \sqrt[٥]{٣٢\text{ب}^{٣}}\right) - \left(\text{هـ}(١) + ٢ - \sqrt[٥]{٣٢\text{ب}^{٣}}\right) = ١٢$

$(٩+١) + ٦ - \sqrt[٥]{٣٢\text{ب}^{٣}} - \left(٢ + \frac{\text{ب}}{١}\right) - ٢ + \sqrt[٥]{٣٢\text{ب}^{٣}} = ١٢$

$١٠ + ٦ - ١ - \text{ب} - ٢ = ١٢ \Leftarrow ١٣ - \text{ب} = ١٢ \Leftarrow ١٣ - ١٢ = \text{ب} \Leftarrow ١ = \text{ب}$

٢/ ما قيمة $\left(\frac{\text{قَ}(٢)\,\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}\right)'(٢)$ علماً بأن $\text{ق}(٢) = ٤$ ، $\text{قَ}(٢) = ٢$ ، $\text{هـ}(٢) = ٣$ ، $\text{هـَ}(٢) = ٢$

$\text{قً}(٢) = ٥$

أ/ $\frac{٩}{٤}$ ب/ $-\frac{٩}{٤}$ ج/ $\frac{٤}{٩}$ د/ $-\frac{٤}{٩}$

الحل/ $\left(\frac{\text{قَ}(٢)\,\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}\right)' = \left.\frac{\text{هـ}(\text{س}) \times \text{قَ}(٢)\,\text{قَ}(\text{س}) - \text{قَ}(٢)\,\text{ق}(\text{س})\,\text{هـَ}(\text{س})}{\text{هـ}^{٢}(\text{س})}\right|_{\text{س}=٢}$ ثابت

$= \frac{\text{هـ}(٢)\,\text{قَ}(٢)\,\text{قَ}(٢) - \text{قَ}(٢)\,\text{ق}(٢)\,\text{هـَ}(٢)}{\text{هـ}^{٢}(٢)} = \frac{(٣)(٢)^{٢} - ٢ \times ٤ \times ٢}{(٣)^{٢}} = \frac{١٢ - ١٦}{٩} = -\frac{٤}{٩}$

٣/ إذا كان $\text{ص} = \text{س}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٣}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} =$

أ/ $\text{صَ} = -\text{لو}_{\text{هـ}}٣\ \text{س}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٣}{\text{هـ}}\right)}$ ب/ $\text{صَ} = -\text{لو}٣ \times \text{س}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٣}{\text{هـ}}\right)}$ ج/ $\text{صَ} = \text{لو}٣ \times \text{س}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٣}{\text{هـ}}\right)}$

د/ $\text{صَ} = \text{لو}_{\text{هـ}}٣\ (\text{س})^{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٣}{\text{هـ}}\right)}$

الحل/ $\text{ص} = \text{س}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٣} \Leftarrow \text{صَ} = \text{لو}_{\text{هـ}}٣ \times (\text{س})^{(\text{لو}_{\text{هـ}}٣) - ١} = (\text{لو}_{\text{هـ}}٣) \times (\text{س})^{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٣}{\text{هـ}}\right)}$

ملاحظة :

$\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - ١ = \text{لو}_{\text{هـ}}٣ - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٣}{\text{هـ}}\right)$

أ.مي حواري

٤/ تحرك جسم حسب العلاقة $\text{ع}^{٣} + \frac{١٢}{\text{ف}} = ٣٩$ فإن التسارع عندما ع = ٣ يساوي :

أ/ $-\frac{٤}{٣}$ ب/ $\frac{٤}{٣}$ ج/ ١٢ د/ ٢٦

الحل/ $\left.\text{ع}^{٣} + \frac{١٢}{\text{ف}} = ٣٩\right|_{\text{ع}=٣} \Leftarrow ٢٧ + \frac{١٢}{\text{ف}} = ٣٩ \Leftarrow \frac{١٢}{\text{ف}} = ١٢ \Leftarrow \text{ف} = ١\text{م}$

$ع^3 + \frac{12}{ف} = 39$ نشتق بالنسبة لـ ن ⇐ $3ع^2ن - \frac{12ع}{ف^2} = 0$ ⇐ $3ع^2ن = \frac{12ع}{ف^2}$

⇐ $ع ن = \frac{4}{ف^2}$ | ف = 1 ، ع = 3 ⇐ $3ن = 4$ ⇐ $ن = \frac{4}{3}$

٥/ تحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن)\,ع(ن) = ن$ ، $ع(2) = 4$ فإن التسارع عندما (ن = 2) يساوي:

أ/ -12 م/ث² ب/ 30 م/ث² ج/ $-\frac{9}{2}$ م/ث² د/ -30 م/ث²

الحل/ $ف(ن)\,ع(ن) = ن$ | ن = 2 ⇐ $ف(2)\,ع(2) = 2$ ⇐ $ف(2) \times 4 = 2$ ⇐ $ف(2) = \frac{1}{2}$

نشتق

$ف ع' + ع ف' = 1$ ⇐ $ف ن + ع \times ع = 1$ | ع = 4 ، ف = $\frac{1}{2}$ ⇐ $\frac{ن}{2} + 16 = 1$ ⇐ $\frac{ن}{2} = -15$ ⇐ $ن = -30$ م/ث²

٦/ إذا كان متوسط تغير هـ(س) على [-1، 2] = 4 جد متوسط تغير ق(س) على [-3، 3] علماً بأن

$ق(2س+1) = هـ(س^2-2) + 5س - 1$

الحل/ $\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(س_2) - هـ(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{هـ(2) - هـ(-1)}{2 - -1} = 4$ ⇐ $هـ(2) - هـ(-1) = 12$

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(3) - ق(-3)}{3 - -3} = \frac{(هـ(-1)+4) - (هـ(2)-11)}{6}$

$= \frac{هـ(-1) + 4 - هـ(2) + 11}{6} = \frac{(هـ(-1) - هـ(2)) + 15}{6}$

$= \frac{-(هـ(2) - هـ(-1)) + 15}{6} = \frac{-12 + 15}{6} = \frac{3}{6}$

$= \frac{1}{2}$

• عندما $2س + 1 = 3$ ⇐ $2س = 2$

$س = 1$

⇐ $ق(3) = هـ(1-2) + 5 - 1$

$ق(3) = هـ(-1) + 4$

• عندما $2س + 1 = -3$ ⇐ $2س = -4$

$س = -2$

⇐ $ق(2 \times -2 + 1) = هـ(4-2) + 5 \times -2 - 1$

$ق(-3) = هـ(2) - 11$

٧/ إذا كان متوسط تغير ق(س) على [1، 3] = 4 وكان $هـ(س) = \sqrt[3]{ق(س)}$ وكان

$(\sqrt[3]{ق(3)})^2 + \sqrt[3]{ق(3)}\sqrt[3]{ق(1)} + (\sqrt[3]{ق(1)})^2 = -1$ جد متوسط تغير هـ(س) على [1، 3]

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{ق(3) - ق(1)}{3 - 1} = 4$ ⇐ $ق(3) - ق(1) = 8$

⇐ $ق(3) - ق(1) = 8$ نحللها كفرق مكعبين

$(\sqrt[3]{ق(3)} - \sqrt[3]{ق(1)})\,((\sqrt[3]{ق(3)})^2 + \sqrt[3]{ق(3)}\sqrt[3]{ق(1)} + (\sqrt[3]{ق(1)})^2 = 8$

⇐ $(\sqrt[3]{ق(3)} - \sqrt[3]{ق(1)}) \times -1 = 8$ ⇐ $(\sqrt[3]{ق(3)} - \sqrt[3]{ق(1)} = -8)$

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(3) - هـ(1)}{2} = \frac{\sqrt[3]{ق(3)} - \sqrt[3]{ق(1)}}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

أ.مي حواري

٨/ إذا كان $ص^س = س^{ص}$ أثبت أن $ص = \frac{ص^2(1 - لو_هـ س)}{س^2(1 - لو_هـ ص)}$

الحل/ نأخذ اللوغاريتم للطرفين.

$\Leftarrow$ لو$_{هـ}$ص^{س} = لو$_{هـ}$س^{ص} $\Leftarrow$ س لو$_{هـ}$ص = ص لو$_{هـ}$س نشتق بالنسبة لـ س.

س × ص$'$/ص + لو$_{هـ}$ص = ص/س + ص$'$ لو$_{هـ}$س $\Leftarrow$ س/ص ص$'$ − لو$_{هـ}$س ص$'$ = ص/س − لو$_{هـ}$ص

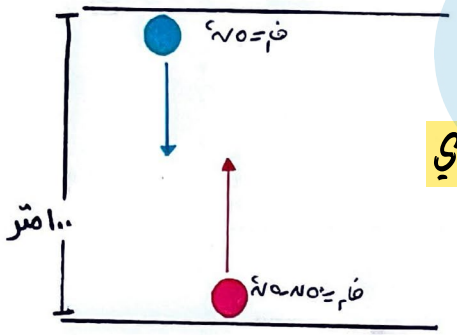
$\Leftarrow$ ص$'$ (س/ص − لو$_{هـ}$س) = (ص/س − لو$_{هـ}$ص)

ص$'$ (س − ص لو$_{هـ}$س / ص) = (ص − س لو$_{هـ}$ص / س) $\Leftarrow$ ص$'$ (س − س لو$_{هـ}$ص / ص) = (ص − ص لو$_{هـ}$س / س)

$\Leftarrow$ (ص$'$ × س (١ − لو$_{هـ}$ص) / ص = ص (١ − لو$_{هـ}$س) / س) × ص / س (١ − لو$_{هـ}$ص)

$\Leftarrow$ ص$'$ = ص^{٢} (١ − لو$_{هـ}$س) / س^{٢} (١ − لو$_{هـ}$ص) #

٩/ سقط جسم من ارتفاع (١٠٠ متر) عن سطح الأرض، حيث أن المسافة المقطوعة بالأمتار بعد (ن) ثانية هي: ف$_{١}$(ن) = ٥ن^{٢} وفي الوقت نفسه أطلق جسم من سطح الأرض للأعلى حيث أن المسافة التي يقطعها هي ف$_{٢}$(ن) = ٥٠ن − ٥ن^{٢}، جد سرعة كل من الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الأرض.



أ.مي حواري

الحل/ نفرض الزمن = (ن) ث.

يكون الحساب على نفس الارتفاع عندما

ف$_{١}$(ن) + ف$_{٢}$(ن) = ١٠٠

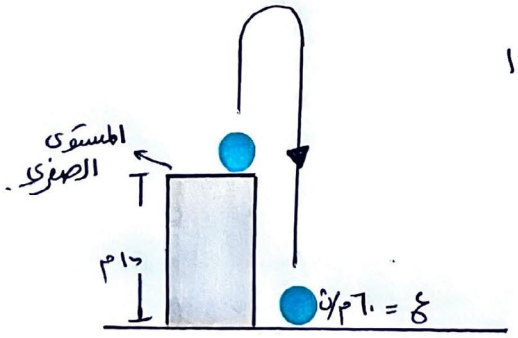
~~٥ن^{٢}~~ + ٥٠ن − ~~٥ن^{٢}~~ = ١٠٠

٥٠ن = ١٠٠ $\Leftarrow$ ن = ٢ ث

ع$_{١}$ = ع ف$_{١}$/ع ن = ١٠ن $\Leftarrow$ ع$_{١}$(٢) = ٢٠ م/ث

ع$_{٢}$ = ع ف$_{٢}$/ع ن = ٥٠ − ١٠ن $\Leftarrow$ ع$_{٢}$(٢) = ٥٠ − ٢٠ = ٣٠ م/ث

١٠/ من قمة برج ارتفاعه عن الأرض (١٠٠ م) قذف جسم رأسيًا لأعلى حسب العلاقة. ف(ن) = أن − ٥ن^{٢}، أ > ٠، فكانت سرعته لحظة وصوله الأرض (٦٠ م/ث) ما قيمة الثابت أ.



الحل/ عندما يصل الجسم سطح الأرض $\Leftarrow$ ف(ن) = −١٠٠

و ع(ن) = −٦٠ ← الجسم هابط

ع = ع ف/ع ن = أ − ١٠ن $\Leftarrow$ ع = أ − ١٠ن = −٦٠

$\Leftarrow$ أ = ١٠ن ∓ ٦٠

ف(ن) = −١٠٠ $\Leftarrow$ أن − ٥ن^{٢} = −١٠٠ نعوض (أ)

(١٠ن ∓ ٦٠) ن − ٥ن^{٢} = −١٠٠

١٠ن^{٢} ∓ ٦٠ن − ٥ن^{٢} = −١٠٠

$\Leftarrow$ (٥ن^{٢} ∓ ٦٠ن + ١٠٠ = ٠) / ٥ $\Leftarrow$ ن^{٢} ∓ ١٢ن + ٢٠ = ٠ $\Leftarrow$ (ن − ١٠)(ن − ٢) = ٠

إما ن − ٢ = ٠ $\Leftarrow$ ن = ٢ مرفوض الجسم صاعد

أو ن − ١٠ = ٠ $\Leftarrow$ ن = ١٠ $\Leftarrow$ أ = ١٠ × ١٠ − ٦٠ $\Leftarrow$ أ = ٤٠

١١/ تحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة $ع^2(ن) = ٦ - \frac{أ}{ف(ن)}$ ، جد قيمة الثابت أ علماً بأن تسارع الجسيم في اللحظة التي ينعدم فيها سرعته (٩م/ث²)

الحل/ عندما ع = ٠ ، ت = ٩

$ع^2 = ٦ - \frac{أ}{ف} \Leftarrow ٠ = ٦ - \frac{أ}{ف} \Leftarrow ٦ = \frac{أ}{ف} \Leftarrow ٦ف = أ \Leftarrow ف = \frac{أ}{٦}$

$ع^2 = ٦ - \frac{أ}{ف}$ نشتق بالنسبة لن $\Leftarrow ٢ع ت = \frac{أع}{ف^2}$ «لا يجوز اختصار ع لأن ع = ٠»

$٢ع ت - \frac{أع}{ف^2} = ٠ \Leftarrow ع(٢ت - \frac{أ}{ف^2}) = ٠$

إما ع = ٠ ✓ أو $٢ت - \frac{أ}{ف^2} = ٠ \Leftarrow ٢ \times ٩ - \frac{أ}{(\frac{أ}{٦})^2} = ٠$

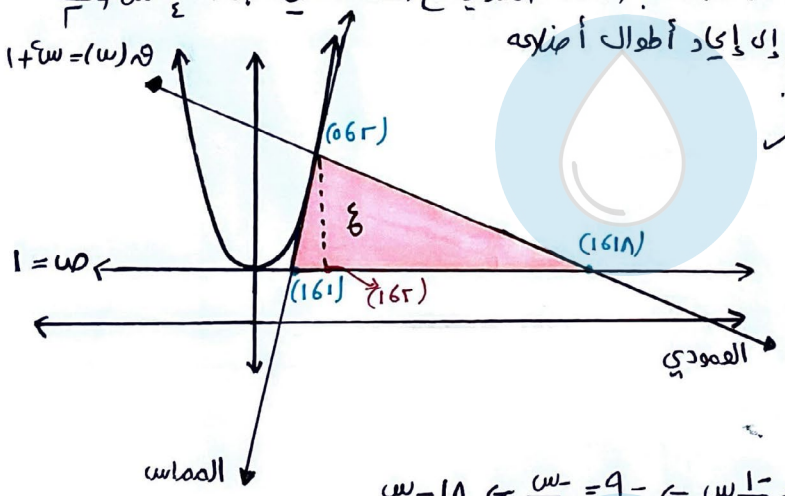
$\Leftarrow ١٨ - \cancel{أ} \times \frac{٣٦}{أ^{\cancel{2}}} = ٠$ ، أ ≠ ٠ $\Leftarrow \cancel{١٨} = \frac{\cancel{٣٦}^{٢}}{أ} \Leftarrow ١ = \frac{٢}{أ} \Leftarrow أ = ٢$

١٢/ جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس لمنحنى $ق(س) = س^2 + ١$ عند (٢، ٥) والمستقيم (ص = ١) علماً بأن معادلة العمودي على المماس هي $ص = -\frac{١}{٤}س + \frac{١١}{٢}$

الحل/ لإيجاد مساحة المثلث نحتاج إلى إيجاد أطوال أضلاعه

⇐ نحتاج احداثيات الرؤوس.

