

Exercice 1

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable

pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

- 1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
b) Étudier les variations de la suite (u_n) .
c) Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
- 3) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 1 - u_n$.
 - a) Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k .
 - b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$.
 - c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.