

## Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie, pour tout couple  $(x, y)$  de l'ouvert  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , par :

$$f(x, y) = (x + y) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

1) Montrer que, pour tout couple  $(x, y)$  de  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , on a :

$$f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}.$$

2) Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

3) Montrer que  $f$  possède une infinité de points critiques et les déterminer.

4) Déterminer les dérivées partielles secondes de  $f$  et vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de  $f$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

5) a) Comparer les réels  $(x + y)^2$  et  $4xy$ .

b) En déduire que  $f$  admet sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.

6) Soit  $g$  la fonction définie pour tout  $(x, y)$  de  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , par :

$$g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln(x) - \ln(y).$$

Montrer que :  $\forall (x, y) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ ,  $g(x, y) \geq 2\ln(2)$ .