- ← نقطة التماس (٢، ٥) ✓
- ← تقاطع المماس مع ص = ١
- ← تقاطع العمودي مع ص = ١



معادلة العمودي:

$ص = -\frac{١}{٤}س + \frac{١١}{٢} \Big|_{ص=١}$

$١ = -\frac{١}{٤}س + \frac{١١}{٢}$

$١ - \frac{١١}{٢} = -\frac{١}{٤}س \Leftarrow \frac{٢ - ١١}{\cancel{٢}} = \frac{-١}{\cancel{٤}_{٢}}س \Leftarrow -٩ = \frac{-س}{٢} \Leftarrow ١٨ = س$

⇐ (١٨، ١) نقطة تقاطع العمودي مع (ص = ١)

$ص = -\frac{١}{٤}س + \frac{١١}{٢} \Leftarrow ص' = -\frac{١}{٤}$ = ميل العمودي ⇐ ميل المماس = ٤

أ.مي حواري

معادلة المماس/ $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص - ٥ = ٤(س - ٢) \Big|_{ص=١} \Leftarrow ١ - ٥ = ٤(س - ٢) \Leftarrow -٤ = ٤(س - ٢)$

$\Leftarrow -١ = س - ٢ \Leftarrow س = ١ \Leftarrow$ (١، ١) تقاطع المماس مع (ص = ١)

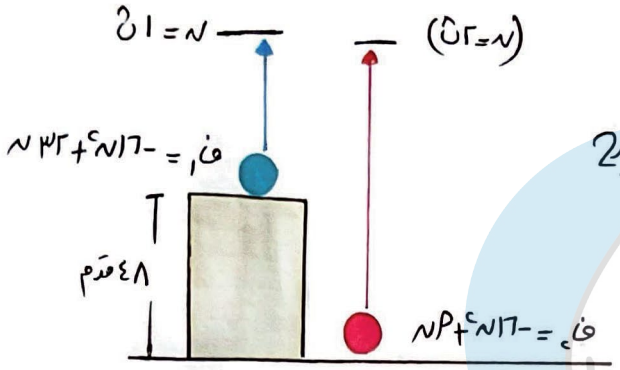
مساحة $\Delta = \frac{١}{٢}ق ع = \frac{١}{٢}(١٨ - ١) \times (٥ - ١) = \frac{١٧}{٢} \times ٤ = ١٧ \times ٢ = ٣٤$ وحدة مساحة.

١٣/ من قمة برج يرتفع (٤٨) قدم قذف جسم رأسياً إلى أعلى حسب العلاقة $ف(ن) = -١٦ن^2 + ٣٢ن$ وفي اللحظة نفسها قذف جسم ثاني من سطح الأرض لأعلى حسب العلاقة $ف(ن) = -١٦ن^2 + أن$ ، أ > ٠

جد: ١/ قيمة الثابت (أ) عندما يكون للجسمين نفس الارتفاع من سطح الأرض أقصى.

٢/ ع(٠) عند تلك اللحظة للجسم الثاني

الحل/ نجد أقصى ارتفاع للجسم الأول عن الأرض:



١/ ع١(ن) = دف/دن = -١٦×٢ن + ٣٢ = ٠

٣٢ن = ٣٢ ⇐ ن = ١ث

ف(١) = -١٦ + ٣٢ = ١٦ قدم أقصى ارتفاع عن البرج

⇐ أقصى ارتفاع عن الأرض = ١٦ + ٤٨ = ٦٤ قدم

ف٢(ن) = -١٦ن² + أن

ع٢(ن) = -٣٢ن + أ = ٠

⇐ ٣٢ن = أ عند أقصى ارتفاع

ف٢(ن) = ٦٤ = -١٦ن² + أن

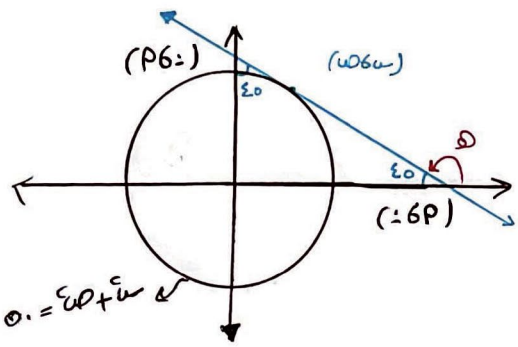
٦٤ = -١٦ن² + ٣٢ن² ⇐ ٦٤ = ١٦ن² ⇐ ٤ = ن² ⇐ ن = ٢ث ،، زمن وصول الثاني لأقصى ارتفاع،،

⇐ أ = ٣٢ن = ٣٢×٢ = ٦٤

٢/ ع٢(ن) = دف٢/دن = -٣٢ن + ٦٤ ⇐ ع٢(٠) = -٣٢×٠ + ٦٤ = ٦٤ قدم/ث

١٤/ إذا كان المماس لمنحنى العلاقة س² + ص² = ٥٠ يصنع مثلث متساوي الساقين مع المحورين في الربع الأول جد:

١/ نقطة التماس ٢/ مساحة هذا المثلث.



الحل/ ١/ بما أن Δ متساوي الساقين

⇐ زاويا = (١٨٠ - ٩٠)/٢ = ٤٥°

زاوية ميل المماس = هـ = ١٨٠ - ٤٥ = ١٣٥

⇐ ميل المماس = ظا ١٣٥ = -١

نفرض نقطة التماس (س، ص)

س² + ص² = ٥٠ ⇐ ٢س + ٢ص ص' = ٠ ، ص' = -١

⇐ ٢س - ٢ص = ٠

٢س = ٢ص ⇐ س = ص نعوضها في المنحنى.

س² + ص² = ٥٠ ⇐ س² + س² = ٥٠ ⇐ ٢س² = ٥٠ ⇐ س² = ٢٥ ⇐ س = ٥

س = -٥ ∉ للربع الأول

⇐ س = ص = ٥ ⇐ نقطة التماس (٥،٥)

٢/ (٥،٥) (أ،٠)

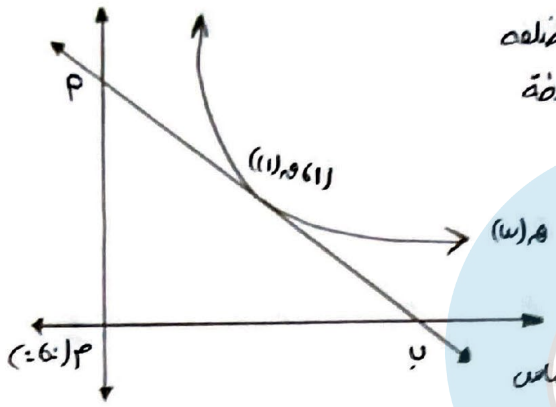
ميل المماس = -١ = Δص/Δس ⇐ -١ = (٥ - ٠)/(٥ - أ) ⇐ أ - ٥ = ٥ ⇐ أ = ١٠

أ.مي حواري

⇐ مساحة المثلث = ½ ق ع = ½ × ١٠ × ١٠ = ٥٠ وحدة مساحة.

أسال الله أن يجمع عليك شتات نفسك .. وقلبك وخطاك، وأن يجبر خاطرك!...

١٥/ معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل $\overline{AB}$ الذي ضلعه $\overline{AB}$ يمس منحنى $ق(س) = \frac{ج}{س+1}$ ، $س \neq -1$ عند النقطة $(1، ق(1))$ ، جد قيمة الثابت $ج$ التي تجعل مساحة المثلث $(\frac{ج}{4})$ وحدة مربعة.



الحل/ $ق(1) = \frac{ج}{1+1} = \frac{ج}{2}$

$\leftarrow (1، \frac{ج}{4})$ نقطة تماس

$ق'(س) = \frac{-ج}{(س+1)^2}$ ، $ق'(1) = \frac{-ج}{4} =$ ميل المماس

معادلة المماس / $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص - \frac{ج}{2} = -\frac{ج}{4}(س - 1)$ [$\times 4$]

$\leftarrow 4ص - 2ج = -ج س + ج \leftarrow 4ص = -ج س + 3ج$

بتقاطع المماس مع المحور س / عندما $ص = 0 \leftarrow 0 = -ج س + 3ج \leftarrow ج س = 3ج$

$\leftarrow س = 3 \leftarrow ب(3، 0)$

* عندما $س = 0 \leftarrow 4ص = 3ج \leftarrow ص = \frac{3}{4}ج \leftarrow A(0، \frac{3}{4}ج)$

مساحة $\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}ج \times 3 = \frac{9}{8}ج \leftarrow \frac{9}{8}ج = 1 \leftarrow ج = \frac{8}{9}$

١٦/ جد نقطة تقاطع المنحنيين $ق(س) = \sqrt{2-س}$ ، $ك(س) = س^2$ ثم جد معادلة المماس لـ $ق(س)$ عندها.

الحل/ ١/ نفرض نقطة التقاطع $(س، ص)$

$ق'(س) = \frac{-1}{2\sqrt{2-س}} =$ ميل المنحنى ، $ك'(س) = 2س$

عند نقطة التقاطع / $م_1 \times م_2 = -1 \leftarrow \frac{-1}{2\sqrt{2-س}} \times 2س = -1 \leftarrow (-\sqrt{2-س} = -س)^2$

$\leftarrow 2 - س = س^2 \leftarrow س^2 + س - 2 = 0 \leftarrow (س - 1)(س + 2) = 0$

إما $س - 1 = 0 \leftarrow س = 1$

أو $س + 2 = 0 \leftarrow س = -2$

نقطة التقاطع تحقق المنحنى / $ق(1) = \sqrt{2-1} = 1$ ، $ك(1) = 1 \leftarrow (1، 1)$

$ق(-2) = \sqrt{2-(-2)} = 2$ ، $ك(-2) = 4 \leftarrow ق(-2) \neq ك(-2)$ مرفوضة

$\leftarrow$ نقطة التقاطع $(1، 1)$

٢/ $ق'(1) = \frac{-1}{2} =$ ميل المماس ، نقطة المماس $(1، 1)$

معادلة المماس / $ص - ص_1 = م(س - س_1) \leftarrow ص - 1 = -\frac{1}{2}(س - 1) \leftarrow 2ص - 2 = -س + 1$

$\leftarrow 2ص = -س + 3 \leftarrow ص = -\frac{1}{2}س + \frac{3}{2}$

١٧/ إذا كان $ق(س - 1) = جا(\frac{\pi}{12}(4س - 2))$ أثبت أن $ق'(3) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

الحل/

$3س - 1 = 3 \leftarrow 3س = 4 \leftarrow س = 2$

$ق(٢س-١) = جا^٢\left(\frac{\pi}{١٨}(٤س-٢)\right) \Leftarrow ق'(٢س-١)\times \cancel{٢} = \cancel{٢}جا\left(\frac{\pi}{١٨}(٤س-٢)\right) جتا\left(\frac{\pi}{١٨}(٤س-٢)\right)\times \frac{٤\pi}{١٨}\Big|_{س=٢}$

$ق'(٣) = جا\left(\frac{\pi}{١٨}(٦)\right) جتا\left(\frac{٦\pi}{١٨}\right)\times \frac{٢\pi}{٩}$

$ق'(٣) = جا\left(\frac{\pi}{٣}\right) جتا\left(\frac{\pi}{٣}\right)\times \frac{٢\pi}{٩} \Leftarrow ق'(٣) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\times\frac{١}{\cancel{٢}}\times\frac{\cancel{٢}\pi}{٩} = \frac{\pi\sqrt{٣}\times\sqrt{٣}}{٢\times٩\times\sqrt{٣}}$

$ق'(٣) = \frac{٣\pi}{٢\times٩\sqrt{٣}} = \frac{\pi}{٦\sqrt{٣}}$ #

١٨/ جد معادلة العمودي على المماس للعلاقة $(س+٢ص)^٣ - ٤س + ٦ص = ٤٣$ عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم $٢ص = ٣ - س$

الحل/ أولاً: نجد نقطة التقاطع

$٢ص = (٣-س)$ نعوضها في المنحنى

أ.مي حواري

$(س+٢ص)^٣ - ٤س + ٣\times٢ص = ٤٣$

$(\cancel{س}+٣-\cancel{س})^٣ - ٤س + ٣(٣-س) = ٤٣$

$٢٧ - ٤س + ٩ - ٣س = ٤٣ \Leftarrow ٣٦ - ٧س = ٤٣ \Leftarrow -٧س = ٧ \Leftarrow س = -١$

$\Leftarrow ٢ص = ٣ - س\Big|_{س=-١} \Leftarrow ٢ص = ٣ + ١$

$٢ص = ٤ \Leftarrow ص = ٢ \Leftarrow (-١، ٢)$ نقطة التماس.

$*(س+٢ص)^٣ - ٤س + ٦ص = ٤٣$

$٣(س+٢ص)^٢(١+٢ص') - ٤ + ٦ص' = ٠ \Big|_{(-١،٢)}$

$٣(-١+٤)^٢(١+٢ص') - ٤ + ٦ص' = ٠$

$٢٧ + ٢٧\times٢ص' - ٤ + ٦ص' = ٠$

$٢٣ + ٥٤ص' + ٦ص' = ٠ \Leftarrow -٢٣ = ٦٠ص' \Leftarrow ص' = \frac{-٢٣}{٦٠}$ = ميل المماس

$\Leftarrow$ ميل العمودي $= \frac{٦٠}{٢٣}$ نقطة $(س_١، ص_١) = (-١، ٢)$

معادلة العمودي/ $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٢ = \frac{٦٠}{٢٣}(س+١) \Leftarrow ص - ٢ = \frac{٦٠}{٢٣}س + \frac{٦٠}{٢٣}$

$\Leftarrow ص = \frac{٦٠}{٢٣}س + \frac{٦٠}{٢٣} + \frac{٢\times٢٣}{٢٣} \Leftarrow ص = \frac{٦٠}{٢٣}س + \frac{١٠٦}{٢٣}$

١٩/ إذا كان $جاص = \frac{٢}{قتاس}$ أثبت أن $(ص')^٢ = ٣قا^٢ص + ١$

الحل/ $جاص = ٢جاس$ مكرر (2024 طولكرم / الاشتقاق الضمني)

٢٠/ اذا كان $ص س = (ص+س)^٤$ أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ص(٣س-ص)}{س(س-٣ص)}$

الحل/ طريقة (١):

بأخذ اللغاريتم للطرفين $\Leftarrow لو_هـ(ص س) = لو_هـ(ص+س)^٤ \Leftarrow لو_هـ ص + لو_هـ س = ٤لو_هـ(ص+س)$

$\frac{ص'}{ص} + \frac{١}{س} = \frac{٤(١+ص')}{س+ص} \Leftarrow \frac{٤+٤ص'}{س+ص} = \frac{+١}{س} + \frac{ص'}{ص}$

$\frac{٤}{س+ص} + \frac{٤ص'}{س+ص} = \frac{١}{س} + \frac{ص'}{ص}$

$\frac{٤}{س+ص} - \frac{١}{س} = \frac{ص'}{ص} - \frac{٤ص'}{س+ص} \Leftarrow$ $ص' \left(\frac{١}{ص} - \frac{٤}{س+ص}\right) = \frac{٤س-(س+ص)}{ص(س+ص)}$

$\Leftarrow$ $ص' \left(\frac{س+ص-٤ص}{ص(س+ص)}\right) = \frac{٤س-س-ص}{س(س+ص)}$

$\Leftarrow$ $ص' = \frac{س-٣ص}{س}$ $\Leftarrow$ $ص' (س-٣ص) = ص$ $\Leftarrow$ $ص' = \frac{ص(٣س-ص)}{س(س-٣ص)}$ #

طريقة (٢): $س ص = (ص+س)^{٤}$ نشتقّ لـ س.

$س ص' + ص = ٤(ص+س)^{٣}(١+ص')$

$س ص' + ص = ٤(س+ص)^{٣} + ٤(س+ص)^{٣} ص'$

أ.مي حواري

$\Leftarrow$ $س ص' - ٤(س+ص)^{٣} ص' = ٤(س+ص)^{٣} - ص$.

$ص' [س - ٤(س+ص)^{٣}] = ٤(س+ص)^{٣} - ص$

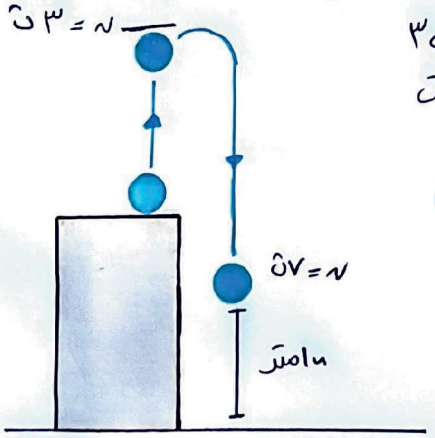
$ص' (س - ٤(س^{٢}+٢س ص+ص^{٢})) = ٤(س+ص)^{٤} - ص(س+ص)$

$\Leftarrow$ $ص' (س - ٤س^{٢} - ٨س ص - ٤ص^{٢}) = ٤س^{٤} + ٣٢س^{٣} ص + ٢٤س^{٢} ص^{٢} + ٤س ص^{٣} - س ص - ص^{٢}$

$ص' (-٤س^{٢} - ٧س ص - ٣ص^{٢}) = ٤س^{٤} + ٣١س^{٣} ص + ٢٣س^{٢} ص^{٢} + ٣س ص^{٣} - ص^{٢}$

$ص' = \frac{٤س^{٤} + ٣١س^{٣} ص + ٢٣س^{٢} ص^{٢} + ٣س ص^{٣} - ص^{٢}}{-٤س^{٢} - ٧س ص - ٣ص^{٢}}$ $\Leftarrow$ $ص' = \frac{ص(٣س-ص)}{س(س-٣ص)}$ #

21/ قذف جسم رأسيًا لأعلى من قمة برج حسب العلاقة ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن^{٢} حيث أقصى ارتفاع ٤٥ عن سطح الأرض علمًا بأن الجسم كان على ارتفاع ١٥ متر عن سطح الأرض بعد (٧ ثوانٍ) وهو نازل.



الحل/ ف(٧) = ٣٠×٧ - ٥×٧^{٢} = ٢١٠ - ٢٤٥ = -٣٥

$\Leftarrow$ بما أن ازاحة الجسم بعد ٧ ثوانٍ (-٣٥) $\Leftarrow$ الجسم يقع تحت البرج بـ (٣٥م)

$\Leftarrow$ ارتفاع البرج = ١٥ + ٣٥ = ١٣٥م

ف = ٣٠ن - ٥ن^{٢}

ع = $\frac{ص}{ك}$ = ٣٠ - ١٠ن = ٠ $\Leftarrow$ ∴ ن = ٣ ثا

$\Leftarrow$ ن = ٣ ثا ، زمن أقصى ارتفاع ،

ف(٣) = ٣٠×٣ - ٥×٩ = ٩٠ - ٤٥ = ٤٥م

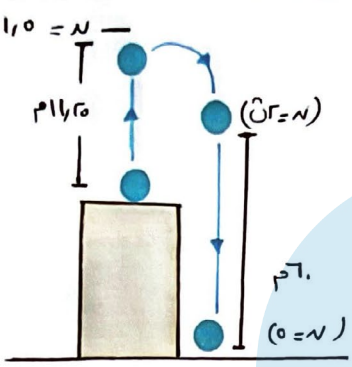
أقصى ارتفاع عن الأرض = أقصى ارتفاع عن البرج + طول البرج

= ٤٥ + ١٣٥ = ١٨٠م

22/ من قمة برج قذف جسم رأسيًا لأعلى حسب العلاقة ف = ١٥ن - ٥ن^{٢} كان الجسم على ارتفاع ٦م عن سطح الأرض بعد (٢) ثانية من لحظة ارتطام الجسم بالأرض.

الحل/ ف = ١٥ن - ٥ن^{٢} $\Leftarrow$ ٦ = ١٥ن - ٥ن^{٢} $\Leftarrow$ ٥ن^{٢} - ١٥ن = -٦ $\Leftarrow$ ن = ١٫٥ ثا.

أقصى ارتفاع عن البرج = ف(١٫٥) = ٣٠×١٫٥ - ٥×(١٫٥)^{٢} = $\frac{٩٠}{٢} - \frac{٤٥}{٤} = \frac{٤٥}{٢} - \frac{٤٥}{٤}$ م = ١١٫٢٥م



أ.مي حواري

ف(٢) = ١٥×٢ − ٥×٢² = ٣٠ − ٢٠ = ١٠م

بعد (٢ث) الجسم فوق البرج بـ (١٠م)

⇐ ارتفاع البرج = ٦٠ − ١٠ = ٥٠م

* عندما يصل الجسم سطح الأرض ف(ن) = −٥٠م

١٥ن − ٥ن² = −٥٠

⇐ (٥ن² − ١٥ن − ٥٠ = ٠) / ٥

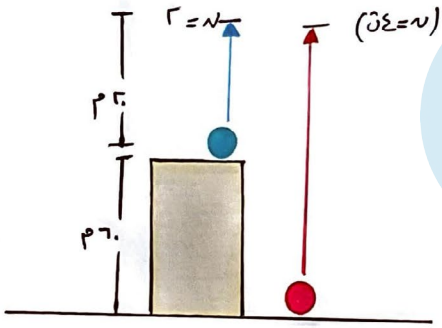
ن² − ٣ن − ١٠ = ٠

(ن + ٢)(ن − ٥) = ٠

إما ن + ٢ = ٠ ⇐ ن = −٢ ✗ أو ن − ٥ = ٠ ⇐ ن = ٥

ع(٥) = ١٥ − ١٠×٥ = ١٥ − ٥٠ = −٣٥م/ث

٢٣/ من قمة برج يرتفع ٦٠م أطلق جسم إلى أعلى حسب العلاقة ف = ٢٠ن − ٥ن²
وبنفس اللحظة من سطح الأرض قذف جسم رأسيًا لأعلى حسب ف(ن) = أن − ٥ن² جد الثابت أ عندما يكون لهما نفس أقصى ارتفاع عن سطح الأرض.



الحل/ ف₁ = ٢٠ن − ٥ن²

ع₁ = عف₁/عن = ٢٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ٢٠ = ١٠ن

⇐ (ن = ٢ث)

أقصى ارتفاع للجسم الأول = ف(٢) = ٢٠×٢ − ٥×٤ = ٢٠م عن البرج

⇐ أقصى ارتفاع للأول عن الأرض = ٢٠ + ٦٠ = ٨٠م

* ف₂(ن) = أن − ٥ن²

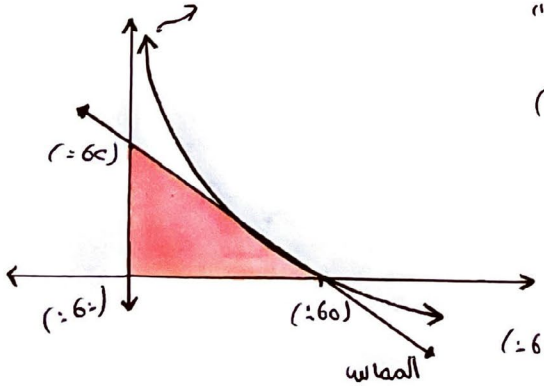
ع₂ = أ − ١٠ن = ٠ ⇐ أ = ١٠ن عند أقصى ارتفاع

ف₂(ن) = أن − ٥ن² ⇐ ٨٠ = ١٠ن×ن − ٥ن² ⇐ ٨٠ = ٥ن² ⇐ ١٦ = ن² ⇐ ن = ٤ث

⇐ أ = ١٠×٤ = ٤٠

٢٤/ جد مساحة المثلث الواقع في الربع الأول والمحصور بين المحورين الاحداثيين والمماس للعلاقة ص = ٥/س − س/٥ ، س ≠ ٠ عند النقطة (٥، ٠)

الحل/ المثلث أضلاعه ← مماس "نحتاج معادلته"
← محور السينات (ص = ٠)
← محور الصادات (س = ٠)



ص = ٥/س − س/٥

ص' = −٥/س² − ١/٥

ص'|(٥، ٠) = −٥/٥² − ١/٥ = −١/٥ − ١/٥ = −٢/٥

ميل المماس = −٢/٥ نقطة التماس = (٥، ٠)

معادلة المماس/ ص − ص₁ = م(س − س₁)

ص − ٠ = −٢/٥(س − ٥) ⇐ ص = −٢/٥(س − ٥) "نجد نقاط تقاطع المماس مع المحورين"

عندما ص = ٠ ⇐ ٠ = −٢/٥(س − ٥) ⇐ (س − ٥) = ٠ ⇐ س = ٥ ⇐ (٥، ٠)

• عندما س = ٠ ⇐ ص = $-\frac{٤}{٥}$ × ٥ = ٢ ⇐ (٠، ٢)

مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٢ = ٥ وحدات مساحة .

٣٥/ إذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند (١، ٢) يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وكان هـ(س) = $\frac{ق^{٣}(\frac{س}{٢})+١}{س+١}$ حيث معادلة المماس لمنحنى هـ(س) عند (س=٢)

الحل

(١، ٢) ∈ ق(س) ⇐ ق(١) = ٢

ميل المماس = ظا $\frac{\pi}{٤}$ = ق'(١) ⇐ ١ = ق'(١) .

* هـ(س) = $\frac{ق^{٣}(\frac{س}{٢})+١}{س+١}$ ⇐ هـ(٢) = $\frac{ق^{٣}(١)+١}{٢+١}$ = $\frac{٢^{٣}+١}{٣}$ = $\frac{٩}{٣}$ = ٣ ⇐ (٢، ٣) نقطة التماس لـ (هـ(س))

هـ'(س) = $\frac{(س+١)(٣ق^{٢}(\frac{س}{٢})ق'(\frac{س}{٢})\times\frac{١}{٢}) - (ق^{٣}(\frac{س}{٢})+١)}{(س+١)^{٢}}$

هـ'(٢) = $\frac{٣\times٣ق^{٢}(١)ق'(١)\times\frac{١}{٢} - (ق^{٣}(١)+١)}{(٢+١)^{٢}}$ = $\frac{٩\times٢^{٢}\times١\times\frac{١}{٢} - (٢^{٣}+١)}{٩}$

⇐ هـ'(٢) = $\frac{١٨-٩}{٩}$ = $\frac{٩}{٩}$ = ١ = ميل المماس

م = ١ نقطة التماس (٢، ٣)

معادلة المماس/ ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)

ص − ٣ = س − ٢ ⇐ ص = س + ١

أ.مي حواري

٣٦/ لتكن ق(س) = $(٤-\frac{٩}{س})^{٣}$ ، هـ(س) = س$\sqrt{س}$ جد (ق∘هـ)'(٤)

الحل هـ(س) = س$\sqrt{س}$ = س^{١} × س$^{\frac{١}{٢}}$ = س$^{١+\frac{١}{٢}}$ ⇐ هـ(س) = س$^{\frac{٣}{٢}}$

هـ'(س) = $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{٣}{٢}\sqrt{س}$ ⇐ هـ'(٤) = $\frac{٣}{٢}\sqrt{٤}$ = ٣

هـ$^{-١}$(س) = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ = $\frac{٣}{٤\sqrt{س}}$ ⇐ هـ$^{-١}$'(٤) = $\frac{٣}{٤\sqrt{٤}}$ = $\frac{٣}{٨}$

ق(س) = $(٤-\frac{٩}{س})^{٣}$ ⇐ ق'(س) = ٣$(٤-\frac{٩}{س})^{٢}$ × $\frac{٩}{س^{٢}}$

(ق∘هـ)'(٤) = ق'(هـ(٤)) هـ'(٤) = ق'(٣) × $\frac{٣}{٨}$

= $\frac{٢٧}{٣}(٤-\frac{٩}{٣})^{٢}$ × $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٩}{٨}$ × ١ = $\frac{٩}{٨}$

٣٧/ إذا كان ل(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق حيث ل(س) × هـ^{٢}(س) = ٩

هـ'(٢) = ٣$\sqrt{٩}$ ، هـ(٢) = −٢$\sqrt{٩}$ جد معادلة المماس عند (س=٢) للاقتران ل(س)

الحل ل(س) = $\frac{٩}{هـ^{٢}(س)}$

ل'(٢) = $\frac{٩}{هـ^{٢}(٢)}$ = $\frac{٩}{(-٢\sqrt{٩})^{٢}}$ = $\frac{٩}{٣٦}$ = $\frac{١}{٤}$ ⇐ (٢، $\frac{١}{٤}$) نقطة التماس .

$\text{ل}'(\text{س}) = \frac{-\text{أ} \times ٢\text{هـ}(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س})}{(\text{هـ}^{٢}(\text{س}))^{٢}} \Leftarrow \text{ل}'(\text{س}) = \frac{-٢\text{أ}\,\text{هـ}'(\text{س})}{\text{هـ}^{٣}(\text{س})}$

$\text{ميل المماس} = \text{ل}'(٢) = \frac{-٢\text{أ}\,\text{هـ}'(٢)}{\text{هـ}^{٣}(٢)} = \frac{-٢\text{أ} \times ٣\sqrt{\text{أ}}}{(-٢\sqrt{\text{أ}})^{٣}} = \frac{-٢\text{أ} \times ٣\sqrt{\text{أ}}}{-٨\text{أ}\sqrt{\text{أ}}} = \frac{-٢ \times ٣}{-٨} = \frac{٣}{٤}$

$\text{م} = \frac{٣}{٤}$ $\quad (\text{س}_{١}، \text{ص}_{١}) = (٢، \frac{١}{٤})$

معادلة المماس/ $\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}(\text{س} - ٢) \Leftarrow \text{ص} - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}\text{س} - \frac{٦}{٤}$

$\Leftarrow \text{ص} = \frac{٣}{٤}\text{س} - \frac{٥}{٤}$

٢٨/ اذا كان $\text{ص}\,\text{ظتاس} = ١$ أثبت أن $١ + \text{ص}\,\text{ص}'' - (\text{ص}')^{٢} = \text{ص}^{٤}$

الحل/ $\text{ص} = \frac{١}{\text{ظتاس}} \Leftarrow \text{ص} = \text{ظاس}$

$\text{ص}' = \text{قا}^{٢}\text{س} \Leftarrow \text{ص}'' = ٢\text{قاس} \times \text{قاس}\,\text{ظاس} = ٢\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ظاس}$

الطرف الأيمن/ $١ + \text{ص}\,\text{ص}'' - (\text{ص}')^{٢} = ١ + \text{ظاس} \times ٢\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ظاس} - (\text{قا}^{٢}\text{س})^{٢}$

$\Leftarrow = ١ + ٢\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ظا}^{٢}\text{س} - (\text{قا}^{٢}\text{س})^{٢}$

$= ١ + ٢(\text{ظا}^{٢}\text{س} + ١)\,\text{ظا}^{٢}\text{س} - (\text{ظا}^{٢}\text{س} + ١)^{٢}$

$= ١ + (٢\text{ظا}^{٤}\text{س} + ٢\text{ظا}^{٢}\text{س}) - (\text{ظا}^{٤}\text{س} + ٢\text{ظا}^{٢}\text{س} + ١)$

$= \cancel{١} + ٢\text{ظا}^{٤}\text{س} + \cancel{٢\text{ظا}^{٢}\text{س}} - \text{ظا}^{٤}\text{س} - \cancel{٢\text{ظا}^{٢}\text{س}} - \cancel{١}$

$= \text{ظا}^{٤}\text{س} = \text{ص}^{٤}$ #

أ.مي حواري

٢٩/ ليكن $\text{ص} = \sqrt{٢\text{جاس} + ٥}$ أثبت أن $٢\text{ص}\,\text{ص}'' + ٢(\text{ص}')^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٥$

الحل/ $(\text{ص} = \sqrt{٢\text{جاس} + ٥})^{٢}$

$\text{ص}^{٢} = ٢\text{جاس} + ٥$ نشتق لـ س.

$\cancel{٢}\text{ص}\,\text{ص}' = \cancel{٢}\text{جتاس} \Leftarrow \text{ص}\,\text{ص}' = \text{جتاس}$ نشتق مرة أخرى لـ س.

$\text{ص}\,\text{ص}'' + \text{ص}' \times \text{ص}' = -\text{جاس}$

$[\text{ص}\,\text{ص}'' + (\text{ص}')^{٢} = -\text{جاس}] \times ٢$

$٢\text{ص}\,\text{ص}'' + ٢(\text{ص}')^{٢} = -٢\text{جاس}$

$٢\text{ص}\,\text{ص}'' + ٢(\text{ص}')^{٢} + ٢\text{جاس} = ٠$ اضافة (٥) للطرفين

$٢\text{ص}\,\text{ص}'' + ٢(\text{ص}')^{٢} + ٢\text{جاس} + ٥ = ٥$

$\Leftarrow ٢\text{ص}\,\text{ص}'' + ٢(\text{ص}')^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٥$ #

٣٠/ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} (\text{أ} + \sqrt{\text{س}})^{٢} & ، \text{س} \geq ٩ \\ \frac{\text{س}^{٢}}{٢٧} + \text{ب} & ، \text{س} < ٩ \end{cases}$ وكانت $\text{ق}'(٩)$ موجودة، ما قيمة الثابتين أ، ب

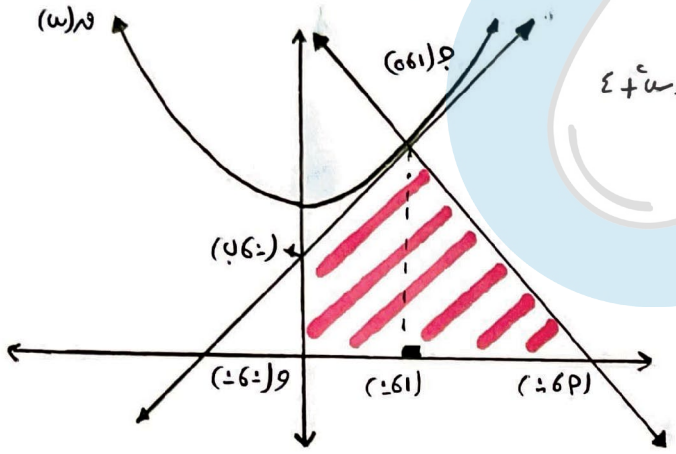
الحل/ $\text{ق}'(٩)$ موجودة $\Leftarrow \text{ق}'(٩)^{+} = \text{ق}'(٩)^{-} \Leftarrow \cancel{٢}(\text{أ} + \sqrt{\text{س}}) \times \frac{١}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}}} = \frac{٢\text{س}}{٢٧}\Big|_{\text{س}=٩}$

$\Leftarrow (\text{أ} + \sqrt{٩}) \times \frac{١}{٩\sqrt{٩}} = \frac{٢ \times \cancel{٩}}{\cancel{٢٧}_{٣}} \Leftarrow (\text{أ} + ٣) \times \frac{١}{\cancel{٣}} = \frac{٢}{\cancel{٣}} \Leftarrow \text{أ} + ٣ = ٢ \Leftarrow \text{أ} = -١$

ق'(٩) موجودة ⇐ ق(س) متصل عند (س = ٩)

$\lim_{س \to ٩^+} (-١+\sqrt{س})^٢ = \lim_{س \to ٩^-} \left(\frac{س^٢}{٢٧}+ب\right) \Leftarrow (-١+\sqrt{٩})^٢ = \frac{٩^٢}{٢٧}+ب$

$\Leftarrow ٢^٢ = \frac{٩ \times \cancel{٩}}{\cancel{٢٧}_{٣}}+ب \Leftarrow ٤ = \frac{٩}{٣}+ب \Leftarrow ٤ = ٣+ب \Leftarrow ١ = ب$



٣١/ جد مساحة الشكل الرباعي الناتج من تقاطع المماس و العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = س² + ٤ عند (١،٥) ومحور السينات والصادات الموجبين.

الحل/ ق(س) = س² + ٤

ق'(س) = ٢س

ق'(١) = ٢ = ميل المماس

(١،٥) (٠،ب)

م = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ⇐ ٢ = $\frac{٥-ب}{١-٠}$

٢ = ٥ − ب ⇐ ب = ٥ − ٢ = ٣

⇐ (٠،ب) = (٠،٣) ✓

ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$ = $-\frac{١}{٢}$ = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$.

(أ،٠) (١،٥)

$-\frac{١}{٢} = \frac{٥-٠}{١-أ}$ ⇐ أ − ١ = ١٠ ⇐ أ = ١١ ⇐ (١١،٠)

مساحة الشكل الرباعي = مساحة Δ + مساحة شبه منحرف

= $\frac{١}{٢}$ق ع + $\frac{١}{٢}$(ق١ + ق٢) × ع

= $\left(\frac{١}{٢}(١١-١) \times (٥-٠)\right) + \left(\frac{١}{٢}((٣)+٥) \times ١\right)$

= ٢٥ + ٤ = ٢٩ وحدة مساحة.

٣٢/ إذا كان ص = أ س^ن + ب س^(١−ن) أثبت أن ص'' س² = ن(ن−١) ص.

الحل/ ص' = أ ن س^(ن−١) + ب(١−ن) س^(−ن)

ص'' = أ ن(ن−١) س^(ن−٢) + ب(١−ن) × −ن (س)^(−ن−١)

ص'' = أ ن(ن−١) س^(ن−٢) + ب ن(ن−١) س^(−ن−١) اخراج (ن)(ن−١) عامل مشترك.

[ص'' = ن(ن−١) (أ س^(ن−٢) + ب س^(−ن−١))] × س²

ص'' س² = ن(ن−١) (أ س^(ن−٢) × س² + ب س^(−ن−١) × س²)

ص'' س² = (ن(ن−١))(أ س^ن + ب س^(١−ن))

ص'' س² = ن(ن−١) ص #

٣٣/ إذا كان ص = $\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}$ ، س > ٠ أثبت أن ٤ س³ (ص')² = (س−١)²

الحل/ $ص = \sqrt{س} + \frac{1}{\sqrt{س}} \Leftarrow ص = \sqrt{س} + س^{-\frac{1}{2}} \Leftarrow ص' = \frac{1}{2\sqrt{س}} - \frac{1}{2} س^{-\frac{3}{2}}$

$\Leftarrow ص' = \frac{1}{2\sqrt{س}} - \frac{1}{2 س^{\frac{3}{2}}} \Leftarrow ص' = \frac{1}{2\sqrt{س}} - \frac{1}{2\sqrt{س^3}}$

$\sqrt{س^2} \times \sqrt{س} = |س| \sqrt{س} = س\sqrt{س}$ ، $س > 0$

$ص' = \frac{1}{2\sqrt{س}} - \frac{1}{2 س \sqrt{س}}$

$ص' = \frac{1}{2\sqrt{س}} \left(1 - \frac{1}{س}\right) \Leftarrow ص' = \frac{1}{2\sqrt{س}} \times \frac{(س-1)}{س}$

$\Leftarrow [2 س \sqrt{س}\, ص' = (س-1)]^2 \Leftarrow 4 س^2 \times س (ص')^2 = (س-1)^2$

$\Leftarrow 4 س^3 (ص')^2 = (س-1)^2$ #

٣٤/ أثبت أن المماسين المرسومين لمنحنى العلاقتين $4 س^2 + 9 ص^2 = 45$ ، $س^2 - 4 ص^2 = 0$ عند نقطة تقاطع العلاقتين في الربع الأول متعامدين.

الحل/ نجد نقطة تقاطع المنحنيين:

أ.مي حواري

$4 س^2 + 9 ص^2 = 45$ ـــ (١)

$[س^2 - 4 ص^2 = 0] \times 4 \Leftarrow 4 س^2 - 16 ص^2 = 20$ ـــ (٢)

(١) - (٢) / $25 ص^2 = 25 \Leftarrow ص^2 = 1 \Leftarrow ص = 1 \in$ للربع الأول

أو $ص = -1 \notin$ للربع الأول.

$س^2 - 4 ص^2 = 0 \,|_{ص=1} \Leftarrow س^2 - 4 = 0 \Leftarrow س^2 = 9 \Leftarrow س = 3 \in$ للربع الأول.

أو $س = -3 \notin$ للربع الأول

$\Leftarrow$ نقطة التقاطع/ (٣، ١)

* $4 س^2 + 9 ص^2 = 45 \Leftarrow 8 س + 18 ص ص' = 0 \,|_{(3،1)} \Leftarrow 8 \times 3 + 18 ص' = 0$

$\Leftarrow -8 \times 3 = 18 ص' \Leftarrow ص' = \frac{-8 \times 3}{18} \Leftarrow ص' = \frac{-4}{3}$ = ميل المماس الأول.

* $س^2 - 4 ص^2 = 0 \Leftarrow 2 س - 8 ص ص' = 0 \Leftarrow 2 س = 8 ص ص' \Leftarrow ص' = \frac{س}{4 ص} \,|_{(3،1)}$

$\Leftarrow ص' = \frac{3}{4}$ = ميل المماس الثاني

$م_1 \times م_2 = \frac{-4}{3} \times \frac{3}{4} = -1$ # متعامدان.

$\Leftarrow$ ومنه المماس عند نقطة تقاطع المنحنيين متعامدان #

٣٥/ اذا كان $(ص+1)^3 = (س-1)^2$ أثبت أن $\left(\frac{3}{2} ص'\right)^2 = \frac{1}{ص+1}$

الحل/ طريقة (١):

$3(ص+1)^2 ص' = 2(س-1) \times \frac{1}{2(ص+1)^2}$

$\left[\frac{3}{2} ص' = \frac{س-1}{(ص+1)^2}\right] \Leftarrow \left(\frac{3}{2} ص'\right)^2 = \frac{(س-1)^2}{(ص+1)^4} \Leftarrow \left(\frac{3}{2} ص'\right)^2 = \frac{(ص+1)^3}{(ص+1)^4}$

$\Leftarrow \left(\frac{3}{2} ص'\right)^2 = \frac{1}{ص+1}$ #

أ.مي حواري

طريقة (٢): بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}+1)^3 = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}-2)^2 \Leftarrow 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}+1) = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}-2)$ نشتق لـ س.

$\Leftarrow \frac{3\text{ص}'}{\text{ص}+1} = \frac{2}{\text{س}-2} \Leftarrow 3\text{ص}'(\text{س}-2) = 2(\text{ص}+1)$

$\Leftarrow \left(\frac{3}{2}\text{ص}' = \frac{\text{ص}+1}{\text{س}-2}\right)^2 \Leftarrow \left(\frac{3}{2}\text{ص}'\right)^2 = \frac{(\text{ص}+1)^2}{(\text{س}-2)^2} = \frac{(\text{ص}+1)^2}{(\text{ص}+1)^3}$

$\Leftarrow \left(\frac{3}{2}\text{ص}'\right)^2 = \frac{1}{\text{ص}+1}$ #

٣٦/ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}-1}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{قا}^2\text{س}$ ، $\text{س} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ وكان $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(\text{س}) = \text{أ}\,\text{هـ}(\text{س})$ ما قيمة الثابت أ

الحل/ $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}-1}}$ ، $\text{هـ}'(\text{س}) = 2\,\text{قا}\text{س}\,\text{قا}\text{س}\,\text{ظا}\text{س} = 2\,\text{قا}^2\text{س}\,\text{ظا}\text{س}$.

$(\text{ق}\circ\text{هـ})'(\text{س}) = \text{أ}\,\text{هـ}(\text{س}) \Leftarrow \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س}))\,\text{هـ}'(\text{س}) = \text{أ}\,\text{هـ}(\text{س})$

$\Leftarrow \text{ق}'(\text{قا}^2\text{س}) \times 2\,\text{قا}^2\text{س}\,\text{ظا}\text{س} = \text{أ}\,\text{قا}^2\text{س}$ ، $\text{قا}^2\text{س} \neq 0$ ∴

$\frac{\text{ظا}\text{س}}{2\sqrt{\text{قا}^2\text{س}-1}} \times 2 = \text{أ} \Leftarrow \frac{\text{ظا}\text{س}}{\sqrt{\text{ظا}^2\text{س}}} = \text{أ}$

$\Leftarrow \text{أ} = \frac{\text{ظا}\text{س}}{|\text{ظا}\text{س}|} = \frac{\text{ظا}\text{س}}{-\text{ظا}\text{س}} = -1$ ، $|\text{ظا}\text{س}| = -\text{ظا}\text{س}$ ، $\text{س} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

$\Leftarrow \text{أ} = -1$

٣٧/ إذا كان المستقيم $3\text{ص} - \text{س} = \text{أ}$ يمس منحنى $(\text{ص}+1)^3 = \text{س}^2$ عند $(\text{س}_1, \text{ص}_1)$ الواقعة على كليهما ، جد قيمة الثابت أ ، $\text{س}_1, \text{ص}_1$ ؟

الحل/ نقطة التماس $(\text{س}_1, \text{ص}_1)$

* $3\text{ص} - \text{س} = \text{أ} \Leftarrow 3\text{ص}' - 1 = 0 \Leftarrow \text{ص}' = \frac{1}{3}$ = ميل المماس.

* $(\text{ص}+1)^3 = \text{س}^2$

$3(\text{ص}+1)^2\text{ص}' = 2\text{س}$ | $\Leftarrow 3(\text{ص}+1)^2 \times \frac{1}{3} = 2\text{س} \Leftarrow \boxed{\frac{1}{2}(\text{ص}+1)^2 = \text{س}}$

$\text{ص}' = \frac{1}{3}$

نعوضها في المنحنى

$\Leftarrow (\text{ص}+1)^3 = (\boxed{\text{س}})^2 \Leftarrow (\text{ص}+1)^3 = \left(\frac{1}{2}(\text{ص}+1)^2\right)^2$

$\Leftarrow (\text{ص}+1)^3 = \frac{1}{4}(\text{ص}+1)^4$ ، $\text{ص} \neq -1$

$1 = \frac{\text{ص}+1}{4} \Leftarrow 4 = \text{ص}+1 \Leftarrow 3 = \text{ص}$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{1}{2}(\text{ص}+1)^2 = \frac{1}{2}(4)^2 = \frac{16}{2} = 8 \Leftarrow (8, 3)$ نقطة التماس.

$(8, 3) \in$ للمماس/ $3\text{ص} - \text{س} = \text{أ} \Leftarrow 3\times3 - 8 = \text{أ} \Leftarrow 9 - 8 = \text{أ}$

$\Leftarrow \text{أ} = 1$

٣٨/ اذا كان $ق'(س+٥) = ٣س^٣ - ٤س^٢ + ٥$ وكان ق تمثل الاقتران

$$\text{جد نهـا}_{ع \to ١} \frac{ق(ع^٢ + ٤ع - ٢) + ١}{\ln ع}$$

الحل/ $$\text{نهـا}_{ع \to ١} \frac{ق(ع^٢ + ٤ع - ٢) + ١}{\ln ع} = \frac{ق(١+٤-٢)+١}{\ln ١} = \frac{ق(٣)+١}{٠}$$

باستخدام لوبتال/ $$= \text{نهـا}_{ع \to ١} \frac{ق'(ع^٢ + ٤ع - ٢) \times (٢ع + ٤)}{\frac{١}{٢}ع^{-\frac{١}{٢}}}$$

$$= \frac{ق'(١+٤-٢) \times (٢+٤)}{١}$$

$$= ق'(٣) \times ٦ = ٨ \times ٦ = ٤٨$$

ق'(س+٥) = ٣س^٣ - ٤س^٢ + ٥

ق'(٣) = ٣ ⇐ ٣س + ٥ = ٣

⇐ س = -١

ق(-١+٥) = ٣(-١)^٣ - ٤(-١)^٢ + ٥

ق(٣) = -٣ - ٤ + ٥ = -١

بالتشعب ق(٣س+٥) = ٣س^٣ - ٤س^٢ + ٥

٣ ق'(٣س+٥) = ٩س^٢ - ٨س

٣ ق'(٣) = ٩ - ٨

ق'(٣) = ١/٣ = ١

٣٩/ اذا كان ق(س) اقتران من الدرجة الثالثة وكان ق(س) - ق'(س) = ٣س^٣ - ٤س^٢ - ٣س + ٢

جد قاعدة ق(س) ثم جد جميع س التي تجعل ق(س) - ق'(س) = ١٨س

الحل/ نفرض ق(س) = أس^٣ + ب س^٢ + جـ س + د

ق'(س) = ٩س^٢ + ٢ب س + جـ

ق(س) - ق'(س) = أس^٣ + (ب - ٩)س^٢ + (جـ - ٢ب)س + (د - جـ)

بالمقارنة ٣س^٣ - ٤س^٢ - ٣س + ٢ = أس^٣ + (ب - ٩)س^٢ + (جـ - ٢ب)س + (د - جـ)

أ = ٣

ب - ٩ = -٤ ⇐ ب = ٥

جـ - ٢ب = -٣ ⇐ جـ - ١٠ = -٣ ⇐ جـ = ٧

د - جـ = ٢ ⇐ د - ٧ = ٢ ⇐ د = ٩

∴ ق(س) = ٣س^٣ + ٥س^٢ + ٧س + ٩

أ.مي حواري

(نسيت الفرع الثاني ⇐ تكملة الحل بعد آخر سؤال)

٤٠/ اذا كان متوسط تغير ق(س) في [١، ٤] = ٣ وكان ك(س) = ٢س + ٣ جد متوسط تغير (ق × ك)(س) في الفترة [١، ٤] علماً بأن منحنى ق(س) يمر بالنقطة (٤، ١٣)

ق(٤) = ١٣

الحل/ $$\frac{د ق(س)}{د س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(٤) - ق(١)}{٤ - ١} = ٣$$

⇐ ٩ = ق(٤) - ق(١) ⇐ ٩ = ١٣ - ق(١) ⇐ ق(١) = ٤

نفرض ل(س) = ق(س) ك(س)

$$\frac{د ل(س)}{د س} \text{ في } [١، ٤] = \frac{ل(٤) - ل(١)}{٣} = \frac{ق(٤)ك(٤) - ق(١)ك(١)}{٣}$$

$$= \frac{١٣ \times ١١ - ٤ \times ٥}{٣} = \frac{١٢٣}{٣} = ٤١$$

ك(س) = ٢س + ٣

ك(١) = ٢ + ٣ = ٥

ك(٤) = ٢ × ٤ + ٣

ك(٤) = ١١

٤١/ إذا كان ق(س) = |٢س - ٩| وكان ق(١) غ م علماً بأن ق(٣) = ٣ ما قيمة/ قيم كل من الثابتين م، ٩

الحل/ ق(١) غ م ⇐ س = ١ نقطة حرج لـ ق(س) ⇐ س = ١ صفر الاقتران

ق(١) = م - ٩ = ٠ ⇐ م = ٩

$\text{ق}'(\text{س}) = |\text{م}|$

$\text{ق}'(٢) = |\text{م}| = ٣ \Leftarrow \text{م} = \pm ٣$ ، $\text{أ} = \text{م} = \pm ٣$

٤٢/ اذا كان $\text{س} = \text{ظاهـ}$ ، $\text{ص} = \text{ظتاهـ}$ بين أن $\text{ص}'' = ٢\text{ص}^٣$

الحل/ $\text{ص} = \text{ظتاهـ} = \frac{١}{\text{ظاهـ}} \Leftarrow \text{ص} = \frac{١}{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}' = \frac{-١}{\text{س}^٢} \Leftarrow \text{ص}'' = \frac{٢}{\text{س}^٣}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = ٢ \times \frac{١}{\text{ظا}^٣\text{هـ}} = ٢\,\text{ظتا}^٣\text{هـ} \Leftarrow \text{ص}'' = ٢\text{ص}^٣$ #

٤٣/ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{ق}^{(٣)}(\text{س}) = -٦$ جد قيمة الثابتين أ ، ن

أ.مي حواري

الحل/ $\text{ق}'(\text{س}) = \text{أ}\,\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١} \Leftarrow \text{ق}''(\text{س}) = \text{أ}\,\text{ن}(\text{ن}-١)\,\text{س}^{\text{ن}-٢}$

$\text{ق}^{(٣)}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{ن}(\text{ن}-١)\,\text{س}^{\text{ن}-٣} \times (\text{ن}-٢)$

$-٦ = \text{أ}\,\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\,\text{س}^{\text{ن}-٣}$ بالمقارنة .

$\text{س}^{\text{ن}-٣} = ١ \Leftarrow \text{س}^{\text{ن}-٣} = \text{س}^{٠} \Leftarrow \text{ن}-٣ = ٠ \Leftarrow \text{ن} = ٣$

$\text{أ}\,\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢) = -٦ \Leftarrow \text{أ} \times ٣ \times ٢ \times ١ = -٦ \Leftarrow ٦\text{أ} = -٦ \Leftarrow \text{أ} = -١$

٤٤/ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ وكان $\text{ق}''(٢) = ٤\,\text{ق}'(٢)$ جد قيمة ن

الحل/ $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}(\text{س})^{\text{ن}-١} \Leftarrow \text{ق}''(\text{س}) = \text{ن}(\text{ن}-١)\,\text{س}^{\text{ن}-٢}$

$\text{ق}'(٢) = \text{ن}(٢)^{\text{ن}-١}$ / $\text{ق}''(٢) = \text{ن}(\text{ن}-١)(٢)^{\text{ن}-٢}$

$\text{ق}''(٢) = ٤\,\text{ق}'(٢) \Leftarrow \text{ن}(\text{ن}-١)(٢)^{\text{ن}-٢} = ٤(\text{ن})(٢)^{\text{ن}-١}$

$\text{ن}(\text{ن}-١)(٢)^{\text{ن}-٢} = \text{ن}(٢)^٢(٢)^{\text{ن}-١}$

$\text{ن}(\text{ن}-١)(٢)^{\text{ن}-٢} = \text{ن}(٢)^{\text{ن}+١}$

$\frac{\cancel{\text{ن}}(\text{ن}-١)(٢)^{\text{ن}-٢}}{\cancel{\text{ن}}(٢)^{\text{ن}+١}} = ١$ ، $\text{ن} \neq ٠$

$(\text{ن}-١)(٢)^{\text{ن}-٢-(\text{ن}+١)} = ١$

$(\text{ن}-١)\,\cancel{٢}^{\cancel{\text{ن}}-٢-\cancel{\text{ن}}-١} = ١$

$(\text{ن}-١) \times ٢^{-٣} = ١ \Leftarrow \frac{\text{ن}-١}{٨} = ١$

$\text{ن}-١ = ٨ \Leftarrow \text{ن} = ٩$

٤٥/ $\text{ق}'(٢) = ٥$ ، $\text{ل}(٢) = ٢$ ، $\text{هـ}(٢) = ٣$ ، $\text{هـ}'(٢) = ٤$ وكان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢\text{هـ}(\text{س}) - ٢\text{س}}{\text{س}^٢\,\text{ل}(\text{س})}$ ما قيمة $\text{ل}'(٢)$

الحل/ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢\text{هـ}(\text{س}) - ٢\text{س}}{\text{س}^٢\,\text{ل}(\text{س})} \Leftarrow \text{ق}(\text{س})\,\text{ل}(\text{س}) = \frac{٢\text{هـ}(\text{س}) - ٢\text{س}}{\text{س}^٢}$

$\text{ق}(\text{س})\,\text{ل}'(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})\,\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢(٢\text{هـ}'(\text{س}) - ٢) - (٢\text{هـ}(\text{س}) - ٢\text{س})(٢\text{س})}{\text{س}^٤}$

$\text{ق}(٢)\,\text{ل}'(٢) + \text{ل}(٢)\,\text{ق}'(٢) = \frac{٤(٢\text{هـ}'(٢) - ٢) - ٤(٢\text{هـ}(٢) - ٤)}{١٦}$

$\text{ق}(٢) = \frac{٢\text{هـ}(٢) - ٤}{٤\,\text{ل}(٢)}$

$\Leftarrow \text{ق}(٢) = \frac{٢ \times ٣ - ٤}{٤ \times ٢} = \frac{٦ - ٤}{٨} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

$\Leftarrow \frac{1}{4}\text{ل}'(2) + 2\times 5 = \frac{4(2\times 4-2) - 4(2\times 3-4)}{16}$

$\Leftarrow \frac{1}{4}\text{ل}'(2) + 10 = \frac{24-8}{16} \Leftarrow \frac{1}{4}\text{ل}'(2) + 10 = \frac{16}{16} \Leftarrow \frac{1}{4}\text{ل}'(2) + 10 = 1$

$\frac{1}{4}\text{ل}'(2) = -9 \Leftarrow \text{ل}'(2) = -36$

٤٦/ اذا كان $\text{ل}(\text{س}) = (\text{ق}\times\text{هـ})(\text{س})$ وكانت $\text{ق}'(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س}) = \text{جـ}$ ، $\text{جـ} \in \text{ح}$ وكانت $\text{ق}''(\text{س})$ ، $\text{هـ}''(\text{س})$ موجودة أثبت أن $\frac{\text{ل}''}{\text{ل}} = \frac{\text{ق}''}{\text{ق}} + \frac{\text{هـ}''}{\text{هـ}}$

$\text{ق}'\text{هـ}' = \text{جـ}$ نشتق

$\text{ق}\text{هـ}'' + \text{هـ}'\text{ق}' = 0$

أ.مي حواري

الحل/

$\text{ل}(\text{س}) = (\text{ق}\times\text{هـ})(\text{س})$

$\text{ل}'(\text{س}) = \text{ق}\text{هـ}' + \text{هـ}\text{ق}'$

$\text{ل}''(\text{س}) = \text{ق}\text{هـ}'' + \text{هـ}'\text{ق}' + \text{هـ}\text{ق}'' + \text{هـ}'\text{ق}'$

$\Leftarrow \text{ل}''(\text{س}) = \text{ق}\text{هـ}'' + \text{هـ}\text{ق}'' + 2\text{هـ}'\text{ق}'$

$\Leftarrow \text{ل}'' = \text{ق}\text{هـ}'' + \text{هـ}\text{ق}'' + 2\text{جـ}$

$\text{ل}''' = \text{ق}\text{هـ}''' + \text{ق}'\text{هـ}'' + \text{هـ}\text{ق}''' + \text{هـ}'\text{ق}'' + 0$

$\text{ل}''' = \text{ق}\text{هـ}''' + \text{هـ}\text{ق}''' + \text{ق}'\text{هـ}'' + \text{هـ}'\text{ق}'' \Leftarrow \text{ل}''' = \text{ق}\text{هـ}''' + \text{هـ}\text{ق}'''$ نقسم على ل

$\Leftarrow \frac{\text{ل}'''}{\text{ل}} = \frac{\text{ق}\text{هـ}'''}{\text{ل}} + \frac{\text{هـ}\text{ق}'''}{\text{ل}} \Leftarrow \frac{\text{ل}'''}{\text{ل}} = \frac{\text{ق}\text{هـ}'''}{\text{ق}\text{هـ}} + \frac{\text{هـ}\text{ق}'''}{\text{ق}\text{هـ}}$

$\Leftarrow \frac{\text{ل}'''}{\text{ل}} = \frac{\text{هـ}'''}{\text{هـ}} + \frac{\text{ق}'''}{\text{ق}}$ #

٤٧/ اذا كان $\text{ق}(\text{س})$ كثير حدود ، $\text{ق}'(0) = 0$ ، $\text{ق}''(0) = -10$ احسب $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{4\,\text{ق}'(\text{س})\,\text{جا}(2\text{س})}{5\,\text{س}^2}$

الحل/ $\frac{4}{5}\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{ق}'(\text{س})\,\text{جا}(2\text{س})}{\text{س}^2} = \frac{\text{ق}'(0)\,\text{جا}(0)}{0} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال / $\frac{4}{5}\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{ق}'(\text{س})\times 2\,\text{جتا}(2\text{س}) + \text{جا}(2\text{س})\,\text{ق}''(\text{س})}{2\text{س}} = \frac{4}{5}\left(\frac{2\,\text{جتا}(0)\,\text{ق}'(0) + \text{جا}(0)\,\text{ق}''(0)}{2\times 0}\right)$

$= \frac{4}{5}\left(\frac{2\times 1\times 0 + 0\times -10}{0}\right) = \frac{0}{0}$

لوبيتال مرة ثانية / $\frac{4}{5}\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{ق}'(\text{س})\times -4\,\text{جا}(2\text{س}) + 2\,\text{جتا}(2\text{س})\,\text{ق}''(\text{س}) + \text{جا}(2\text{س})\,\text{ق}'''(\text{س}) + 2\,\text{جتا}(2\text{س})\,\text{ق}''(\text{س})}{2}$

$= \frac{4}{5}\left(\frac{-4\,\text{جا}(0)\,\text{ق}'(0) + 2\,\text{جتا}(0)\,\text{ق}''(0) + \text{جا}(0)\,\text{ق}'''(0) + 2\,\text{جتا}(0)\,\text{ق}''(0)}{2}\right)$

$= \frac{\cancel{4}^{2}}{5}\times\left(\frac{2\times -10 + 2\times -10}{\cancel{2}}\right) = \frac{2}{5}\times -40 = 2\times -8 = -16$

٤٨/ اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}}$ بين أن $(1-\text{س}^2)\,\text{ص}' = \text{س}^2\text{ص}$

الحل/ نأخذ اللوغاريتم للطرفين / $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{هـ}^{\text{س}}\left(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{-\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = -\text{س} + \frac{1}{2}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right)\right) \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = -\text{س} + \frac{1}{2}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}-1)\right) \text{ نشتق}$$

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{س}+1} - \frac{1}{\text{س}-1}\right) \Leftarrow \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{س}-1-(\text{س}+1)}{(\text{س}+1)(\text{س}-1)}\right)$$

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{(\cancel{\text{س}}-1-\cancel{\text{س}}-1)}{\text{س}^2-1}\right) \Leftarrow \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = -1 + \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{(-\cancel{2})}{(\text{س}^2-1)}$$

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{-(\text{س}^2-1)-1}{\text{س}^2-1} \Leftarrow \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{-\text{س}^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{\text{س}^2-1} \Leftarrow \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{\text{س}^2}{1-\text{س}^2}$$

$$(1-\text{س}^2)\text{ص}' = \text{ص}\,\text{س}^2 \quad \#$$

٤٩/ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq 0$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{س}$ أثبت أن $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(\text{س}) = \frac{\text{ظا}^2\text{س}+1}{\text{قتا}^3\text{س}}$

الحل/ مكرر (درس السلسلة - أسئلة تجريبية - ٦/رام الله 2023).

٥٠/ اذا كان $\text{ل}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(\text{س})$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $(\text{س}=1)$ وكانت $\text{ل}(2) = -1$ ، $\text{ل}'(2) = -2$ ، $\text{م}(1) = 2$ ، $\text{م}'(1) = 3$ جد $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{س}^2 \times (\text{ل}\circ\text{م})(\text{س})\right)$ عند $(\text{س}=1)$

الحل/ $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{س}^2 \times (\text{ل}\circ\text{م})(\text{س})\right) = \text{س}^2 \times \text{ل}'(\text{م}(\text{س}))\,\text{م}'(\text{س}) + \text{ل}(\text{م}(\text{س})) \times 2\text{س} \Big|_{\text{س}=1}$

$= \text{ل}'(\text{م}(1))\,\text{م}'(1) + \text{ل}(\text{م}(1)) \times 2$

$= \text{ل}'(2) \times 3 + \text{ل}(2) \times 2$

$= -2 \times 3 + -1 \times 2 = -6 - 2 = -8$

أ.مي حواري

٥١/ إذا كان متوسط تغير $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}+1} - \sqrt{4\text{ب}}$ ، $\text{س} \in [3, \text{ب}]$ يساوي $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ ما قيمة الثابت ب

الحل/ $\frac{\Delta\text{ق}(\text{س})}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(3)}{\text{ب}-3} = \frac{(\sqrt{\text{ب}+1} - \sqrt{4\text{ب}}) - (\sqrt{3+1} - \sqrt{4\text{ب}})}{(\text{ب}-3)} = \frac{1}{2+\sqrt{5}}$

$$\Leftarrow \frac{\sqrt{\text{ب}+1} - \cancel{\sqrt{4\text{ب}}} - 2 + \cancel{\sqrt{4\text{ب}}}}{(\text{ب}-3)} = \frac{1}{2+\sqrt{5}} \Leftarrow \frac{\sqrt{\text{ب}+1} - 2}{\text{ب}-3} = \frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

$$\Leftarrow \frac{(\sqrt{\text{ب}+1}-2)(\sqrt{\text{ب}+1}+2)}{(\text{ب}-3)(\sqrt{\text{ب}+1}+2)} = \frac{1}{2+\sqrt{5}} \Leftarrow \frac{\text{ب}+1-4}{(\text{ب}-3)(\sqrt{\text{ب}+1}+2)} = \frac{1}{2+\sqrt{5}} \text{ ، } \text{ب} \neq 3$$

$$\Leftarrow \sqrt{\text{ب}+1} + \cancel{2} = \cancel{2} + \sqrt{5} \Leftarrow \left(\sqrt{\text{ب}+1} = \sqrt{5}\right)^2 \Leftarrow \text{ب}+1 = 5 \Leftarrow \text{ب} = 4$$

٥٢/ إذا كان متوسط تغير ق(س) في [٠، ٦] ، [-٣، ٣] يساوي ١٢، ٢٤ على الترتيب، ما قيمة الثابت ب علماً بأن ق(٢س+١) - ٣ق(س² - س) = ب س + ١.

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [٠، ٦] = ١٢ ⇐ $\frac{ق(٦) - ق(٠)}{٦ - ٠}$ = ١٢ ⇐ ق(٦) - ق(٠) = ٧٢

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [-٣، ٣] = ٢٤ ⇐ $\frac{ق(٣) - ق(-٣)}{٣ - -٣}$ = ٢٤ ⇐ ق(٣) - ق(-٣) = ١٤٤

• عندما ٢س + ١ = ٣ ⇐ ٢س = ٢ ⇐ س = ١

⇐ ق(٢+١) - ٣ق(١-١) = ب + ١ ⇐ ق(٣) - ٣ق(٠) = ب + ١ — (١)

• عند ٢س + ١ = -٣ ⇐ ٢س = -٤ ⇐ س = -٢

ق(٢×-٢+١) - ٣ق(٤-٢) = -٢ب + ١ ⇐ ق(-٣) - ٣ق(٦) = -٢ب + ١ — (٢)

(١) ∓ (٢) ⇐ ق(٣) - ٣ق(٠) ∓ ق(-٣) + ٣ق(٦) = ٣ب

⇐ (ق(٣) - ق(-٣)) + ٣(ق(٦) - ق(٠)) = ٣ب

١٤٤ + ٣×٧٢ = ٣ب ⇐ ٣ب = ٣٦٠ ⇐ ب = ١٢٠

٥٣/ إذا كان متوسط تغير ق(س) = -٢ - [س] + س² على [١، أ] يساوي $\frac{٢}{أ - ١}$ ما قيمة العدد الصحيح أ ، أ ∈ ص

الحل/ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ = $\frac{ق(أ) - ق(١)}{\cancel{أ - ١}}$ = $\frac{٢}{\cancel{أ - ١}}$ ، أ ≠ ١

أ.مي حواري

⇐ (-٢ - [أ] + أ²) - (-٢ - [١] + ١) = ٢

⇐ -٢ - أ + أ² - (-٢ - ١ + ١) = ٢

-٢ - أ + أ² + ٢ = ٢ ⇐ أ² - أ - ٢ = ٠ ⇐ (أ + ١)(أ - ٢) = ٠

إما أ + ١ = ٠ ⇐ أ = -١ مرفوض س٢ > س١ ⇐ أ > ١

أو أ - ٢ = ٠ ⇐ أ = ٢

٥٤/ إذا كان ق(س³) = س + $\frac{١}{٢}$س² + $\frac{١}{٣}$س³ + ... + $\frac{١}{٢ن}$س^{٢ن} ما قيمة ق'(-١).

الحل/ ق'(س³) × ٣س² = ١ + س + س² + س³ + ... + س^{١٩٩} | س = -١

٣ق'(-١) = ١ - ١ + ١ - ١ + ... + ١ - ١

٣ق'(-١) = ٠ ⇐ ق'(-١) = ٠

• عندما س³ = -١ ، س = -١

٥٥/ جد قيمة الثابتين أ، ب التي تجعل $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{ظا ٢س}{س^٣} + \frac{أ}{س^٢} + \frac{جا(ب س)}{س} \right) = ٠$

توحيد مقامات

الحل/ $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{ظا(٢س) + أس + س^٢ جا(ب س)}{س^٣} \right) = \frac{ظا(٠) + ٠ + ٠}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٠} \frac{قا^٢(٢س) \times ٢ + أ + س^٢ جتا(ب س) \times ب + جا(ب س) \times ٢س}{٣س^٢} = \frac{٢ + أ + ٠ + ٠}{٠}$

$= \frac{٢ + أ}{٠}$

بما أن المقام = ٠ والنهاية موجودة ⇐ البسط = ٠ ⇐ ٢ + أ = ٠ ⇐ أ = -٢

$$\lim_{س \to ٠} \frac{٢ق^٢(٢س) - ٢}{٣س^٢} + \lim_{س \to ٠} \frac{ب س^٢ جتا(ب س)}{٣س^٢} + \lim_{س \to ٠} \frac{جا(ب س) \times ٢س}{٣س^٢} = ٠$$

لوبيتال — تعويض مباشر — لوبيتال

$$\Leftarrow \lim_{س \to ٠} \frac{٢ \times ٢ق(٢س) ق(٢س) ظا(٢س) \times ٢}{٣ \times ٦س} + \frac{ب}{٣} جتا(٠) + \lim_{س \to ٠} \frac{٢ جتا(ب س) \times ب}{٣} = ٠$$

تعويض مباشر

$$\lim_{س \to ٠} \frac{٤ق^٢(٢س)}{٣} \times \lim_{س \to ٠} \frac{ظا(٢س)}{س} + \frac{ب}{٣} + \frac{٢}{٣} ب جتا(٠) = ٠$$

تعويض مباشر — لوبيتال

$$\frac{٤}{٣} ق^٢(٠) \times \lim_{س \to ٠} ٢ق^٢(٢س) + \frac{ب}{٣} + \frac{٢}{٣} ب = ٠$$

$$\frac{٤}{٣} \times ١ \times ٢ + ب = ٠ \Leftarrow \frac{٨}{٣} + ب = ٠ \Leftarrow -\frac{٨}{٣} = ب$$

٥٦/ إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا^٣س - جتا^٢س + جتاس + ج}{س^٢} = -١$ ما قيمة كل من الثابتين ن، ج

الحل/ $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا^٣س - جتا^٢س + جتاس + ج}{س^٢} = \frac{جتا^٣(٠) - جتا^٢ صفر + جتا(٠) + ج}{٠} = \frac{١ - ١ + ١ + ج}{٠}$

$$= \frac{١ + ج}{٠}$$

بما أن المقام = ٠ والنهاية موجودة ⇐ البسط = ٠ ⇐ ١ + ج = ٠ ⇐ ج = -١

باستخدام لوبيتال/

$$\lim_{س \to ٠} \frac{ن جتا^{ن-١}س \times -جاس - ٢جتاس \times -جاس - جاس}{٢س} = \frac{٠ - ٠ - ٠}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

+ جا(٢س)

لوبيتال مرة ثانية/

$$\lim_{س \to ٠} \frac{ن(ن-١) جتا^{ن-٢}س \times -جاس \times -جاس + ن جتا^{ن-١}س \times -جتاس + ٢جتا(٢س) - جتاس}{٢} = -١$$

أ.مي حواري

$$\frac{ن(ن-١) جتا(٠) جا^٢(٠) + -ن جتا(٠) جتا(٠) + ٢جتا(٠) - جتا(٠)}{٢} = -١$$

$$\Leftarrow -ن + ٢ - ١ = -٢ \Leftarrow -ن + ١ = -٢ \Leftarrow -ن = -٣ \Leftarrow ن = +٣$$

٥٧/ ليكن $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(٣) - ٥}{٣ - س} = ٢$ أوجد قيمة كل من الثابتين أ، ب علماً بأن

$$\lim_{س \to ١} \frac{٢\sqrt{س}\, ق(٢س + ١) - ٢ق(٣)}{س - ١} = \lim_{س \to ٢} \frac{أ س^٢ + ب س + ٦}{(س - ٢)}$$

الحل/ $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ٥}{٣ - س} = \frac{ق(٣) - ٥}{٣ - ٣} = \frac{ق(٣) - ٥}{٠}$

المقام = ٠ والنهاية موجودة ⇐ البسط = ٠ ⇐ ق(٣) - ٥ = ٠ ⇐ ق(٣) = ٥

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٣} \frac{ق'(س)}{-١} = ٢ \Leftarrow -ق'(٣) = ٢ \Leftarrow ق'(٣) = -٢$

* $\lim_{س \to ١} \frac{٢\sqrt{س}\, ق(٢س+١) - ٢ق(٣)}{س-١} = \frac{٢ق(٣) - ٢ق(٣)}{١-١} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ١} ٢\sqrt{س}\, ق'(٢س+١) \times ٢ + ق(٢س+١) \times \frac{٢}{٢\sqrt{س}}$

$= ٤\sqrt{١}\, ق'(٣) + \frac{ق(٣)}{\sqrt{١}} = ٤(-٢) + ٥ = -٨ + ٥ = -٣$

$\Leftarrow -٣ = \lim_{س \to ٢} \frac{أس^٢ + بس + ٦}{(س-٢)}$

أ.مي حواري

$\lim_{س \to ٢} \frac{أس^٢ + بس + ٦}{س-٢} = \frac{٤أ + ٢ب + ٦}{٢-٢} = \frac{٤أ + ٢ب + ٦}{٠}$

المقام = ٠ / النهاية موجودة ⇐ البسط = ٠ ⇐ ٤أ + ٢ب + ٦ = ٠ ⇐ [٤أ + ٢ب = -٦] / ٢

⇐ ٢أ + ب = -٣ — (١)

باستخدام لوبيتال/ $\lim_{س \to ٢} ٢أس + ب = ٤أ + ب = -٣$ — (٢)

(٢) - (١) / ٢أ = ٠ ⇐ أ = ٠ نعوضها في (١) ⇐ ب = -٣

٥٨/ إذا كان $(ص - هـ^{س})^٤ + (هـ^{س} - ص)^٤ = ٣٢$ ، ص + س ، ص > ٠ جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة التي احداثها السيني = ٠ .

الحل/ • مهم/ $(س - ص)^ن = (ص - س)^ن$ ، ن عدد زوجي

$(س - ص)^ن = -(ص - س)^ن$ ، ن فردي

⇐ $(ص - هـ^{س})^٤ = (هـ^{س} - ص)^٤$ ، ٤ عدد زوجي .

⇐ $(ص - هـ^{س})^٤ + (ص - هـ^{س})^٤ = ٣٢ \Leftarrow (٢(ص - هـ^{س})^٤ = ٣٢$ // ٢

$(ص - هـ^{س})^٤ = ١٦ \Leftarrow (ص - هـ^{س})^٤ = (\pm ٢)^٤$

⇐ $ص - هـ^{س} = ٢ \Leftarrow ص = هـ^{س} + ٢$ ✓ ص > ٠

أو $ص - هـ^{س} = -٢ \Leftarrow ص = هـ^{س} - ٢$ ✗ ص > ٠

⇐ $ص = هـ^{س} + ٢ \Leftarrow ص = هـ^{٠} + ٢ = ٣ \Leftarrow$ (٠ ، ٣) نقطة تماس .

$ص' = هـ^{س} = هـ^{٠} = ١$ = ميل المماس

معادلة المماس/ $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٣ = (س - ٠) \Leftarrow ص = س + ٣$

الجالس الحالم .. لا يصل !

٥٩/ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} |س-٥|^{٥} - ٨س & س \le ٢ \\ \frac{-٨}{س^{٢}} + ١ - ب^{٢} & س > ٢ \end{cases}$ وكانت $ق'(٢)$ موجودة

حيث أ، ب ∈ ح، ب ≠ ٠ بيرهن أن $\frac{ق'(٢)}{١ - ق'(٢)^{٢}} = -٢$

الحل/

$ق'(٢)$ موجودة ⇐ $ق'(٢)^{+} = ق'(٢)^{-}$

$\left| \frac{١٦}{س^{٣}} = ٥|س-٥|^{٤} \times ٢ - ٨ \right|_{س=٢}$

$\frac{١٦}{٨} = ٥|٣-٥|^{٤} \times ٢ - ٨ \Leftarrow ٢ = ١٠أ - ٨ \Leftarrow ١٠أ = ١٠ \Leftarrow أ = ١$

$ق(س) = \begin{cases} |س-٥|^{٤} - ٨ & س \le ٢ \\ \frac{١٦}{س^{٣}} & س > ٢ \end{cases}$

$ق'(٢)^{+} = \left| \frac{-٤٨}{س^{٤}} \right|_{س=٢} = \frac{-٤٨}{١٦} = -٣$ ، $ق'(٢)^{-} = ٤|٢-٥|^{٣} \times ٢ = -٣٢$

$ق'(ج) = ٤|ج-٥|^{٣} = -٨ \Leftarrow ٥ - ج = -٢ \Leftarrow ج = ٧$

$\frac{ق'(٢)}{١ - ق'(ج)^{٢}} = \frac{-٣٢}{١ - ٣^{٢}} = \frac{-٣٢}{-٨} = ٤$ //

٦٠/ لتكن $ص = \sqrt[٣]{(٣س+١)^{٢}} - \sqrt[٣]{(٣س-١)^{٢}}$ فبرهن أن $\left| \frac{ص}{س} \right| = \sqrt[٣]{٤س^{٣} - ١}$

الحل/

نشتق $ص = (٣س+١)^{\frac{٢}{٣}} - (٣س-١)^{\frac{٢}{٣}}$

$ص' = \frac{٢}{٣}(٣س+١)^{-\frac{١}{٣}} \times ٣ - \frac{٢}{٣}(٣س-١)^{-\frac{١}{٣}} \times ٣$

نربع الطرفين $ص'^{٢} = ٤ \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{٣س+١}} - \frac{١}{\sqrt[٣]{٣س-١}} \right)^{٢}$

$ص'^{٢} = \frac{١}{\sqrt[٣]{٣س+١}} + \frac{١}{\sqrt[٣]{٣س-١}} - \frac{٢}{\sqrt[٣]{(٣س+١)(٣س-١)}}$

$ص'^{٢} = \frac{٦س}{\sqrt[٣]{٩س^{٢}-١}} - \frac{٢}{\sqrt[٣]{٩س^{٢}-١}}$

$ص'^{٢} = \frac{٦س - ٢}{\sqrt[٣]{٩س^{٢}-١}}$

$ص'^{٢} = \frac{٢(٣س-١)}{\sqrt[٣]{(٣س-١)^{٢}(٣س+١)}}$

$ص'^{٢} = \frac{٢}{\sqrt[٣]{٣س+١}}$

$ص'^{٢} \times ص^{٢} = \frac{٢}{\sqrt[٣]{٣س+١}} \times \left(\sqrt[٣]{(٣س+١)^{٢}} - \sqrt[٣]{(٣س-١)^{٢}} \right)^{٢}$

$ص'^{٢} \times ص^{٢} = ٢ \left(٢ - \frac{\sqrt[٣]{(٣س-١)^{٢}}}{\sqrt[٣]{٣س+١}} \right)$

$ص'^{٢} \times ص^{٢} = ٤ - ٢ \sqrt[٣]{\frac{(٣س-١)^{٢}}{٣س+١}}$

$ص'^{٢} \times ص^{٢} = ٤ - ٢ \sqrt[٣]{\frac{(٣س-١)^{٣}}{(٣س+١)(٣س-١)}}$

$ص'^{٢} \times ص^{٢} = ٤ - ٢ \sqrt[٣]{\frac{(٣س-١)^{٣}}{٩س^{٢}-١}}$

$ص'^{٢} \times ص^{٢} = ٤ - ٢ \sqrt[٣]{\frac{(٣س-١)^{٣}}{(٣س-١)^{٣}(٣س+١)}}$

$ص'^{٢} \times ص^{٢} = ٤ - ٢ \sqrt[٣]{\frac{١}{٣س+١}}$

$ص'^{٢} \times ص^{٢} = ٤ - \frac{٢}{\sqrt[٣]{٣س+١}}$

$ص'^{٢} \times ص^{٢} = ٤ - ص'^{٢}$

$ص'^{٢} \times ص^{٢} + ص'^{٢} = ٤$

$ص'^{٢}(ص^{٢} + ١) = ٤$

$ص'^{٢} = \frac{٤}{ص^{٢}+١}$

$ص' = \frac{٢}{\sqrt{ص^{٢}+١}}$

$\left| \frac{ص}{س} \right| = \sqrt[٣]{٤س^{٣} - ١}$

$\left(\frac{ص}{س} \right)^{٣} = ٤س^{٣} - ١$

$\frac{ص}{س} = \sqrt[٣]{٤س^{٣} - ١}$

$ص = س \sqrt[٣]{٤س^{٣} - ١}$

$ص' = \sqrt[٣]{٤س^{٣} - ١} + س \times \frac{١}{٣}(٤س^{٣} - ١)^{-\frac{٢}{٣}} \times ١٢س^{٢}$

$ص' = \sqrt[٣]{٤س^{٣} - ١} + \frac{٤س^{٣}}{\sqrt[٣]{(٤س^{٣} - ١)^{٢}}}$

$ص' = \frac{(٤س^{٣} - ١) + ٤س^{٣}}{\sqrt[٣]{(٤س^{٣} - ١)^{٢}}}$

$ص' = \frac{٨س^{٣} - ١}{\sqrt[٣]{(٤س^{٣} - ١)^{٢}}}$

$ص'^{٢} = \frac{(٨س^{٣} - ١)^{٢}}{(٤س^{٣} - ١)^{٢

$س_{ن}$ ، $س^{3}$ = ∴ ، $س_{ن}$ ، $س^{3}$ = ∴ ، ق(∴) = ∴

ق(س) متصل عند س = ∴ ← ق(∴)$^{+}$ = ∴ ، ق(∴)$^{-}$ = ∴ ← ق(∴) موجودة

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، س < ٢ \\ ٣ \times ٣ = ٩ & ، س = ٢ \\ -٣س^{٢} & ، س > ٢ \end{cases}$$

← ق(س) = ٣س^{٢} ، س ∈ ح #

طريقة (٢) /

ق(س) = |س|^{٣} = (|س|^{٢})$^{\frac{٣}{٢}}$

$$ق(س) = \frac{٣}{٢}(|س|^{٢})^{\frac{١}{٢}} \times ٢س = ٣|س|^{٢} \times \frac{س}{|س|} = ٣س|س| \quad \#$$

٦٢/ إذا كان ص = $\frac{جاس}{١+جتاس}$ ، جتاس ≠ -١ أثبت أن $\frac{ص}{ص''} = ١ + جتاس$.

الحل/

$$ص' = \frac{(١+جتاس)(جتاس) - جاس \times -جاس}{(١+جتاس)^{٢}} = \frac{جتاس + جتا^{٢}س + جا^{٢}س}{(١+جتاس)^{٢}}$$

أ.مي حواري

$$ص' = \frac{جتاس + ١}{(جتاس+١)^{٢}} \leftarrow ص' = \frac{١}{١+جتاس}$$

$$ص'' = \frac{-(-جاس)}{(جتاس+١)^{٢}} = \frac{جاس}{(جتاس+١)(جتاس+١)} \leftarrow ص'' = \frac{ص}{١+جتاس}$$

← ص'' (جتاس+١) = ص ← (جتاس+١) = $\frac{ص}{ص''}$ #

٦٣/ لتكن ق^{٢} $\left(\frac{س^{٢}-ص^{٢}}{س^{٢}+ص^{٢}}\right)$ = ٩ ، س ≠ ص ، ٩ ∈ ح برهن أن س ص' = ص

الحل/

نأخذ الجذر للطرفين ← ق$\left(\frac{س^{٢}-ص^{٢}}{س^{٢}+ص^{٢}}\right)$ = ± ٣

← $\frac{١}{\pm ٣}$ = $\frac{١}{ق\left(\frac{س^{٢}-ص^{٢}}{س^{٢}+ص^{٢}}\right)}$ ← جتا$\left(\frac{س^{٢}-ص^{٢}}{س^{٢}+ص^{٢}}\right)$ = $\frac{١}{\pm ٣}$

← $\frac{س^{٢}-ص^{٢}}{س^{٢}+ص^{٢}}$ = جتا$^{-١}\left(\frac{١}{\pm ٣}\right)$ ثابت . نشتقل س .

← $\frac{(س^{٢}+ص^{٢})(٢س-٢ص ص')-(س^{٢}-ص^{٢})(٢س+٢ص ص')}{(س^{٢}+ص^{٢})^{٢}}$ = ∴

← (س^{٢}+ص^{٢})(٢س - ٢ص ص') = (س^{٢}-ص^{٢})(٢س+٢ص ص')

٢س (س^{٢}+ص^{٢}) - ٢ص (س^{٢}+ص^{٢}) ص' = ٢س (س^{٢}-ص^{٢}) + ٢ص (س^{٢}-ص^{٢}) ص'

٢س^{٣} + ٢س ص^{٢} - ٢ص س^{٢} ص' - ٢ص^{٣} ص' = ٢س^{٣} - ٢س ص^{٢} + ٢ص س^{٢} ص' - ٢ص^{٣} ص'

← ٢س ص^{٢} + ٢س ص^{٢} = ٢ص س^{٢} ص' + ٢ص س^{٢} ص'

$\Leftarrow$ ٤س ص^{٢} $\Leftarrow$ ٤س^{٢}ص ص$'$ $\Leftarrow$ ص$'$ = $\frac{\cancel{\text{س ص}^{٢}}}{\cancel{\text{س}^{٢}\text{ص}}}$ $\Leftarrow$ ص$'$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ $\Leftarrow$ س ص$'$ = ص #

٦٤/ إذا كان $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = -\sqrt{\frac{\text{١+ص}}{\text{١+س}}}$ ، ص > -١ ، س > -١ بين أن ص$'$ + (س+١)$^{-٢}$ = ٠

الحل/ نربع الطرفين

$\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)^{٢} = \frac{\text{١+ص}}{\text{١+س}}$ $\Leftarrow$ $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢}} = \frac{\text{١+ص}}{\text{١+س}}$ $\Leftarrow$ ص^{٢} + ص^{٢}س = س^{٢} + س^{٢}ص

$\Leftarrow$ ص^{٢} - س^{٢} = س^{٢}ص - ص^{٢}س

$\cancel{(\text{ص}-\text{س})}(\text{ص}+\text{س}) = -\text{س ص}\cancel{(\text{س}-\text{ص})}$ ، س ≠ ص

ص + س = -س ص $\Leftarrow$ ص + س ص = -س

ص(١+س) = -س $\Leftarrow$ ص = $\frac{-\text{س}}{\text{١+س}}$ نشتق

ص$'$ = $\frac{(\text{١+س})(-\text{١})+\text{س}}{(\text{س+١})^{٢}}$ $\Leftarrow$ ص$'$ = $\frac{-\text{١}\cancel{-\text{س}}\cancel{+\text{س}}}{(\text{س+١})^{٢}}$ $\Leftarrow$ ص$'$ = -(س+١)$^{-٢}$

$\Leftarrow$ ص$'$ + (س+١)$^{-٢}$ = ٠ #

أ.مي حواري

٦٥/ إذا كان ص = لو$_{\text{هـ}}$ (هـ^{س} + $\sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}}+\text{١}}$) أثبت أن (هـ$^{٢\text{س}}$+١) ص$''$ = ص$'$.

مكرر (أسئلة الاشتقاق الضمني / أسئلة تجريبية / ٥/ الوسطى 2023)

٦٦/ ليكن ص = س^{س} أثبت أن ص$''$ = ص (١+لو$_{\text{هـ}}$س)^{٢} + س$^{\text{س}-\text{١}}$

الحل/ نأخذ اللوغاريتم للطرفين

لو$_{\text{هـ}}$ص = س لو$_{\text{هـ}}$س نشتق لـ س .

$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ = س × $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ + لو$_{\text{هـ}}$س $\Leftarrow$ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ = ١ + لو$_{\text{هـ}}$س

$\Leftarrow$ ص$'$ = (١+لو$_{\text{هـ}}$س) ص نشتق مرة أخرى

ص$''$ = (١+لو$_{\text{هـ}}$س) ص$'$ + $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ $\Leftarrow$ ص$''$ = (١+لو$_{\text{هـ}}$س)(١+لو$_{\text{هـ}}$س) ص + $\frac{\text{س}^{\text{س}}}{\text{س}^{\text{١}}}$

$\Leftarrow$ ص$''$ = (١+لو$_{\text{هـ}}$س)^{٢}ص + س$^{\text{س}-\text{١}}$ #

٦٧/ إذا كان ص = $\left(\frac{\text{س}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}+\text{٢}}}\right)^{٥}$ أثبت أن س = هـ$^{\frac{\text{ص}'}{٥\text{ص}}}$

الحل/ بأخذ اللوغاريتم للطرفين لو$_{\text{هـ}}$ص = لو$_{\text{هـ}}$ $\left(\frac{\text{س}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}+\text{٢}}}\right)^{٥}$

$\Leftarrow$ لو$_{\text{هـ}}$ص = ٥ لو$_{\text{هـ}}$ $\left(\frac{\text{س}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}+\text{٢}}}\right)$ = ٥(لو$_{\text{هـ}}$س^{س} - لو$_{\text{هـ}}$هـ$^{\text{س}+\text{٢}}$)

لو$_{\text{هـ}}$ص = ٥ (س لو$_{\text{هـ}}$س - س - ٢) نشتق لـ س .

$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ = ٥ (س × $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ + لو$_{\text{هـ}}$س - ١) $\Leftarrow$ $\frac{\text{ص}'}{٥\text{ص}}$ = $\frac{٥}{٥}$ (لو$_{\text{هـ}}$س) $\Leftarrow$ $\frac{\text{ص}'}{٥\text{ص}}$ = لو$_{\text{هـ}}$س

$\Leftarrow \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \text{هـ}^{\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}} = \text{س}$ #

تكملة سؤال (39) $\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢$ نشتق

$\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}''(\text{س}) = ٩\text{س}^٢ - ٨\text{س} - ٣$

$١٨\text{س} = ٩\text{س}^٢ - ٨\text{س} - ٣$

$\therefore = ٩\text{س}^٢ - ٢٦\text{س} - ٣$

$\therefore = (٩\text{س} + ١)(\text{س} - ٣)$

إما $٩\text{س} + ١ = \therefore \Leftarrow ٩\text{س} = -١ \Leftarrow \text{س} = -\frac{١}{٩}$

أو $\text{س} - ٣ = \therefore \Leftarrow \text{س} = ٣$

$\Leftarrow \text{س} = \{-\frac{١}{٩}, ٣\}$

أ.مي حواري



اختبار الوحدة الأولى للمعتمين

• السؤال الأول /

1/ أحد الاقترانات التالية قابلة للاشتقاق عند (س = ٠):

أ/ $ه(س) = [٣س - ١]$ ب/ $ه(س) = |س^٣|$ ج/ $ل(س) = \sqrt{س}$ د/ $ل(س) = \frac{س^٤}{س^٤ - ٣س}$

الحل/ أ/ $ه(س) = [٣س - ١]$ غير متصل عند (س = ٠) وغير مشتقة عندها. ✗

لأن عند (س = ٠) نقطة تحول.

• ملاحظة/ $[أ، ب] \ni ج$ و $ب \in ص$ ⇐ اذا (ب) عندها نقطة تحول.

✓ ب/ $ه(س) = |س^٣| = |س|^٣$

$$ه(س) = \begin{cases} س^٣ & س \geq ٠ \\ -س^٣ & س < ٠ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ٠^+} ه(س) = \lim_{س \to ٠^-} ه(س) = ه(٠) = ٠$ متصل عند س = ٠

$ه'(٠^+) = ٣س^٢ = ٠$ ، $ه'(٠^-) = -٣س^٢ = ٠$

⇐ $ه'(٠^+) = ه'(٠^-) = ٠$

✗ ج/ $ل(س) = \sqrt{س} = |س|$ متصل عند (س = ٠) تحول غير متصل.

✗ د/ $ل(س) = \frac{س^٤}{س^٤ - ٤س}$ ← مجاله $ح \setminus \{٠، ٤\}$ غير معرف عند (س = ٠)

أ.مي حواري

2/ إذا كان $ه(١ - س) = [\frac{١}{٢}س - ١] \times ظا(\frac{\pi}{٤}س)$ و ما قيمة $ه'(٢)$

أ/ $\frac{\pi}{٢}$ ب/ $-\pi$ ج/ ٠ د/ غير موجودة

الحل/ عند $١ - س = ٢$ ⇐ $١ - ٢ = س$ ⇐ $س = -١$

$$[\frac{١}{٢}س - ١] = \begin{cases} ل = ٢ \\ -١ \text{ و } ٠ \leq س < ٢ \end{cases} \Leftarrow س = -١ \in [-٢، ٠]$$

$ه'(١ - س) = -٢ ظا(\frac{\pi}{٤}س) \Rightarrow ه'(١ - س) = -\frac{\pi}{٤} ظا(\frac{\pi}{٤}س) \times$

$ه'(١ - ١) = -ظا(-\frac{\pi}{٤}) \times \pi = -(-ظا\frac{\pi}{٤}) \pi = ١ \times \pi = \pi$

ظا(-أ) = -ظا أ

3/ إذا كان المستقيم $ص = ٩س + ٣$ يمس منحنى $ه(س) = ١ + ٥س - ٣س^٢$ و فإن نقطة التماس هي:

أ/ (١٩، ٦) ب/ (-١٩، ٦) ج/ (١٩، -٦) د/ (-١٩، -٦)

الحل/ نفرض نقطة التماس $(س_٠، ص_٠)$

$ص_٠ = ٩س_٠ + ٣$ ⇐ $ص_٠ = ٩$ = ميل المماس.

$ه'(س_٠) = ٥ - ٦س_٠ = ٩$ ⇐ $-٦س_٠ = ٤$ ⇐ $س_٠ = -١$

$ه(١) = ١ - ٥ - ٣ = -٦$ ⇐ $(-١٩، -٦)$ نقطة التماس.

4/ ما قيمة $\lim_{س \to ص} \frac{(س - ص)^٣ + (ص - س)^٣}{س - ص} = ١٦$

أ/ -١ ب/ ١ ج/ ٢ د/ -٢

الحل/ $(س-ص)^{٣} = -(ص-س)^{٣}$

$\Leftarrow (س-ص)^{٣} - -(س-ص)^{٣} = ١٦ \Leftarrow ٢(س-ص)^{٣} = ١٦ \Leftarrow (س-ص)^{٣} = ٨$

$\Leftarrow س-ص = ٢ \Leftarrow ١ - \frac{دص}{دس} = ٠ \Leftarrow ١ = \frac{دص}{دس}$

٥/ اذا كان $ص = قاس + ظاس$ ، ما قيمة $\frac{ص'}{ص}$

أ/ ظتاس ب/ قتاس ج/ قاس د/ ظاس

الحل/ $لو_{هـ} ص = لو_{هـ}(قاس + ظاس) \Leftarrow \frac{ص'}{ص} = \frac{قاس ظاس + قا^{٢}س}{قاس + ظاس}$

$\Leftarrow \frac{ص'}{ص} = \frac{قاس(\cancel{ظاس + قاس})}{(\cancel{قاس + ظاس})} = قاس$.

أ.مي حواري

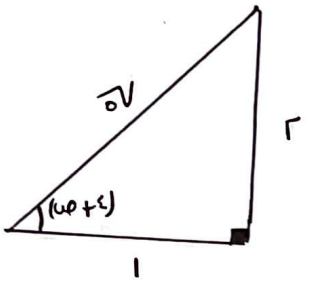
٦/ ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عند $(س=٢)$ حيث $س = ظا(٤+ص)$ ، $(٤+ص)$ حادة :

أ/ $-\frac{١}{٥}$ ب/ $\frac{١}{٥}$ ج/ ٥ د/ -٥

الحل/ عندما $(س=٢) \Leftarrow ٢ = ظا(٤+ص)$

$(الوتر)^{٢} = (٢)^{٢} + (١)^{٢}$ باستخدام فيثاغورس

$(الوتر)^{٢} = ٤ + ١ \Leftarrow الوتر = \sqrt{٥}$



* $س = ظا(٤+ص)$ نشتق لـ س

$١ = قا^{٢}(٤+ص)\, ص'$

$\Leftarrow \frac{١}{قا^{٢}(٤+ص)} = قتا^{٢}(٤+ص) = ص'$

$\Leftarrow \left(\frac{١}{\sqrt{٥}}\right)^{٢} = ص' \Leftarrow \frac{١}{٥} = ص'$

٧/ يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{ك}$ ، $ك > ٠$ فإذا كانت سرعة الجسم بعد (١٠ث) تساوي مثلي سرعته بعد (٥ث) ما قيمة الثابت ك :

أ/ -٢ ب/ ٢ ج/ ٣ د/ ٤

الحل/ $ع(١٠) = ٢ع(٥)$

$ع = \frac{دف}{دن} = ك(ن)^{ك-١}$

$ع(١٠) = ٢ع(٥) \Leftarrow \cancel{ك}(١٠)^{ك-١} = ٢\cancel{ك}(٥)^{ك-١}$ ، $ك \neq ٠$

$\frac{(١٠)^{ك-١}}{٥^{ك-١}} = ٢ \Leftarrow \left(\frac{١٠}{٥}\right)^{ك-١} = ٢ \Leftarrow ٢^{ك-١} = ٢$

$\Leftarrow ك - ١ = ١ \Leftarrow ك = ٢$

٨/ اذا كانت $ص = هـ^{س} + هـ^{-س}$ ، $ص' =$

أ/ $\sqrt{٤-ص^{٢}}$ ب/ $\sqrt{ص^{٢}-٤}$ ج/ $\sqrt{ص^{٢}+٤}$ د/ $\sqrt{ص^{٢}+٢}$

الحل/ $ص' = هـ^{س} \mp هـ^{-س}$

الخيارات كلها تحتوي $ص^{٢}$ لذلك نجد $ص^{٢}$

$(ص)^{٢} = (هـ^{س} + هـ^{-س})^{٢}$

$ص^2 = هـ^{2س} + هـ^{-2س} + 2هـ^{س}هـ^{-س}$

$ص^2 = هـ^{2س} + هـ^{-2س} + 2$ بطرح ٤ من الطرفين

$ص^2 - 4 = هـ^{2س} + هـ^{-2س} + 2 - 4$

$ص^2 - 4 = هـ^{2س} + هـ^{-2س} - 2$

$ص^2 - 4 = (هـ^{س} - هـ^{-س})^2$

$ص^2 - 4 = (ص')^2 \Leftarrow \sqrt{ص^2 - 4} = ص'$

أ.مي حواري

٩/ إذا كان $ص = \frac{1}{\sqrt{س}} + \sqrt{س}$ ، $س > 0$ فإن $4س^3(ص')^2$

أ/ $(س+1)^2$ ب/ $(س-1)^2$ ج/ $(س-1)^3$ د/ $(س-1)^4$

الحل/ $ص = \sqrt{س} + س^{-\frac{1}{2}} \Leftarrow ص' = \frac{1}{2\sqrt{س}} - \frac{1}{2}س^{-\frac{3}{2}}$

$* \frac{1}{س^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{س^3}} = \frac{1}{س\sqrt{س}}$

$ص' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{س}} - \frac{1}{س\sqrt{س}}\right)$

توحيد مقامات.

$ص' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{س}}\left(1 - \frac{1}{س}\right)$

$2\sqrt{س}\,ص' = \frac{(س-1)}{س} \Leftarrow (2س\sqrt{س}\,ص' = (س-1))^2 = 4س^2 \times س(ص')^2 = (س-1)^2$

$\Leftarrow 4س^3(ص')^2 = (س-1)^2$

١٠/ إذا كان $هـ^{ص^{\frac{1}{5}}} + هـ^{س} = \frac{1}{هـ^{ص^{\frac{1}{5}}}} + هـ^{-س}$ ما قيمة $ص'''$ عند $س = 2$

أ/ -240 ب/ 220 ج/ 200 د/ -240

الحل/ $هـ^{ص^{\frac{1}{5}}} + هـ^{س} = \frac{1}{هـ^{ص^{\frac{1}{5}}}} + \frac{1}{هـ^{س}}$ " توحيد مقامات "

$هـ^{ص^{\frac{1}{5}}} + هـ^{س} = \frac{هـ^{س} + هـ^{ص^{\frac{1}{5}}}}{هـ^{س} \times هـ^{ص^{\frac{1}{5}}}} \Leftarrow هـ^{س} \times هـ^{ص^{\frac{1}{5}}} = 1$

$\Leftarrow هـ^{س + ص^{\frac{1}{5}}} = 1$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$س + ص^{\frac{1}{5}} = 0 \Leftarrow [ص^{\frac{1}{5}} = -س]^5 \Leftarrow ص = -س^5$

$ص' = -5س^4$

$ص'' = -20س^3 \Leftarrow ص''' = -60س^2 \Big|_{س=2} = -60 \times 2^2 = -60 \times 4 = -240$

• السؤال الثاني

١/ اذا كان $ق(س^2 + 3س) = س^2\sqrt{هـ(س)}$ ، $س > 0$ أجد $ق(4)$ حيث $هـ'(1) = هـ(1) = 4$

الحل/ عندما $س^2 + 3س = 4 \Leftarrow س^2 + 3س - 4 = 0$

$(س - 1)(س + 4) = 0 \Leftarrow س = 1$ ، $س = -4$

$\times\ س > 0$

$$\text{ق}'(\text{س}^2+3\text{س})(2\text{س}+3) = \text{س}^2 \times \frac{\text{هـ}'(\text{س})}{2\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}} + \sqrt{\text{هـ}(\text{س})} \times 2\text{س} \Big|_{\text{س}=1}$$

$$\text{ق}'(4) \times 5 = \frac{\text{هـ}'(1)}{2\sqrt{\text{ق}(1)}} + \sqrt{\text{هـ}(1)} \times 2$$

$$\Leftarrow 5\,\text{ق}'(4) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{4}$$

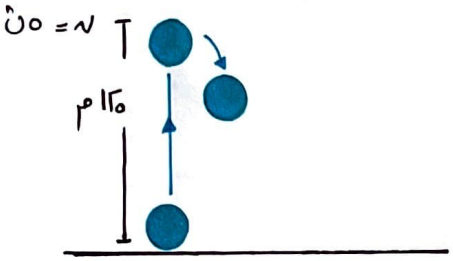
$$5\,\text{ق}'(4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 4$$

$$5\,\text{ق}'(4) = \frac{1}{8} + 4 \Leftarrow 5\,\text{ق}'(4) = \frac{33}{8}$$

$$\text{ق}'(4) = \frac{33}{40}$$

- $8\,\text{هـ}'(1) = 4$
  $\Leftarrow \text{هـ}'(1) = \frac{1}{2}$
- $\text{ق}(\text{س}^2+3\text{س}) = \text{س}^2\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}$
  $\text{ق}(4) = \sqrt{\text{هـ}(1)} = \sqrt{4}$
  $= 2$

٢/ قذف جسم رأسيًا من أرض حسب العلاقة $\text{ف} = 50\text{ن} - 5\text{ن}^2$ حيث ف ارتفاعه فوق نقطة القذف ، (ن) الزمن بالثواني حد :



أ/ أقصى ارتفاع وصله الجسم .

الحل/ $\text{ع} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = 50 - 10\text{ن} = 0$

$50 = 10\text{ن} \Leftarrow \text{ن} = 5\text{ث}$ «زمن الصعود»

$\text{ف}(5) = 50 \times 5 - 5 \times 5^2 = 125\text{م}$

ب/ سرعة ارتطام الجسم بالأرض .

$\text{ف}(\text{ن}) = 0 \Leftarrow \underbrace{(50\text{ن} - 5\text{ن}^2 = 0)}_{-5} \Leftarrow \text{ن}^2 - 10\text{ن} = 0 \Leftarrow \text{ن}(\text{ن} - 10) = 0$

$\text{ن} = 0$ × بداية القرية / $\text{ن} - 10 = 0 \Leftarrow \text{ن} = 10\text{ث}$.

$\text{ع}(10) = 50 - 100 = -50\text{م/ث}$

أو بطريقة ثانية ⇐ بما أن زمن الصعود = زمن الهبوط ⇐ الجسم وصل سطح الأرض بعد $(5+5) = 10\text{ث}$

ج/ سرعة الجسم عندما يكون قطع مسافة ١٣٠م

الحل/ المسافة المقطوعة = ٢ أقصى ارتفاع − ف(ن)

$130 = 2 \times 125 - \text{ف}(\text{ن}) \Leftarrow \text{ف}(\text{ن}) = 250 - 130 = 120\text{م}$

$\text{ف}(\text{ن}) = 120 \Leftarrow 50\text{ن} - 5\text{ن}^2 = 120 \Leftarrow (5\text{ن}^2 - 50\text{ن} + 120 = 0) \div 5$

$\text{ن}^2 - 10\text{ن} + 24 = 0$

$(\text{ن} - 4)(\text{ن} - 6) = 0$

$\text{ن} - 4 = 0 \Leftarrow \text{ن} = 4$ مرفوض ($\text{ن} > 5$ الجسم هابط)

أو $\text{ن} - 6 = 0 \Leftarrow \text{ن} = 6\text{ث}$

$\text{ع}(6) = 50 - 60 = -10\text{م/ث}$

أ.مي

٣/ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{4}\text{س}^4 - 2\text{س}^3 - \text{س} - 1$ وكان $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}''(1+4\text{هـ}) - \text{ق}''(1)}{3\text{هـ}} = -32$

ما قيمة الثابت أ .

الحل/ $\text{ق}'(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^3 - 6\text{س}^2 - 1$

$\text{ق}''(\text{س}) = 3\text{أ}\text{س}^2 - 12\text{س} \Leftarrow \text{ق}'''(\text{س}) = 6\text{أ}\text{س} - 12$

$\text{ق}''(1) = 6\text{أ} - 12$

$\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}''(1+4\text{هـ}) - \text{ق}''(1)}{3\text{هـ}} = \frac{\text{ق}''(1) - \text{ق}''(1)}{3\times 0} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال / $\lim_{\text{هـ}\to 0} \text{ق}''(1+4\text{هـ}) \times \frac{4}{3} = \text{ق}''(1) \times \frac{4}{3} = -3$

$\Leftarrow \frac{6\text{أ} - 12}{3} = -8 \Leftarrow \frac{6\text{أ}}{3} - \frac{12}{3} = -8 \Leftarrow 2\text{أ} - 4 = -8 \Leftarrow 2\text{أ} = -4$

$\Leftarrow \text{أ} = -2$

• السؤال الثالث:

١/ إذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + 3 & \text{س} < 2 \\ \text{أ}\text{س} + \text{جـ} & \text{س} \geq 2 \end{cases}$ اقتران قابلاً للاشتقاق عند (س = ٢)

وكان متوسط تغير هـ(س) على [١، ٥] = ٣ ما قيمة الثوابت أ، ب، جـ

الحل/ $\text{أ} = \frac{13}{4}$ ، $\text{ب} = \frac{-3}{4}$ ، $\text{جـ} = -1$

مكرر (درس قواعد الاشتقاق / خارجي سؤال (٣)).

٢/ إذا كان $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 2\text{ص} = \text{س} + 5$ ، $\text{ع} = \frac{1}{2}\text{ص}^2 + \text{ص} - 2$ جد $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$.

الحل/ $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{1}{2}(1 - 2\text{س})$

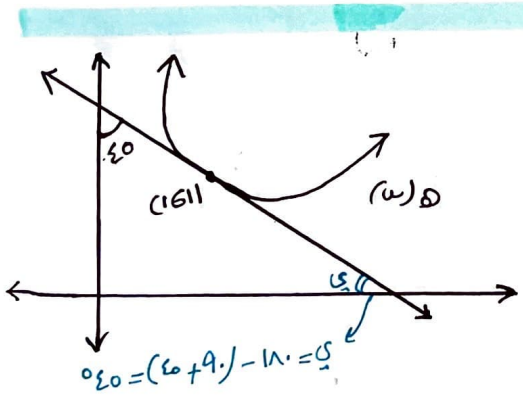
مكرر " الاشتقاق الضمني / أسئلة الخارجي سؤال (٣)).

أ.مي

٣/ إذا كان $\text{جا}\text{ص} + \text{جتا}(2\text{س}) = \text{جتا}(\frac{2\pi}{3})$ أثبت أن $\text{ص}'' - (\text{ص}')^2 \text{ظا}\text{ص} = 4\text{جتا}(2\text{س})\text{قا}\text{ص}$.

مكرر (الاشتقاق الضمني - الأسئلة الخارجية - السؤال الأخير). #

• السؤال الرابع:



١/ إذا كان $\text{ق}(1) = 3$ ، $\text{ق}'(1) = 2$ ، والشكل المرفق يمثل منحنى هـ(س) ، جد قيمة الثابت ب علماً بأن

$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{2\text{ب}\,\text{ق}}{\text{هـ}(1)} + \text{هـ}\times\text{ق} - 4\text{س}\right)\Big|_{\text{س}=1} = 7$

الحل/ من الرسمة $\text{هـ}(1) = 1$

$\text{هـ}'(1) = \text{ميل المماس} = \text{ظا}(180 - 45)$

$\text{هـ}'(1) = \text{ظا}\,135 = -1$

$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{2\text{ب}}{\text{هـ}(1)}\text{ق} + \text{هـ}\,\text{ق} - 4\text{س}\right) = \frac{2\text{ب}}{\text{هـ}(1)}\text{ق}'(\text{س}) + \text{هـ}\,\text{ق}' + \text{ق}\,\text{هـ}' - 4\Big|_{\text{س}=1} = 7$

ثابت

$\Leftarrow \frac{2\text{ب}}{1}\times\text{ق}'(1) + \text{هـ}(1)\,\text{ق}'(1) + \text{ق}(1)\,\text{هـ}'(1) - 4 = 7$

$\Leftarrow 2\text{ب}\times 2 + 1\times 2 + 3\times -1 - 4 = 7 \Leftarrow 4\text{ب} - 5 = 7 \Leftarrow 4\text{ب} = 12$

$\Leftarrow \text{ب} = 3$

٢/ إذا كان س ص = جاس جتاس أثبت أن س ص'' + ٢ص' + ٤ص س = ٠

الحل/ س ص = جاس جتاس

س ص = $\frac{1}{2}$ جا(٢س) نشتق لـ س . ٢س ص = جا(٢س)

س ص' + ص = $\frac{1}{2}$ × ٢جتا(٢س)

س ص' + ص = جتا(٢س) نشتق لـ س

س ص'' + ص' + ص' = -٢جا(٢س) نعوض جا(٢س) = ٢س ص

س ص'' + ٢ص' = -٢ × ٢س ص

س ص'' + ٢ص' + ٤س ص = ٠ #

٣/ اذا كان ق(س) = ١ + ظاس ، هـ(س) = $\frac{أ}{س+٢}$ وكان (هـ∘ق)'($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{3}{8}$ ما قيمة / قيم الثابت أ

الحل/ ق(س) = ١ + ظاس

ق'(س) = قا²س

هـ(س) = $\frac{أ}{س+٢}$

هـ'(س) = $\frac{-أ}{(س+٢)^2}$

• ق($\frac{\pi}{4}$) = ١ + ظا($\frac{\pi}{4}$) = ١ + ١

⇐ ق($\frac{\pi}{4}$) = ٢

• ق'($\frac{\pi}{4}$) = قا²($\frac{\pi}{4}$) = (√٢)² = ٢

(هـ∘ق)'($\frac{\pi}{4}$) = هـ'(ق($\frac{\pi}{4}$)) ق'($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{3}{8}$

هـ'(٢) × ٢ = $\frac{3}{8}$

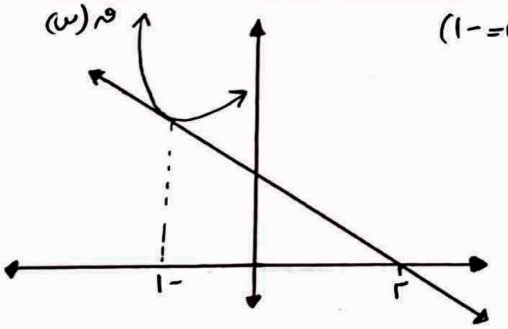
⇐ $\frac{-أ}{\cancel{16}\,8}$ × $\cancel{2}$ = $\frac{3}{8}$ ⇐ -أ = ٣ ⇐ أ = -٣

• السؤال الخامس

١/ الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) والمماس له عند (س = -١)

وكانت $\lim_{س \to -1} \frac{3ق'(س) - \sqrt{3}س}{س^2 + س}$ = ٢√٣ جد قيمة

(ق × ق')'(-١)



الحل/ $\lim_{س \to -1} \frac{3ق'(س) - \sqrt{3}س}{س^2 + س}$ = $\frac{3ق'(-1) + \sqrt{3}}{-1 - 1}$

= $\frac{3ق'(-1) + \sqrt{3}}{0}$

بما أن المقام = ٠ / النهاية موجودة ⇐ البسط = ٠ ⇐ ٣ق'(١) + √٣ = ٠

⇐ ٣ق'(-١) = -√٣ ⇐ ق'(١) = $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ = $\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$ = $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

(-١، ق(-١)) (٢، ٠)

من الرسمة / ميل المماس = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ⇐ ق'(-١) = $\frac{ق(-1) - 0}{-1 - 2}$ ⇐ $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ × -٣ = ق(-١)

⇐ $\frac{3}{\sqrt{3}}$ = ق(-١) ⇐ ق(-١) = $\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ = √٣

أ.مي حواري

$\lim_{س \to -1} \frac{3ق'(س) - \sqrt{3}س}{س^2 + س}$ = $\lim_{س \to -1} \frac{3ق''(س) - \sqrt{3}}{2س + 1}$ = $\frac{3ق''(-1) - \sqrt{3}}{-2 + 1}$ = ٢√٣

عن طريق لوبيتال

$٣\,\text{ق}'(-١) - \sqrt{٣} = -٢\sqrt{٣} \Leftarrow ٣\,\text{ق}'(-١) = -\sqrt{٣} \Leftarrow \text{ق}'(-١) = \frac{-\sqrt{٣}\times\sqrt{٣}}{٣\times\sqrt{٣}} = \frac{-٣}{٣\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

المطلوب/ $(\text{ق}\times\text{ق})'(-١) = \text{ق}(-١)\,\text{ق}'(-١) + \text{ق}(-١)\,\text{ق}'(-١)$

$= \sqrt{٣}\times\frac{-١}{\sqrt{٣}} + \left(\frac{-١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢} = -١ + \frac{١}{٣} = \frac{-٢}{٣}$

٢/ اذا كان $\text{ص} = (١+\text{جا}^{٢}\text{س})(١+\text{جا}^{٤}\text{س})(١+\text{جا}^{٨}\text{س}) + \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{جا}^{١٦}\text{س}$ أثبت أن $\text{ص}' = ٢\,\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ظا}\,\text{س}$

الحل/ $\text{ص} = (١+\text{جا}^{٢}\text{س})(١+\text{جا}^{٤}\text{س})(١+\text{جا}^{٨}\text{س}) + \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{جا}^{١٦}\text{س}$ «توحيد مقامات»

$\text{ص} = \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}\,(١+\text{جا}^{٢}\text{س})(١+\text{جا}^{٤}\text{س})(١+\text{جا}^{٨}\text{س}) + \text{جا}^{١٦}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$\text{ص}\,\text{جتا}^{٢}\text{س} = (١-\text{جا}^{٢}\text{س})(١+\text{جا}^{٢}\text{س})(١+\text{جا}^{٤}\text{س})(١+\text{جا}^{٨}\text{س}) + \text{جا}^{١٦}\text{س}$

فرق مربعين

$\text{ص}\,\text{جتا}^{٢}\text{س} = (١-\text{جا}^{٤}\text{س})(١+\text{جا}^{٤}\text{س})(١+\text{جا}^{٨}\text{س}) + \text{جا}^{١٦}\text{س}$

فرق مربعين

$\text{ص}\,\text{جتا}^{٢}\text{س} = (١-\text{جا}^{٨}\text{س})(١+\text{جا}^{٨}\text{س}) + \text{جا}^{١٦}\text{س}$

$\text{ص}\,\text{جتا}^{٢}\text{س} = ١ - \cancel{\text{جا}^{١٦}\text{س}} + \cancel{\text{جا}^{١٦}\text{س}} \Leftarrow \text{ص} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\text{ص}' = ٢\,\text{قا}\,\text{س}\,\text{قا}\,\text{س}\,\text{ظا}\,\text{س} \Leftarrow \text{ص}' = ٢\,\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ظا}\,\text{س}$ #

أ.مي حواري

٣/ إذا كان $\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+\text{ص}) + ١ = \text{جتا}(\text{س}\,\text{ص})$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $(١،\text{ن})$

الحل/ نشتق لـ س

$\text{هـ}^{\text{ص}} * \frac{(١+\text{ص}')}{(\text{س}+\text{ص})} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+\text{ص})\times\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ص}' = -\text{جا}(\text{س}\,\text{ص})(\text{س}\,\text{ص}' + \text{ص})\Big|_{(١،\text{ن})}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{\text{ن}}\frac{(١+\text{ص}')}{(١+\text{ن})} + \text{لو}_{\text{هـ}}١\times\cancel{\text{هـ}^{\text{ن}}\text{ص}'} = -\cancel{\text{جا}(\text{ن})}(\text{ص}' + \text{ن})$

$\Leftarrow ١ + \text{ص}' = \text{ن} \Leftarrow \text{ص}' = -١$

• السؤال السادس

١/ اذا كان $\text{ص} = \sqrt[\text{س}]{\text{هـ}} + \text{ب}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\sqrt{\text{س}}) - \cancel{\text{ب}\,\text{لو}_{\text{هـ}}١}$ ، ما قيمة ب التي تجعل $\text{ص}' = \text{هـ}$

حيث هـ العدد النيبري ، عندما $\text{س} = ١$

الحل/ $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}} + \frac{١}{٢}\text{ب}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ص}' = \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}}\times\frac{-١}{\text{س}^{٢}} + \frac{\text{ب}}{٢\text{س}} \Leftarrow \text{هـ} = \text{هـ}\times -١ + \frac{\text{ب}}{٢}$

$\Leftarrow ٢\text{هـ} = \frac{\text{ب}}{٢}$

$\Leftarrow ٤\text{هـ} = \text{ب}$

٢/ اذا كان $س ص = (س + ص)^٤$ أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{٣س ص - ص^٤}{س^٤ - ٣س ص}$

مكرر (سؤال (20) أسئلة الوحدة الأولى) . #

٣/ جد معادلة العمودي للمنحنى $٢ + لو_هص \times لو_هس = س^٢ + ص$ عند النقطة التي احداثها السيني = ١ ، س ، ص > ٢ :

الحل/ $٢ + لو_هص \times لو_هس = س^٢ + ص \Big|_{س=١}$

$٢ + \cancel{لو_هـ١} \times لو_هص = ١ + ص \Leftarrow ٢ = ١ + ص \Leftarrow ص = ١ \Leftarrow (١،١)$ نقطة التماس

$٢ + لو_هص \times لو_هس = س^٢ + ص$ نشتق لـ س

$لو_هص \times \frac{١}{س} + (لو_هس) \times \frac{ص'}{ص} = ٢س + ص' \Big|_{(١،١)}$

$\cancel{لو_هـ١} \times ١ + \cancel{لو_هـ١} \times \frac{ص'}{١} = ٢ + ص' \Leftarrow ث = ٢ + ص' \Leftarrow -٢ = ص' =$ ميل المماس

ميل العمودي $= \frac{-١}{\text{ميل المماس}} = \frac{١}{٢}$

معادلة العمودي/ $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ١ = \frac{١}{٢}(س - ١)$

أ.مي حواري

هناك أمر، تخاف أن تبدأ به الآن، لأنّه يحتاج إلىٰ سنوات لإتمامه، وتخاف أن تكون كَبُرت عُمرًا، ومضىٰ الوقت عليك، يا فَتىٰ، ستجيء تلك السنوات، وستبلغ ذاك العُمر، وستصل الرَّقم الذي في ذهنك الآن، -إن شاء الله- علىٰ الأقل صل إليه وأنت مُحقّق الأمر الذي بدأت به اليوم، تبلغه وأنت مُنجز فكرتك، مُختَرِقٌ جدار خوفك هذا! لَم يَفُتكَ الطّريق بعد..

روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/kamel1

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath