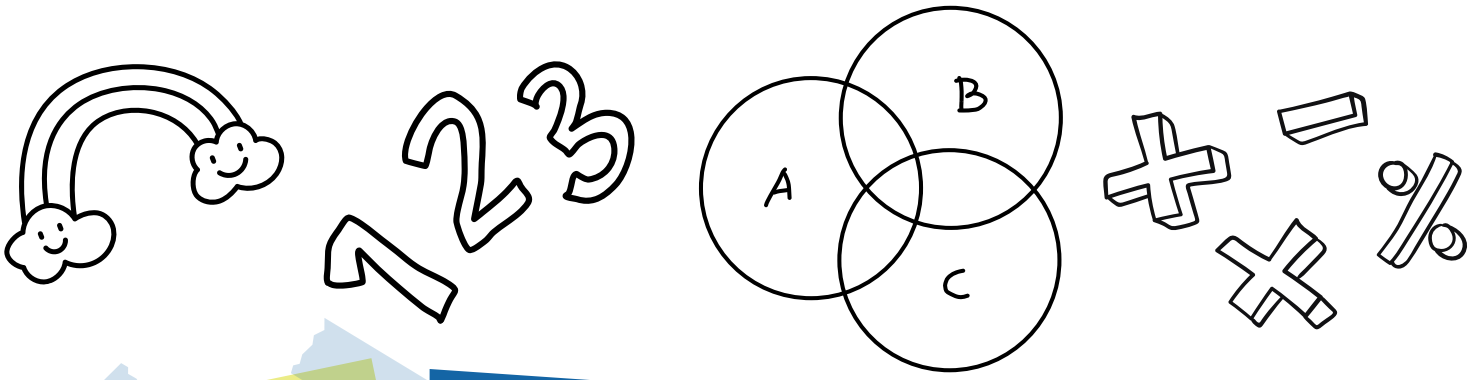


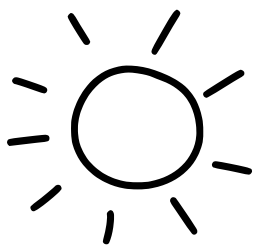
2025
2026
الفصل الثاني

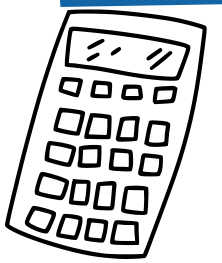
حلـــــول الكـــامـــل

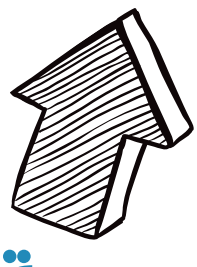
تـــوجـــيهي
صنـــــاعي

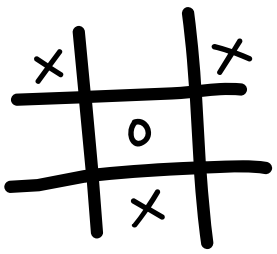
الوحدة
الرابـعة

إعداد: ميّ عمار حوّاري





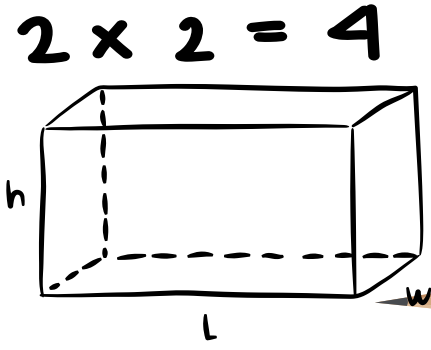


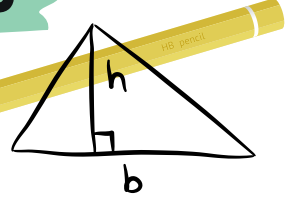


موقع قطرة التعليمي

Qatraedu.com

+972 59-276-7085





مـقــدمـــــــة

إيماناً منا بضـرورة توفير أفضـل المصـادر التعليمية لطلبتنا في مرحلة الثانوية العامة، يسّـر فريق موقع قطرة التعليمي تقديم الإجابات النموذجية لـ "كراسة الكامل" (تصنيف أسئلة السنوات السابقة).

تأتي هذه الحلول ضمن إطار جهودنا المستمرة في موقع قطرة التعليمي، الذي تأسس برؤية طموحة تهدف إلى تزويد طلاب التوجيهي بتعليم عالي الجودة، لا سيما في مادة الرياضيات، مستخدمين أحدث الأساليب والوسائل التعليمية العالمية.

وقد تم إعداد هذه الكراسة خصيصاً لطلاب الفرع **الصناعي** ، لتتضمن حلولاً مفصلة وشرحاً وافياً لكل الأسـئلة، انطلاقاً من إيماننا بأن التعلم الرقمي يمنح الطالب مرونة الوصـول إلى المعرفة في أي وقت ومن أي مكان.

وإننا في موقع قطرة التعليمي، نؤمن بأن وراء كل إنجاز عظيم جنوداً مجهولين؛ لذا نتقدم بأسـمى آيات الشـكر والتقدير للمعلّمة الفاضـلة **ميّ عمار حوّاري**، عضـو فريقنا المتميز، التي سـخرت وقتها وجهدها وخبرتها العميقة في إعداد هذه الحلول بدقة وإتقان. إن خبرتها الواسـعة تجلت في أسـلوب الشـرح المبسـط والواضـح الذي يضـع مصـلحة الطالب وتفوقه الأكاديمي في المقام الأول؛ فجزيل الشـكر لها، ونسـأل الله أن يجعل هذا العمل في ميزان حسناتها.

أتمنى أن تكون هذه الكراسـة عونًا لكم في رحلتكم نحو النجاح، وأن تسـاهم في تحقيق التفوق والتميز الذي تسعون إليه.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح الدائم.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

إهـــــــداء

إلى صاحبةُ القلبِ الأحنّ،

والأثر الأعمق،

إلى من كان حضورها فرقًا،

وكلماتها أثرًا لا يزول،

من غرست بداخلي حلمًا لا يزال يكبر،

ملهمتي وقدوتي... نجمتي اللامعة،

معلمتي الغالية **رولا بطة**، حفظكِ الله ورعاكِ دائمًا

أ. ميّ عمار حوّاري

روابط مهمة

رابط تحميل كراسة الكامل المرتبطة بهذه الحلول

https://q.qatraedu.com/sinaae-kamel4

لا تفتح هذا الرابط ولا تمسح الباركود بالأسفل

https://q.qatraedu.com/tlqatramath

نصائح مهمة لكيفية دراسة الرياضيات؟

عزيزي الطالب/ عزيزتي الطالبة، إليك بعض النصائح التي ستساعدك على التفوق في دراستك لهذه المادة وتحقيق أفضل النتائج:

1. **إخلاص النية لله.**
2. **التوكل على الله** بالأخذ بجميع أسباب التفوق، والدعاء والالحاح فيه فهو من أعظم أسلحة المسلم.
3. **فهم الأساسيات أولًا:** تأكد من أنك تفهم الأساسيات بشكل جيد. ولضمان التمكن من الأساسيات فقد وفرنا دورة مجانية عبر موقع قطرة التعليمي.
4. **التدريب المستمر باستخدام الورقة والقلم:** الحل المتكرر هو الطريق إلى الإتقان، حل المسائل بانتظام وبشكل يومي سيعزز من فهمك ويساعدك على استيعاب المفاهيم بشكل أعمق.
5. **افهم المسألة قبل الحل:** لا تتسرع في حل المسألة دون فهم كامل لمتطلباتها، خذ وقتك في قراءة السؤال جيدًا، وفهم المطلوب قبل الشروع في الحل، التسرع قد يؤدي إلى أخطاء غير ضرورية.
6. **حل المسائل بطريقة منظمة:** نظم خطوات الحل بطريقة واضحة ومنهجية، تدوين الخطوات بتسلسل منطقي يساعدك على متابعة الحل والتعرف على أي خطأ قد يحدث بسهولة، هذا الأسلوب يعزز أيضًا من فرصك في الحصول على درجات كاملة.
7. **راجع بانتظام:** خصص وقتًا لمراجعة ما تعلمته بانتظام، ولا تترك الأمور تتراكم حتى اقتراب موعد الامتحانات، المراجعة المستمرة تسهل تذكر المعلومات وتجعلك أكثر استعدادًا للامتحان.
8. **لا تخجل من طلب المساعدة:** إذا واجهت صعوبة في فهم مفهوم معين أو في حل مسألة ما، لا تتردد في طلب المساعدة من معلمك أو زملائك، الحوار والتفاعل مع الآخرين قد يفتح لك آفاقًا جديدة لفهم المادة.
9. **حافظ على هدوئك وثقتك بنفسك:** التوتر قد يؤثر سلبًا على أدائك، حافظ على هدوءك وثقتك بنفسك أثناء الدراسة وفي الامتحانات، تذكر أن النجاح في الرياضيات يعتمد على الاستمرارية والعمل الجاد، وليس على الحفظ فقط.

10. **استعد للامتحانات بالتحضير المبكر:** لا تنتظر حتى اللحظة الأخيرة، ابدأ في التحضير للامتحانات قبل وقت كافٍ، وضع خطة دراسية تغطي جميع الوحدات بشكل متوازن، قم بحل أسئلة الامتحانات السابقة المرفقة في هذه الكراسة، وتأكد من مراجعة الحلول بعد الانتهاء.
11. **قم بتحليل الأخطاء:** عند ارتكاب خطأ في حل مسألة، لا تتجاهله. بدلاً من ذلك، عد إليه وحاول فهم سبب الخطأ وكيف يمكنك تجنبه في المستقبل، التعلم من الأخطاء يُعد أحد أفضل الطرق لتطوير مهاراتك الرياضية.
12. **اجعل لك دفتراً خاصاً لتدوين كل ما يتم دراسته واحرص على تدوين الملاحظات المهمة:** أثناء حل المسائل أو مشاهدة الفيديوهات، احرص على تدوين كل شيء لأنه سيكون من الصعب مشاهدة الفيديوهات في يوم واحد مثل يوم الامتحان، وكتابة الملاحظات المهمة تساعدك على تنظيم أفكارك وتذكر النقاط المهمة عند المراجعة لاحقًا.

نتمنى لك التوفيق والنجاح في رحلتك الدراسية، ونتطلع لأن تكون هذه الكراسة عونًا لك في تحقيق أهدافك في مادة الرياضيات. تذكر أن كل مجهود تبذله اليوم سيثمر في المستقبل.

أ. محمد عزمي القطراوي

مدير موقع قطرة التعليمي

الدرس الأول | التكامل غير المحدود

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2019 دور أول / إذا كان م(س) و هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س) وكان ل(س) = م(س) - هـ(س) ما قيمة ل'(٥)

أ/ صفر ب/ ٥ ج/ -٥ د/ ق(٥)

الحل / م(س) و هـ(س) اقترانين أصليين لـ ق ⇐ م(س) = هـ(س) + ج

ل(س) = م(س) - هـ(س) ⇐ ل(س) = ج ، ل'(س) = ٠

ل'(٥) = ٠ ⇐ ل'(٥) = ٠ P

• 2019 دور ثاني / إذا كان ∫ (ق(س) - ٥) دس = ٢س^٣ + ٨س + ٣ ، ق(١) = ٦ ما قيمة الثابت P

أ/ ١٢ ب/ -١ ج/ صفر د/ -٢

الحل / ∫ (ق(س) - ٥) دس = (٢س^٣ + ٨س + ٣)'

ق(س) - ٥ = ٦س^٢ + ٨ ⇐ ق(١) - ٥ = ٦ + ٨

⇐ ٦ - ٥ = ٦ + ٤ ⇐ ١ - ٤ = ٦ ⇐ ٦ = -٣ ⇐ P = -١ ب

• 2019 دور ثالث / إذا كان ∫ ق'(س) دس = ل٥(س) + س^٤ + ج ما قيمة ق'(١)

أ/ ١ ب/ ٣ ج/ ١ + ج د/ ٣ + ج

الحل / ∫ ق'(س) دس = ل٥(س) + س^٤ + ج ⇐ ق(س) = ١/٥ + ٢س

ق(١) = ١ + ٢ ⇐ ق(١) = ٣ ب

• 2020 دور أول / إذا كان ق(١) = ٧ ، ∫ (م(س) + ٢) دس = س^٣ + ب س^٢ + ٩ حيث م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س) المتصل ، ما قيمة الثابت ب

أ/ ٣ ب/ -٣ ج/ ١/٢ د/ -٣/٢

الحل / م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) المتصل ⇐ م(س) = ق(س)

∫ (م(س) + ٢) دس = (س^٣ + ب س^٢ + ٩)'

م(س) + ٢ = ٣س^٢ + ٢ب س ⇐ م(س) = ٣س + ٢ب

ق(س) = ٦س + ٢ب

⇐ ق(١) = ٦ + ٢ب ⇐ ٧ = ٦ + ٢ب ⇐ ١/٢ = ٢ب ⇐ ١/٤ = ب ج

• 2020 دور أول / إذا كان م(س) و ل(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س) وكان ق(٢) = ٢ ، ق(٢) = ٦ ما قيمة (م - ل)'(٢) =

أ/ ٤ ب/ -٤ ج/ -٦ د/ -٢

الحل/ م(س) و ل(س) اقترانيه أصليه لـ ق(س) المتصل ← م(س) = ل(س) = ق(س)

← (م - ل)'(٢) = (ق(س) - ل(س))'(٢) = ق(٢) - ل(٢)

= ق(٢) - ق(٢)

= ٢ - ٦ = -٤ ب

• 2020 دور ثاني/ إذا كان ق(س) اقتران متصلاً وكان ∫ ق(س) دس = ٢س^٣ - ٣س + ٥ ، ما قيمة ق(-٢) =

أ/ ٢٤ ب/ -٥ ج/ ٥ د/ -٤

الحل/ (∫ ق(س) دس = ٢س^٣ - ٣س + ٥) ← ق(س) = ٦س^٢ - ٣

ق(س) = ١٢س

ق(-٢) = ١٢ × -٢ = -٢٤ د

• 2020 دور ثالث/ إذا كان ∫ (٣س - ١) ق(س) دس = س^٣ + س^٢ - س + ج وكان ق(س) اقتران متصلاً ، ما قيمة ق(٣)

أ/ ١٤٤ ب/ ٩٨ ج/ ٥ د/ ٦

الحل/

(∫ (٣س - ١) ق(س) دس = س^٣ + س^٢ - س + ج)

(٣س - ١) ق(س) = ٣س^٢ + ٢س - ١ ← ق(س) = (٣س^٢ + ٢س - ١) / (٣س - ١)

ق(س) = [(٣س - ١)(٦س + ٢) - (٣س^٢ + ٢س - ١)(٣)] / (٣س - ١)^٢

← ق(٣) = [(٨ × ٢٠) - ٢(٣٢)] / (٥)^٢ = (١٦٠ - ٦٤) / ٢٥ = ٩٦ / ٢٥ = ١٤٤ أ

• 2021 دور أول/ اذا كان ∫ (أس + ب أس) ق(س) دس = ٣ - س^٣ + ج فما قاعدة الاقتران ق(س)

أ/ ٣ - س^٢ ب/ -٣س ج/ ٣س د/ س^٣ - ٣س

الحل/ (∫ (أس + ب أس) ق(س) دس = ٣ - س^٣ + ج)

(أس + ب أس) ق(س) = -٣س ← ق(س) = -٣س ب

• 2022 دور أول/ إذا كان م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) المتصل وكان م(س) = ب س^٣ + س^٢ + ١ وكان ق(١) = -٧ ، ما قيمة الثابت ب

أ/ -٦ ب/ -٣ ج/ ٥ د/ ٢٤

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) المتصل ← م(س) = ق(س)

م(س) = ٣ب س^٢ + ٢س ← ق(س) = ٣ب س^٢ + ٢س

م(١) = ٣ب + ٢ ⇐ -٧ = ٣ب + ٢ ⇐ $\frac{-٩}{٣} = \frac{٣ب}{٣}$ ⇐ ب = -٣ ب

• 2022 دور ثاني/ إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران المتصل ق(س) حيث ق(س) = ٤س^٣ - ٢ ما قيمة مَ(-١)

أ/ -٢٤ ب/ -١ جـ/ ٣ د/ ١٢

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ ق المتصل ⇐ مَ(س) = ق(س)

ق(س) = ٤س^٣ - ٢ ⇐ مَ(س) = ٤س^٣ - ٢

مَ(س) = ١٢س^٢ ⇐ مَ(-١) = ١٢(-١)^٢ = ١٢ د

• 2025 دور أول/ أي من الاقترانات التالية يعتبر اقتراناً أصلياً لـ ق(س) = $\frac{٤س^٣ + ٢هـ^{٢س}}{س^٤ + هـ^{٢س}}$

أ/ لو(س^٤ - هـ^{٢س}) ب/ لو(س^٤ + هـ^{٢س}) جـ/ لو(س^٣ - هـ^{س}) د/ لو(س^٣ + هـ^{٢س})

الحل/ نشتق الضابط:

✗ أ/ لو(س^٤ - هـ^{٢س}) ⇐ مَ(س) = $\frac{٤س^٣ - ٢هـ^{٢س}}{س^٤ - هـ^{٢س}}$ ≠ ق(س)

✓ ب/ لو(س^٤ + هـ^{٢س}) ⇐ مَ(س) = $\frac{٤س^٣ + ٢هـ^{٢س}}{س^٤ + هـ^{٢س}}$ = ق(س)

ومنه ⇐ م(س) = لو(س^٤ + هـ^{٢س}) اقتران أصلي لـ ق(س) ب

• 2025 دور ثاني/ إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق على ح وكان ∫ ق(س) دس = س^٣ + ٢س^٢ + ٩س + ٩

وكان قَ(١) = ٩ ما قيمة الثابت ٩

أ/ ١ ب/ ٣ جـ/ $\frac{٣}{٢}$ د/ -١

الحل/ ∫ (ق(س) + ٢) دس = س^٣ + ٢س^٢ + ٩س + ٩

نشتق ⇐ ق(س) + ٢ = ٣س^٢ + ٤س + ٩

قَ(س) = ٦س + ٩

قَ(١) = ٦ + ٩ ⇐ $\frac{٩}{-٦} = \frac{٦+٩}{-٦}$ ⇐ $\frac{-٣}{٢} = \frac{-٣}{٢}$ ⇐ ٩ = $\frac{٣}{٢}$ جـ

• 2025 دور ثالث/ اذا كان ق(س) متصلاً وكان ∫ ق(س) دس = س^٣ - ٣س + ٥ ما قيمة ق(٣) + ق(١)

أ/ صفر ب/ ٣ جـ/ ٦ د/ ٩

الحل/ ∫ ق(س) دس = س^٣ - ٣س + ٥ ⇐ ق(س) = ٣س^٢ - ٣ ⇐ قَ(س) = ٦س

قَ(٣) = ٣(٣)^٢ - ٣ = ٣×٣ - ٣ = ٦ - ٣ = ٣

هَ(١) = ٦×١ = ٦

ه(٢) + هَ(١) = ٣ + ٦ = ٩ S

• 2025 دور ثالث / ما قيمة $\int \frac{\text{حاس حتاس}}{\text{س جا}(٢\text{س})} \, ds$

أ/ $\frac{١}{٢\text{س}}$ ب/ $\frac{١}{٢}$ لوس + جـ جـ/ صفر د/ $\frac{١}{\text{س}}$ + جـ

الحل/ $\frac{\text{حاس حتاس}}{\text{س جا}(٢\text{س})} = \frac{\text{جاس حتاس}}{\text{س} \times ٢ \text{ جاس حتاس}} = \frac{١}{٢\text{س}}$

$\int \frac{\text{حاس حتاس}}{\text{س جا}(٢\text{س})} ds = \int (\frac{١}{٢\text{س}}) \frac{ds}{\text{س}}$ أ $\frac{١}{٢\text{س}}$

• 2020 سلفية / إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً لـ ه(س) المتصل ما قيمة $\int ٢\text{م}(\text{س}) \text{ه}(\text{س}) \, ds$

أ/ $(\text{م}(\text{س}))^٢ + \text{جـ}$ ب/ م(س) + جـ جـ/ ه(س) + جـ د/ م(س) ه(س) + جـ

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ ه(س) ⇐ مَ(س) = ه(س)

⇐ $\int ٢\text{م}(\text{س}) \text{ه}(\text{س}) ds = \int ٢\text{م}(\text{س}) \text{مَ}(\text{س}) ds = \int (\text{م}^٢(\text{س}))' ds = \text{م}^٢(\text{س}) + \text{جـ}$

طريقة ٢ / "بالتعويض" $\int ٢\text{م}(\text{س}) \text{مَ}(\text{س}) ds = \text{ل}$

نفرض م(س) = ص ⇐ مَ(س) ds = dص ⇐ $ds = \frac{d\text{ص}}{\text{مَ}(\text{س})}$

⇐ $\text{ل} = \int ٢\text{ص} \times \text{مَ}(\text{س}) \frac{d\text{ص}}{\text{مَ}(\text{س})} = \int ٢\text{ص} \, d\text{ص} = \text{ص}^٢ + \text{جـ}$

$= \text{م}^٢(\text{س}) + \text{جـ}$ أ

• 2020 مديرية أريحا / إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً لـ ه(س) ما قيمة $\int (\text{م}(\text{س}) + ٣)' + \text{ه}(\text{س})$

أ/ ٢م(س) ب/ ٢ه(س) جـ/ ه(س) د/ م(س) + ه(س)

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ ه(س) ⇐ مَ(س) = ه(س)

$\int (\text{م}(\text{س}) + ٣)' + \text{ه}(\text{س}) = \text{مَ}(\text{س}) + \text{ه}(\text{س}) = \text{ه}(\text{س}) + \text{ه}(\text{س}) = ٢\text{ه}(\text{س})$ ب

• 2022 سلفية / اذا كان ه(س) اقتران متصلاً و ضد ه(س) إذا علمت أن

$\int (\text{ه}(\text{س}) \text{ حتاس} + \text{ه}(\text{س}) \text{ جاس}) ds = \text{جاس} + \text{جـ}$

أ/ جاس ب/ حتاس جـ/ - جاس د/ - حتاس

الحل/ $(\int \text{ه}(\text{س}) \text{ حتاس} + \text{ه}(\text{س}) \text{ جاس} \, ds = \text{جاس} + \text{جـ})'$

ه(س) جاس + ه(س) حتاس = حتاس

ه(س) (جاس + حتاس) = حتاس ⇐ ه(س) = حتاس ب

• 2022 قباطية / إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين لـ م(س) وكان م(٥) = ٩ ، قـ(٥) = ٤
ما قيمة (٥م - ٣هـ)'(٥)

أ/ صفر ب/ -٨ جـ/ ٨ د/ ١٨

الحل/ (٥م - ٣هـ)'(٥) = ٥مَ(٥) - ٣هَ(٥)
= ٥م(٥) - ٣م(٥)
= ٢م(٥) = ٢ × ٩ = ١٨ د

• ملاحظة/ م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين لـ م(س) ⟵ مَ(س) = هَ(س) = م(س)

• 2022 طولكرم/ اذا كان م(س) اقترانًا متصلًا وكان ∫ م(س) دس = هـ^(جا(٣س)) - لو(حتا س) - ١
ما قيمة م(٥)

أ/ ١ ب/ ٣ جـ/ هـ د/ ٣هـ

الحل/ (∫ م(س) دس = هـ^(جا(٣س)) - لو(حتا س) - ١)
م(س) = هـ^(جا(٣س)) × ٣ حتا(٣س) - (-جا س / حتا س)
م(٠) = هـ^(جا(٠)) × ٣ حتا(٠) + حا(٠) / حتا(٠) ⟵ م(٠) = هـ × ٣ × ١ + ٠/١
م(٠) = ١ × ٣ + ٠
م(٠) = ٣ ب

• 2023 شمال الخليل/ إذا كان ∫ (قـ(س) + س^٤) دس = ٢س^٣ + جـ س + ٢ ما قيمة قـ(١)

أ/ ٣ ب/ ٦ جـ/ ١٠ د/ ١٢

الحل/ (∫ (قـ(س) + س^٤) دس = ٢س^٣ + جـ س + ٢)
قـ(س) + س^٢ = ٦س^٢ + جـ
قـ(س) + ٣س = ١٢س ⟵ قـ(١) + ٣ = ١٢ ⟵ قـ(١) = ١٠ جـ

• 2024 نابلس/ إذا كان ∫ (قـ(س) + ١) دس = ٣س^٢ + جـ وكان قـ(١) = ٩ ما قيمة الثابت م

أ/ ٥ ب/ ٩ جـ/ ٧ د/ ١٠

الحل/ ∫ قـ(س) + ١ دس = ٣س^٢ + جـ ⟵ قـ(س) + ١ = ٣م س^٢
قـ(١) + ١ = ٣م
٩ + ١ = ٣م ⟵ ١٠/٣ = ٣م/٣ ⟵ م = ٥ م

• خارجي/ اذا كان الاقتران م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) المتصل في مجاله حيث
∫ (ق(س) + (٤ب س^٣ - ١٢) / (س - ١)^٢) دس = ٨ / (س - ١) + م(س) ما قيمة الثابت ب

أ/ ١ ب/ -١ جـ/ ٢ د/ -٢

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) ⇐ م(س) = ق(س)

$\int ق(س) = \int \frac{٤ن^{٣}-١٢}{(س-١)^{٢}} \, دس = \frac{-٨}{س-١} + م(س)$

$ق(س) + م(س) = \frac{٤ن^{٣}-١٢}{(س-١)^{٢}} \Leftarrow م(س) + \frac{-٨}{(س-١)^{٢}}$

$\frac{٤ن^{٣}-١٢}{(س-١)^{٢}} = \frac{-٨}{(س-١)^{٢}} \Leftarrow ٤ن^{٣}-١٢ = -٨ \Leftarrow ٤ن^{٣} = ٤ \Leftarrow ن^{٣} = ١ \Leftarrow ن = ١$ م

- **القسم الثاني/ أجب عن الأسئلة التالية:**
- 2021 دورة ثاني/ إذا كان ق(س) = لو$_{هـ}$(س + $\sqrt{٤س+٢}$) دس و ما قيمة قَ(٢)

الحل/ ق(س) = لو$_{هـ}$س + $\sqrt{٤س+٢}$ دس

$قَ(س) = \frac{١}{س} + \sqrt{٤س+٢} \Leftarrow قَ(س) = \frac{-١}{س^{٢}} + \frac{٤}{٢\sqrt{٤س+٢}}$

$قَ(٢) = \frac{-١}{٢^{٢}} + \frac{٤}{٢\sqrt{٨+٢}} = \frac{-١}{٤} + \frac{٤}{٦} = \frac{-٣}{١٢} + \frac{٨}{١٢} \Leftarrow قَ(٢) = \frac{٥}{١٢}$

- 2020 مديرية نابلس/ إذا كان الاقترانان م(س) و ك(س) اقترانين أصليين لـ ق(س) وكان م(س) = س^{٤} - ٤س + ٦ و ك(٣) = ٤ و ما قيمة ك(١)

الحل/ م(س) و ك(س) اقترانين أصليين لـ ق(س)

م(س) = س^{٤} - ٤س + ٦ ⇐ ك(س) = س^{٤} - ٤س + جـ

ك(٣) = ٣^{٤} - ٤×٣ + جـ

٤ = ٩ - ١٢ + جـ ⇐ ٤ = -٣ + جـ ⇐ جـ = ٧

⇐ ك(س) = س^{٤} - ٤س + ٧

ك(١) = ١ - ٤ + ٧ = -٣ + ٧ = ٤ ⇐ ك(١) = ٤

- خارجي/ إذا كان $\int$ ق(س) دس = ظاس - جاس + ٣ و ما قيمة ق($\frac{\pi}{٤}$) - قَ($\frac{\pi}{٤}$)

الحل/ $\int ق(س) دس = ظاس - جاس + ٣$

ق(س) = قا^{٢}س - ٢جاس جتاس ⇐ ق(س) = قا^{٢}س - جا(٢س)

قَ(س) = ٢قاس × قاس ظاس - ٢جتا(٢س)

قَ(س) = ٢قا^{٢}س ظاس - ٢جتا(٢س)

ق($\frac{\pi}{٤}$) = ٢قا^{٢}($\frac{\pi}{٤}$) ظا($\frac{\pi}{٤}$) - ٢جتا($\frac{\pi}{٢}$) = ٢($\sqrt{٢}$)^{٢} × ١ - ٢ × ٠ = ٤

المطلوب/ ق($\frac{\pi}{٤}$) - قَ($\frac{\pi}{٤}$) = ٤ - ١ = ٣

• خارجي/ إذا كان $\int ق(س)\,ds = ب س^2 + جـ س + د$ وكان $ق(1) = 19$ و $ق(\frac{1}{2}) = 36$ جد قيمة كل من الثابتة $ب$ و $د$

الحل/ $\frac{ق(1)}{2} = 1 \Leftarrow ق(1) = 2$ و $\frac{ق(\frac{1}{2})}{6} = \frac{36}{6} \Leftarrow ق(\frac{1}{2}) = 6$

$\int ق(س)\,ds = أ س^3 + ب س^2 + جـ س + د$

$ق(س) = 3أ س^2 + 2ب س + جـ$

$ق(1) = 3أ + 2ب + جـ = 2$

$ق(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}أ + ب + جـ = 6$

$3أ + 4ب + 4جـ = 24$

$3أ + 4ب + 4جـ = 24$

$-3أ - 2ب - 2جـ = -4$

$2ب + 2جـ = 20$

$ب + جـ = 10$ ← (1)

$3أ + 2ب + جـ = 4$ ← (2)

(2) − (1): $3أ + ب = -6$ ← (3)

نعوض (1) في (3): $3أ + 10 - جـ = -6$

$3أ - جـ = -16$ ← (4)

نعوض $أ = -2$ في (1): $-6 + ب + جـ = 2$

$ب + جـ = 8$ ← (5)

(4) + (5): $ب = -8$

$ق(س) = -2س^3 - 8س^2 + 19س + 1$

• خارجي تفوق/ إذا كان الاقترانان $م(س)$ و $هـ(س)$ اقترانين أصليين لـ $ق(س)$ حيث $م(س) = (1+د)س^6 + 2س^3 - 4س^2$ و $هـ(س) = 2جـ س^3 - 8س^2 + 5$ وكان $د$ و $جـ$ ثوابت ما قيمة المقدار $(د + 2جـ + هـ^2)^2$

الحل/ $م(س)$ و $هـ(س)$ أصليين لـ $ق(س) \Leftarrow م(س) = هـ(س) = ق(س)$

$م(س) = 6(1+د)س^5 + 10س^4 - 12س^2$

$هـ(س) = 10جـ س^4 - 24س^2$

بالمقارنة: $م(س) = هـ(س) \Leftarrow 6(1+د)س^5 + 10س^4 - 12س^2 = 10جـ س^4 - 24س^2$

* $6(1+د) = 0 \Leftarrow 1+د = 0 \Leftarrow د = -1$

* $10 = 10جـ \Leftarrow جـ = 1$ * $-12 = -24 \Leftarrow هـ = 2$

المطلوب/ $(د + 2جـ + هـ^2)^2 = (-1 + 2 + 2^2)^2 = (1+4)^2 = 25$

• خارجي نفوذ/ اذا علمت أن $\int (ق(س) + ظتاس قاس)\,ds = لو|ظتاس قاس|$ حيث $س \neq 0$ و $س \neq \frac{\pi}{2}$

أثبت أن $ق(س) = -2ظتاس$

الحل/ $\int (ق(س) + ظتاس)\,ds = لو|ظتاس + لو قاس|$

$ق(س) + ظتاس = \frac{-قتاس^2 س}{ظتاس} + \frac{قاس ظتاس}{قاس} \Leftarrow ق(س) + ظتاس = -قتاس^2 س + ظاس$

$ق(س) + ظتاس = ظاس(-ظتاس + 1) \Leftarrow ق(س) + ظتاس = ظاس(-(ظتاس + 1) + 1)$

$ق(س) + ظتاس = ظاس(-ظتاس - 1 + 1) \Leftarrow ق(س) + ظتاس = ظاس \times -ظتاس$

$ق(س) + ظتاس = -ظتاس \Leftarrow ق(س) = -2ظتاس$ #

الدرس الثاني | قواعد التكامل غير المحدود

• القسم الأول | أجب عن الأسئلة التالية:

• 2019 دور أول/ ما ناتج $\int (هـ^{س} + \frac{2}{س}) \, دس$

أ/ $2هـ^{س} + لو|س| + جـ$ ب/ $هـ^{س} + 2لو|س| + جـ$ جـ/ $هـ^{س} - 2لو|س| + جـ$ د/ $هـ^{س} + لو|س| + جـ$

الحل/ $\int هـ^{س} + \frac{2}{س} \, دس = \int هـ^{س} \, دس + 2\int \frac{1}{س} \, دس = هـ^{س} + 2لو|س| + جـ$ ب

• 2019 دور ثاني/ ما ناتج $\int (3س - 1)(3س + 1) \, دس$

أ/ $3س^{3} + س + جـ$ ب/ $س^{3} + س + جـ$ جـ/ $3س^{3} - س + جـ$ د/ $س^{3} - س + جـ$

الحل/ $\int (3س - 1)(3س + 1) \, دس = \int (3س)^{2} - (1)^{2} \, دس = \int 3س - 1 \, دس$

(فرق مربعين)

$= \frac{3}{2}س^{2} - س + جـ = 3س^{2} - س + جـ$ جـ

• 2019 دور ثاني / ما ناتج $\int \frac{1}{جا^{2}س} \, دس$

أ/ $-ظتاس + جـ$ ب/ $ظاس + جـ$ جـ/ $-قتاس + جـ$ د/ $-ظتاس + جـ$

الحل/ $\int \frac{1}{جا^{2}س} \, دس = \int قتا^{2}س \, دس = -ظتاس + جـ$ د

• 2019 دور ثالث/ ما ناتج $\int قاس(قاس + ظاس) \, دس$

أ/ $جاس + تجاس + جـ$ ب/ $ظاس + قاس + جـ$ جـ/ $ظتاس + قاس + جـ$ د/ $قاس + قتاس + جـ$

الحل/ $\int قاس(قاس + ظاس) \, دس = \int قا^{2}س + قاس ظاس \, دس = ظاس + قاس + جـ$ ب

• 2019 دور ثالث/ ما ناتج $\int (\frac{2}{س} + هـ^{س}) \, دس$

أ/ $لو س^{2} - هـ^{س} + جـ$ ب/ $لو س^{2} + هـ^{س} + جـ$ جـ/ $لو س - هـ^{س} + جـ$ د/ $لو س + هـ^{س} + جـ$

الحل/ $\int \frac{2}{س} + هـ^{س} \, دس = 2لو|س| + \frac{هـ^{س}}{1} + جـ = لو|س|^{2} - هـ^{س} + جـ$

$= لو س^{2} - هـ^{س} + جـ$ أ

• ملاحظة/ $|س|^{ن} = س^{ن}$ ، ن عدد زوجي.

• 2020 دور أول/ ما قيمة $\int (\frac{قاس}{جتاس} + \frac{1}{هـ^{س}}) \, دس$

أ/ $ظاس + هـ^{-س} + جـ$ ب/ $-ظتاس - هـ^{-س} + جـ$ جـ/ $\frac{قاس ظاس}{جاس} - هـ^{-س} + جـ$

د/ $2قاس ظاس + هـ^{-س} + جـ$

الحل/ $\int \left(\frac{\text{قاس}}{\text{ظاس}} + \frac{1}{\text{هـ}^{س}}\right) \text{س} = \int \frac{1}{\text{ظاس}} \times \frac{1}{\text{جتاس}} + \text{هـ}^{س} \text{ س} = \int \frac{1}{\text{جتاس}} + \text{هـ}^{س} \text{ س}$

$= \int \text{قاس} + \text{هـ}^{س} \text{ س} = \text{ظاس} + \text{هـ}^{س} + \text{جـ}$ ✓

• 2020 دورثاني/ أي مما الآتية تساوي $\int \frac{\text{هـ}}{2} \text{س} \text{ جاس} \text{ س}$ ؟ صح $\text{س} > 2$.

أ/ $\text{س جاس} + \text{جـ}$ ب/ $\text{س}^{2}\text{ جاس} + \text{جـ}$ ج/ $\text{جاس} + \text{جـ}$ د/ $\text{س}^{2}\text{ جاس} + \text{جـ}$

الحل/ $\int \frac{\text{هـ}}{2} \text{س جاس} \text{ س} = \int \frac{\text{هـ}}{2} \times \text{س}^{\frac{1}{2}} \times \text{س}^{\frac{1}{2}} \text{ س} = \int \frac{\text{هـ}}{2} \text{س}^{\frac{1+1}{2}} \text{ س} = \int \frac{\text{هـ}}{2} \text{س}^{\frac{3}{2}} \text{ س}$

$= \frac{\text{هـ}}{2} \times \frac{\text{س}^{(\frac{3}{2}+1)}}{(\frac{3}{2}+1)} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{هـ}}{2} \times \frac{2}{5} \text{س}^{\frac{5}{2}} + \text{جـ} = \frac{\text{هـ}}{5} \text{س}^{\frac{5}{2}} + \text{جـ} = \frac{\text{هـ}}{5} \text{س}^{2} \text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{جـ} = \text{س}^{2}\text{ جاس} + \text{جـ}$ ب

• 2020 دورثاني/ ما قيمة المقدار $\int \text{قتا}^{2}\text{س} - \text{قتاس ظتاس} \text{ س}$

أ/ $\text{قتا}^{3}\text{س} - \frac{\text{ظتا}^{3}\text{س}}{3} + \text{جـ}$ ب/ $-\text{ظتاس} + \text{جـ}$ ج/ $-\text{ظتاس} + \text{جـ}$ د/ $\frac{1}{3}\text{قتا}^{3}\text{س} + \text{جـ}$

الحل/ $\int \text{قتا}^{2}\text{س} - \text{قتاس ظتاس} \text{ س} = \int \text{قتاس}(\text{قتاس} - \text{ظتاس}) \text{ س} = \int \text{قتاس} \times 1 \text{ س}$

$= -\text{ظتاس} + \text{جـ}$ ج

• 2020 دورثالث/ ما ناتج $\int (\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س}) \text{س}$

أ/ $\text{جتا}(2\text{س}) + \text{جـ}$ ب/ $\frac{1}{2}\text{جا}(2\text{س}) + \text{جـ}$ ج/ $-\frac{1}{2}\text{جا}(2\text{س}) + \text{جـ}$ د/ $\frac{1}{2}\text{جتا}(2\text{س}) + \text{جـ}$

الحل/

$\int (\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س}) \text{س} = \int (\text{جتاس} - \text{جاس})(\text{جتاس} + \text{جاس}) \text{ س}$

فرق مربعين $= \int \text{جتا}(2\text{س}) \times 1 \text{ س} = \frac{\text{جا}(2\text{س})}{2} + \text{جـ}$ ب

• 2020 دورثالث/ ما ناتج $\int \text{قا}^{2}\frac{\pi}{4} \text{ س}$

أ/ $\frac{1}{4}\text{ظا}\frac{\pi}{4} + \text{جـ}$ ب/ $2\text{س} + \text{جـ}$ ج/ $\frac{4}{\pi}\text{ظا}(\frac{\pi}{4}\text{س}) + \text{جـ}$ د/ 2

الحل/ $\int \text{قا}^{2}(\frac{\pi}{4}) \text{س} = \int \frac{1}{\text{جتا}^{2}(\frac{\pi}{4})} \text{س} = \int \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2}} \text{س} = \int \frac{1}{(\frac{1}{2})} \text{س} = \int 2 \text{ س}$

$= 2\text{س} + \text{جـ}$ ب

• 2022 دورثاني/ ما ناتج $\int \frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}} \text{ س}$

أ/ $\text{ظاس} - \text{قاس} + \text{جـ}$ ب/ $\text{ظاس} + \text{قاس} + \text{جـ}$ ج/ $-\text{ظتاس} + \text{قاس} + \text{جـ}$ د/ $\text{ظتاس} + \text{قاس} + \text{جـ}$

الحل/ $\int \frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,ds = \int \frac{1}{\text{جتاس}} + \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,ds = \int \text{قاس} + \text{ظاس}\,ds \times \frac{1}{\text{جتاس}}\,ds$

$= \int \text{قاس} + \text{ظاس}\,\text{قاس}\,ds = \text{ظاس} + \text{قاس} + \text{جـ}$ ب

• 2024 دورتان/ إذا كان الاقترانان م(س)، هـ(س) اقترانين أصليين مختلفين للاقتران د(س)، ماذا يمثل $\int (\text{م}(س) - \text{هـ}(س))\,ds$

أ/ اقتران ثابت ب/ اقتران خطي جـ/ اقتران تربيعي د/ صفر

الحل/ م(س)، هـ(س) أصليين لـ د(س) ← م(س) − هـ(س) = جـ،

← $\int \text{م}(س) - \text{هـ}(س)\,ds = \int \text{جـ}_1\,ds = \text{جـ}_1 س + \text{جـ}$ ← اقتران خطي ب

• 2020 سلفيت/ ما قيمة $\int \frac{\text{هـ}^{س}+1}{\text{هـ}^{س}+س}\,ds$

أ/ $\ln|\text{هـ}^{س}+س+1| + \text{جـ}$ ب/ $\ln|\text{هـ}^{س}-س+1| + \text{جـ}$ جـ/ $\ln|\text{هـ}^{س}+س+1| + \text{جـ}$ د/ $\ln|\text{هـ}^{س}-س+1| + \text{جـ}$

الحل/ $\int \frac{\text{هـ}^{س}+1}{\text{هـ}^{س}+س}\,ds = \ln|\text{هـ}^{س}+س+1| + \text{جـ}$ جـ "لاحظ (المقام) = البسط"

• 2020 سلفيت/ إذا كان $\int \text{د}(س)\,ds = \text{P}س^{3} - 3س + \text{جـ}$ و د(س) متصل وكان د(2) − د(1) = 18، ما قيمة د(1)؟

أ/ P/3 ب/ 6 جـ/ 9 د/ 21

الحل/ $\int \text{د}(س)\,ds = \text{P}س^{3} - 3س + \text{جـ}$ / باشتقاق الطرفين

$\text{د}(س) = 3\text{P}س^{2} - 3$

* $\text{د}(2) = 3\text{P}(2)^{2} - 3 = 3 \times 4\text{P} - 3 = 12\text{P} - 3$

* $\text{د}(1) = 3\text{P}(1)^{2} - 3 = 3\text{P} - 3$

← $\text{د}(2) - \text{د}(1) = 18$ ← $(12\text{P} - 3) - (3\text{P} - 3) = 18$

← $12\text{P} - 3 - 3\text{P} + 3 = 18$ ← $\frac{9\text{P}}{9} = \frac{18}{9}$ ← $\text{P} = 2$

← المطلوب/ $\text{د}(1) = 3 \times 2 - 3 = 3$ P 3

• 2020 أريحا/ $\int (\text{جتاس} + \text{جاس})\,ds$

أ/ $\text{جتاس} + \text{جاس} + \text{جـ}$ ب/ $س + \text{جـ}$ جـ/ $\text{جتا}^{3}س + \text{جا}^{3}س + \text{جـ}$ د/ $1 + \text{جـ}$

الحل/ $\int \frac{\text{جتاس} + \text{جاس}}{\text{متطابقة}}\,ds = \int 1\,ds = س + \text{جـ}$ ب

.. فتىً جاهد الدّنيا وجاهد أهلها ... وفي نفسه لم يدر كيف يُجاهِدُ ..

• 2020 سلفيت / ∫ نفدس

أ/ $\frac{نفد^{س}}{2}+ج$ ب/ نفدس+ج ج/ نفد+ج د/ س+ج

الحل/

∫(نفد)دس = نفدس + ج ب

ثابت

• 2020 الخليل/ ما قيمة ∫ لوهـ٢ دس

أ/ ٢س+ج ب/ هـ٢س+ج ج/ هـ٢+ج د/ هـس+ج

الحل/

∫ لوهـ٢ دس = ∫ ٢ لوهـ دس = ∫ ٢دس = ٢س + ج أ

• 2020 الخليل/ ما قيمة ∫ ظتاس دس

أ/ لو|جاس|+ج ب/ -لو|جاس|+ج ج/ لو|ضتاس|+ج د/ -لو|جتاس|+ج

الحل/

∫ ظتاس دس = ∫ $\frac{جتاس}{جاس}$ دس = لو|جاس| + ج أ

• 2024 نابلس/ ما قيمة ∫ $\frac{ظتاس}{جاس}$ دس

أ/ -قاس+ج ب/ -قتاس+ج ج/ قاس+ج د/ قتاس+ج

الحل/ * ∫ $\frac{ظتاس}{جاس}$ دس = ∫ ظتاس قاس دس = ∫ ظتاس × $\frac{1}{جاس}$ دس = -قتاس + ج ب

• 2024 سلفيت/ ما قيمة ∫ ظاس(ظاس+ظتاس)دس

أ/ س+قاس+ج ب/ قاس+ج ج/ ظاس+س+ج د/ ظاس+ج

الحل/

∫ ظاس(ظاس+ظتاس)دس = ∫ ظا²س + ظاس ظتاس دس

= ∫(ظا²س+١)دس = ∫ قا²س دس = ظاس+ج د

ظاس × ظتاس = $\frac{جاس}{جتاس} \times \frac{جتاس}{جاس}$ = ١

• 2024 سلفيت/ ما قيمة ∫(٢جتا٤س+١)(٢جتا٤س-١)دس

أ/ ٢س٤+س+ج ب/ س٤+س+ج ج/ ٢س٤-س+ج د/ س٤-س+ج

الحل/ ثمارين 2019 دور ثاني ١١ ج

• 2025 نابلس/ إذا كان ح(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ف(س) وكان ح(س) = ٣س٢ ، هـ(١) = ٤ ، جد ∫ ح(س)+هـ(س) دس

أ/ ٢س٣+س+ج ب/ ٢س٣-س+ج ج/ -٢س٣-س+ج د/ -٢س٣+س+ج

الحل/ م(س) = ٣س^{٢} ⇐ ق(س) = س^{٣} + جـ

ق(١) = ٣ + جـ

٤ = ٣ + جـ ⇐ جـ = ١

⇐ ق(س) = س^{٣} + ١

* ∫ م(س) + ق(س) دس = ∫ ٣س^{٢} + ٣س^{٢} + ١ دس = ∫ ٦س^{٢} + ١ دس = ٦س^{٣}/٣ + س + جـ = ٢س^{٣} + س + جـ

ف

• 2025 نابلس/ إذا كان ∫ ق(س) + س) دس = س^{٣} + لـ س^{٢} + ١ وكان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند (١، ٣) يساوي ٦ حيث قيمة الثابت لـ

ب/ ٣/٢ ج/ ١ د/ ٢

ا/ ١/٢

الحل/ ∫ ق(س) + س) دس = س^{٣} + لـ س^{٢} + ١

ق(س) + س = ٣س^{٢} + ٢لـ س

ق(١) + ١ = ٣ + ٢لـ

٦ + ١ = ٣ + ٢لـ ⇐ ٧ = ٣ + ٢لـ

⇐ ٤ = ٢لـ ⇐ لـ = ٢ ✓

* ميل المماس | = ٦ (١، ٣)

⇐ ق(١) = ٦

• 2025 صيفي نابلس/ إذا كان م(س) = ظاس - ظتاس هو أحد الاقترانات الأصلية لـ ق(س) وكان ق(س) = ٨ف قتا^{٢}(٢س) حيث قيمة الثابت ف

ب/ -١/٢ ج/ ١/٢ د/ ١/٤

ا/ ٢ف

الحل/ م(س) اقتران أصلي لـ ق(س) ⇐ م(س) = ق(س)

م(س) = قاس + قتاس

م(س) = ١/جتاس + ١/جاس = جاس + جتاس / جتاس جاس = ١ / (جاس جتاس)^{٢} = ١ / (١/٢ جا٢س)^{٢}

⇐ م(س) = ١ / ١/٤ جا^{٢}(٢س) = ٤ قتا^{٢}(٢س)

* م(س) = ق(س) ⇐ ٤ قتا^{٢}(٢س) = ٨ف قتا^{٢}(٢س) ⇐ ٤ = ٨ف ⇐ ف = ١/٢ ✓ جـ

• 2025 طولكرم/ جد ∫ (٢ + ٢جتا^{٣}س) / (١ + جتا٢س) دس

ا/ ظاس - جاس + جـ ب/ ظاس + جاس + جـ ج/ ظاس - جاس + جـ د/ ظتاس + جاس + جـ

الحل/ ∫ (٢ + ٢جتا^{٣}س) / (١ + جتا٢س) دس = ∫ ٢(١ + جتا^{٣}س) / (١ + ٢جتا^{٢}س - ١) دس = ∫ ٢(١ + جتا^{٣}س) / ٢جتا^{٢}س دس

= ∫ (١ + جتا^{٣}س) / جتا^{٢}س دس = ∫ ١/جتا^{٢}س + جتا^{٣}س / جتا^{٢}س دس = ∫ قتا^{٢}س + جتاس دس = ظاس + جاس + جـ ب

• الخليل/ 2025 إذا كان $م = \int \frac{س^3+س+1}{س+2}$ جس ، $ن = \int \frac{3س+1}{س+2}$ جس فجد $م+ن$

أ/ $\frac{1}{4}س^4+س+جـ$ ب/ $س+1+جـ$ ج/ $لو|س+2|+جـ$ د/ $لو|س+1|+جـ$

الحل/ $م+ن = \int \frac{س^3+س+1}{س+2}$ جس $+ \int \frac{3س+1}{س+2}$ جس $= \int \frac{س^3+س+1}{س+2} + \frac{3س+1}{س+2}$ جس

$\Leftarrow م+ن = \int \frac{س^3+س+1+3س+1}{س+2}$ جس $= \int \frac{س^3+4س+2}{س+2}$ جس $= \int \frac{(س+2)(س^2+ج)}{(س+2)}$ جس

$\Leftarrow م+ن = \int س^2+1$ جس $= \frac{س^3}{3}+س+جـ$ أ

• خارجي/ ما ناتج $\int (\frac{1}{هـ^س} + \frac{4}{س^3})$ جس حيث هـ العدد النيبري

أ/ $4لو|س|-هـ^{-س}+جـ$ ب/ $4لو|س|+هـ^{-س}+جـ$ ج/ $لو|س|-هـ^{-س}+جـ$

د/ $لو|س|-هـ^{-س}+جـ$

الحل/ $\int (\frac{4}{س^3} + \frac{1}{هـ^س})$ جس $= \int \frac{4}{س^3}$ جس $+ \int هـ^{-س}$ جس $= -4لو|س|-هـ^{-س}+جـ$ أ

• القسم الثاني/ أجب عن الأسئلة التالية:

• 2019 دور أول/ جد $\int \frac{هـ^{-س}+س^{هـ-1}}{هـ^س+س^هـ}$ جس

الحل/ $\int \frac{هـ^{-س}+س^{هـ-1}}{هـ^س+س^هـ}$ جس $= \int \frac{هـ^{-س}+س^{هـ-1}}{هـ^س+س^هـ} \times \frac{هـ}{هـ}$ جس $= \int \frac{هـ^{-س+1}+هـ س^{هـ-1}}{هـ(هـ^س+س^هـ)}$ جس

$= \int \frac{هـ^{-س}+هـ س^{هـ-1}}{هـ(هـ^س+س^هـ)}$ جس $= \frac{1}{هـ} لو|هـ^س+س^هـ|+جـ$

• 2019 دور ثاني/ إذا كان $\int ق(س)+س^4$ جس $= 3س^3+جـس^4+2$ وكان $ق(1)=4$ ، $ق(2)=6$

جد $ق(-1)$

الحل/ $(\int ق(س)+س^4$ جس $= 3س^3+جـس^4+2)'$

$ق(س)+س^4 = 6س^2+4جـس^3$

$ق(1)+1 = 6+4جـ \leftarrow 4+1=6+4جـ \Leftarrow 5-6=4جـ \leftarrow -\frac{1}{4}=جـ \leftarrow -\frac{1}{2}=2جـ$

$\Leftarrow ق(س)+س^4 = 6س^2+2 \times -\frac{1}{2}س$

$ق(س) = 5س^4-س$

$\int ق(س)$ جس $= \int 5س^4-س$ جس

$ق(س) = س^5-\frac{1}{2}س^2+جـ \leftarrow ق(2)=\frac{1}{2}(8)-\frac{4}{2}+جـ \leftarrow 6=\frac{16}{3}-\frac{4}{3}+2+جـ$

$\Leftarrow 8-\frac{4}{3}=جـ \Leftarrow جـ=\frac{24-4}{3} \Leftarrow جـ=\frac{20}{3}$

$\leftarrow$ $ق(-1) = \frac{5}{3}(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + \frac{-5}{3} = \frac{-16}{3} - \frac{1}{2} + \frac{-5}{3} = \frac{-21}{3} - \frac{1}{2} = -7 - \frac{1}{2} = -7.5$

• 2019 دورثالث/ جد $\int \frac{س^4 - 1}{س^5 + س^3} \, دس$

الحل/ $\int \frac{س^4 - 1}{س^5 + س^3} \, دس = \int \frac{(س-1)(س+1)}{س^3(س^2+1)} \, دس = \int \frac{س - 1}{س^3} \, دس = \int \frac{س}{س^3} - \frac{1}{س^3} \, دس$

$= \int \frac{1}{س} - س^{-3} \, دس = لو|س| - \frac{س^{-2}}{-2} + ج = لو|س| + \frac{1}{2س^2} + ج$

• 2025 دورثاني/ اذا كان $ق'(س) = 3س^2 - 2جاس$ وكان $ق(0) = 2$ جد قاعدة $ق(س)$

الحل/ $ق'(س) = 3س^2 - 2جاس \leftarrow \int ق'(س) \, دس = \int 3س^2 - 2جاس \, دس$

$\leftarrow ق(س) = س^3 + 2جتاس + ج$

$ق(0) = 0 + 2جتا(0) + ج \leftarrow 2 = 2 + ج \leftarrow ج = صفر$

$\leftarrow ق(س) = س^3 + 2جتاس$

• 2025 دورثاني/ اذا كان $ق'(س) = \int (3س - 2) \, دس$ وكان $ق(1) = 3$ ما قيمة $ق(-1)$

الحل/ $ق(س) = \int (3س - 2) \, دس \leftarrow ق(س) = \frac{3}{2}س^2 - 2س + ج$

$ق(1) = \frac{3}{2} - 2 + ج \leftarrow 3 = \frac{3}{2} - 2 + ج \leftarrow ج = 3 + 2 - \frac{3}{2} = 5 - \frac{3}{2} \leftarrow ج = \frac{10-3}{2} = \frac{7}{2}$

$\leftarrow ق(س) = \frac{3}{2}س^2 - 2س + \frac{7}{2}$

$ق(-1) = \frac{3}{2} - 2(-1) + \frac{7}{2} = \frac{3}{2} + 2 + \frac{7}{2} = \frac{10}{2} + 2 = 5 + 2 = 7 \leftarrow ق(-1) = 7$

• 2025 دورثالث/ جد $\int \frac{1 + \sqrt{3س+1}}{1 + \sqrt{3س+1}} \, دس$

الحل/ $\int \frac{1 + \sqrt{3س+1}}{1 + \sqrt{3س+1}} \, دس = \int \frac{1}{1 + \sqrt{3س+1}} + \frac{\sqrt{3س+1}}{1 + \sqrt{3س+1}} \, دس = \int (3س+1)^{-\frac{1}{2}} + 1 \, دس$

$= \frac{(3س+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + س + ج = \frac{2}{3}(3س+1)^{\frac{1}{2}} + س + ج = \frac{2}{3}\sqrt{3س+1} + س + ج$

• 2025 دورثالث/ اذا كان $ق(س) = \int (6س^2 - 4) \, دس$ وكان $ق(2) = 11$ ما قيمة $ق(-2)$

الحل/ $ق(س) = \int 6س^2 - 4 \, دس \leftarrow ق(س) = \frac{6}{3}س^3 - 4س + ج$

$ق(2) = 2(2)^3 - 4(2) + ج$

$11 = 16 - 8 + ج \leftarrow 11 = 8 + ج \leftarrow ج = 3$

$\leftarrow ق(س) = 2س^3 - 4س + 3 \leftarrow ق(-2) = 2(-2)^3 - 4(-2) + 3 = -16 + 8 + 3 = -5$

• نابلس 2025/ إذا كان $ق(س) = \int \frac{هـ^{جاس}}{هـ^{ل(ب س+1)^3}} دس$ و $ق(0) = 7$ فما قيمة الثابت ب

الحل/

$$ق(س) = \int \frac{هـ^{جاس}}{هـ^{3ل(ب س+1)}} دس$$

$$ق(س) = هـ^{جاس} + ج \Leftarrow ق(س) = \int هـ^{جاس} \times \frac{ب}{1+ب س} دس$$

$$\Leftarrow ق(0) = هـ^{جا0} + ج \Leftarrow 7 = هـ^{0} + ج \Leftarrow 7 = 1 + ج \Leftarrow ج = 6$$

$$\Leftarrow ق(س) = هـ^{جاس} + 6 \Leftarrow ق(1) = هـ^{جا1} + 6 = هـ^{ب} + 6$$

$$\Leftarrow هـ^{ب} + 6 = 7 \Leftarrow هـ^{ب} = 1 \Leftarrow ب = 0$$

• سلفيت 2025/ إذا كان $ق(س) = \int (س + ق(س)) دس = س^3 - 2ب س + 3$ و $ق(2) = 5$ و $ق(ج) = 6$ فما قيمة $ق(3)$

الحل/

$$\int (س + ق(س)) دس = س^3 - 2ب س + 3$$

$$\frac{س^2}{2} + ق(س) = \frac{3س^3}{3} - 2ب س + ج$$

$$ق(س) = 3س - 2ب$$

$$ق(2) = 3 \times 2 - 2ب$$

$$5 = 6 - 2ب \Leftarrow -2ب = -1 \Leftarrow ب = \frac{1}{2}$$

$$\Leftarrow ق(س) = 3س - 1$$

$$\int ق(س) دس = \int 3س - 1 دس$$

$$ق(س) = \frac{3س^2}{2} - س + ج$$

$$ق(ج) = \frac{3ج^2}{2} - ج + ج = 0 \Leftarrow \frac{3ج^2}{2} = 0 \Leftarrow ج = 0$$

$$\Leftarrow ق(س) = \frac{3س^2}{2} - س$$

$$ق(3) = \frac{3(3)^2}{2} - 3 = \frac{27}{2} - 3 = \frac{21}{2} \Leftarrow ق(3) = 10.5$$

• جنوب نابلس 2025/ إذا كان $\int (ق(س) + 3س^2) دس = س^4 + 2س^3 + ج$ و $ق(1) = 3$ و $ق(2) = 7$ جد قيمة $ق(3)$

الحل/

$$\int (ق(س) + 3س^2) دس = س^4 + 2س^3 + ج$$

$$ق(س) + س^3 = 4س^3 + 6س^2$$

$$ق(1) + 1 = 4 + 6 \Leftarrow ق(1) = 9$$

$$\Leftarrow ق(س) = 4س^3 + 6س^2 - س^3$$

$$\int ق(س) دس = \int 4س^3 + 6س^2 - س^3 دس$$

$$ق(س) = س^4 + 2س^3 - \frac{س^4}{4} + ج$$

$$ق(1) = 1 + 2 - \frac{1}{4} + ج \Leftarrow 9 = 3 - \frac{1}{4} + ج \Leftarrow ج = 6 - \frac{1}{4} = \frac{23}{4}$$

$$ق(س) = س^4 + 2س^3 - \frac{س^4}{4} + \frac{23}{4}$$

$$ق(3) = 81 + 54 - \frac{81}{4} + \frac{23}{4} = 135 - \frac{58}{4} = 135 - 14.5 = 120.5$$

• خارجي/ إذا كان $\int \frac{ق(س)+س^3}{س^3}\,دس = \frac{-6}{س^2}+\frac{3}{س}+3س+س^2+ب$ ، $ق(2)=8$ ما قيمة الثابت ب

الحل/ $\int \frac{ق(س)+س^3}{س^3}\,دس = \int (-6س^{-3}+3س^{-2}+3+2س)\,دس$

$\frac{ق(س)}{س^3}+س = 3س^{-2}+2س+3س+س^2$

$ق(س)+س^4 = 3+3س+2س^3+3س^4$

$ق(2)+16 = 3+6+16+12$

$ق(2)+16 = 37$

$ق(2)=21$

$ق(س)=3+3س+2س^3+3س^4$

$ق(س)=3+3(2)+2(2)^3+3(2)^4$

$ق(2)=3+6+16+48$

$ق(2)=73$

$ب=73$

• خارجي/ إذا كان $م(س)$ اقترانا أصليا لـ $ق(س)$ ما قيمة $\int \frac{ق(س)}{م(س)}\,دس$

الحل/ $م(س)$ اقتران أصلي لـ $ق \Leftarrow م'(س)=ق(س)$

$\int \frac{ق(س)}{م(س)}\,دس = \int \frac{م'(س)}{م(س)}\,دس = لو|م(س)|+ج$

• خارجي تفوق/ إذا كان $\int ق(س)\,دس = 2س+جاس$ ، $\int س\,ق(س)\,دس$ ما قيمة $ق(0)$

الحل/ $\int س\,ق(س)\,دس = 2س+جاس$

$س\,ق(س) = 2+جتاس$

$ق(0)+0 = 2+جتا0$

$ق(0)=2+1$

$ق(0)=3$

الدرس الثالث | تطبيقات التكامل غير المحدود

• القسم الأول | اختر الإجابة الصحيحة :

• 2019 دور ثالث / إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة يساوي $\frac{1}{6س^2}$ ما ق(س) :

أ/ $\frac{-1}{6س}+ج$ ب/ $2س^3+ج$ ج/ $\frac{1}{6س}+ج$ د/ $-2س^3+ج$

الحل / ميل المماس = $\frac{-1}{\text{ميل العمودي}} = \frac{-1}{\frac{1}{6س^2}} = -6س^2$

$\leftarrow$ ق(س) = $\int$ ق(س) دس = $\int -6س^2$ دس

$\leftarrow$ ق(س) = $-6 \int س^2$ دس $\leftarrow$ ق(س) = $-6 \times \frac{س^{-1}}{-1} + ج = \frac{1}{6س} + ج$ ج

• 2020 دور أول / إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة يساوي $3س^2-4س$ وكان ق(2) = 4 ما قيمة ق(1)

أ/ 1 ب/ 4 ج/ صفر د/ -1

الحل / ميل المماس = ق(س) = $3س^2-4س$

$\int$ ق(س) دس = $\int 3س^2-4س$ دس

ق(س) = $س^3-2س^2+ج$ $\leftarrow$ ق(2) = $2^3-2(2)^2+ج$

$4 = 8-8+ج \leftarrow 4 = 4+ج \leftarrow ج = 0$

$\leftarrow$ ق(س) = $س^3-2س^2+0$

ق(1) = 1 - 1 = صفر ج

• 2020 دور ثاني / بدأ جسم التحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل وصعداً عنها ، اذا كانت سرعته في أي لحظة تعطى بالعلاقة ع(ن) = $3ن^2+2ن$ ما بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد مضي ثانيتين من بدء الحركة

أ/ 8 ب/ 12 ج/ 14 د/ 16

الحل / بدأ جسم الحركة من نقطة الأصل صعداً عنها $\leftarrow$ ف(0) = 0

ع = $3ن^2+2ن$

$\int$ ع دن = $\int 3ن^2+2ن$ دن $\leftarrow$ ف = $ن^3+ن^2+ج$ $\leftarrow$ ف(0) = ج $\leftarrow$ ج = 0

$\leftarrow$ ف(ن) = $ن^3+ن^2$ $\leftarrow$ ف(2) = $2^3+2^2 = 8+4 = 12$ متر ب

• 2021 دور ثاني/ إذا كانت سرعة جسيم (ع) بعد (ن) دقيقة تعطى بالعلاقة ع = ٤ن + هـ^{ن-١} ما إزاحة الجسيم بعد دقيقتين من بدء الحركة علماً بأنه قطع مسافة ٥ متر بعد دقيقة واحدة من بدء الحركة

أ/ ١٠ب/ ١١ جـ/ ١٠+هـ د/ ١١+هـ

الحل/ ف(١) = ٥

ع = ٤ن + هـ^{ن-١} ⇐ ∫ع دن = ∫٤ن + هـ^{ن-١} دن ⇐ ف = ٢ن^٢ + هـ^{ن-١} + جـ

⇐ ف(١) = ٢ + هـ^{١-١} + جـ ⇐ ٥ = ٢ + ١ + جـ ⇐ جـ = ٥ - ٣ = ٢

⇐ ف = ٢ن^٢ + هـ^{ن-١} + ٢

ف(٢) = ٢(٢)^٢ + هـ^{٢-١} + ٢ = ٨ + هـ + ٢ ⇐ ف(٢) = ١٠ + هـ جـ

• 2020 سلفية/ يتحرك جسيم تسارع ت = (١٢ن - ٢) م/ث^٢ فإذا كانت سرعته الابتدائية (٤ م/ث) فإن سرعته عندما ن = ٣ هي:

أ/ -٤٨ ب/ ٤٨ جـ/ ٥٢ د/ -٥٢

الحل/ ت = ١٢ن - ٢ ⇐ ∫ت دن = ∫١٢ن - ٢ دن ⇐ ع = ٦ن^٢ - ٢ن + جـ

* سرعته الابتدائية = ع(٠) = ٤ ⇐ ع(٠) = جـ ⇐ جـ = ٤

⇐ ع(ن) = ٦ن^٣ - ٢ن + ٤

ع(٣) = ٦(٣)^٣ - ٢×٣ + ٤ = ٥٢ جـ

• خارجي/ بدأ جسم التحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل ومتجهاً نحوها فإذا كانت سرعته في أي لحظة تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٣ن^٢ + ٢ن ما بعده عن نقطة الأصل بعد مرور ثانيتين ونصف من بدأ الحركة:

أ/ ٤٠ متر ب/ ٢٠ متر جـ/ ٤٥/٨ متر د/ ٤٤/٨ متر

الحل/ بدأ جسم من نقطة الأصل متجهاً نحوها ⇐ ف(٠) = ٠

ع = ٣ن^٢ + ٢ن ⇐ ∫ع دن = ∫٣ن^٢ + ٢ن دن

* ف = ن^٣ + ن^٢ + جـ ⇐ ف(٠) = جـ ⇐ جـ = ٠

ف = ن^٣ + ن^٢ ⇐ ف(٣/٢) = (٣/٢)^٣ + (٣/٢)^٢ = ٢٧/٨ + ٩×٢/٤×٢

⇐ ف(٣/٢) = ٢٧/٨ + ١٨/٨ = ٤٥/٨ متر جـ

.. زحام أعمالكم لا يخفف إلا زحام ورد من القرآن ..

• خارجي تفوق/ إذا كانت النقطة (1،0) نقطة حرجة للاقتران كثير الحدود ق(س) وكان ق'(س) = 3س + 1 ما قيمة ق(2)

أ/ 7 ب/ صفر ج/ -7 د/ 1

الحل/ (1،0) حرجة لـ ق(س) ⇐ ق'(1) = 0

ق'(0) = 0

ق'(س) = 3س + 1 ⇐ ∫ ق'(س) دس = ∫ 3س + 1 دس

ق(س) = $\frac{3}{2}$س² + س + ج

ق(0) = ج ⇐ 0 = ج

⇐ ق(س) = $\frac{3}{2}$س² + س ⇐ ∫ ق'(س) دس = ∫ $\frac{3}{2}$س² + س دس ⇐ ق(س) = $\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}$س³ + $\frac{1}{2}$س² + ج

ق(0) = ج ⇐ 1 = ج

⇐ ق(س) = $\frac{1}{2}$س³ + $\frac{1}{2}$س² + 1 ⇐ ق(2) = $\frac{1}{2}$(2)³ + $\frac{1}{2}$(2)² + 1 = 4 + 2 + 1 ⇐ ق(2) = 7 ب

• القسم الثاني | أجب عن الأسئلة التالية :

• 2020 دور أول/ جد قاعدة ق(س) ، إذا علمت أن ق'(س) = س² + 3جاس ، ق'(0) = 3 ، ق(0) = 2

الحل/ ∫ ق'(س) دس = ∫ س² + 3جاس دس

ق(س) = $\frac{1}{3}$س³ − 3جتا س + ج ⇐ ق(0) = 0 − 3جتا(0) + ج

3 = −3 + ج ⇐ 6 = ج

⇐ ق(س) = $\frac{1}{3}$س³ − 3جتا س + 6 ⇐ ∫ ق'(س) دس = ∫ $\frac{1}{3}$س³ − 3جتا س + 6 دس

⇐ ق(س) = $\frac{1}{12}$س⁴ − 3جاس + 6س + ج

ق(0) = $\frac{1}{12}$(0) − 3جا(0) + 6(0) + ج ⇐ 2 = ج

⇐ ق(س) = $\frac{1}{12}$س⁴ − 3جاس + 6س + 2

• 2020 دور ثاني/ أوجد قاعدة ق(س) الذي يمر بـ (0،π) علماً بأن س ق'(س) = جتا س − ق(س)

الحل/ ق(س) يمر بـ (0،π) ⇐ ق(π) = 0

س ق'(س) = جتا س − ق(س) ⇐ س ق'(س) + ق(س) = جتا س

(س ق(س))' = جتا س ⇐ ∫ (س ق(س))' دس = ∫ جتا س دس

⇐ س ق(س) = جاس + ج

π ق(π) = جا(π) + ج ⇐ π × 0 = 0 + ج ⇐ 0 = ج

⇐ س ق(س) = جاس

⇐ ق(س) = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$

• 2020 دور ثالث / إذا كان ص = س + ٤ يمس منحنى ق(س) عند النقطة (س = ١)
وكان ق'(س) = ٦س + ٢ ما قاعدة الاقتران ق(س)

الحل / ص = س + ٤ ← يمس ق(س) عند س = ١
ق(١) = ١ + ٤ ← ق(١) = ٥
← ص = س + ٤ ← ص = ١ = ميل المماس ← ١ = ق'(١)
* ق'(س) = ٦س + ٢ ← ∫ق'(س) دس = ∫٦س + ٢ دس
ق(س) = ٣س² + ٢س + ج
ق(١) = ٣ + ٢ + ج ← ١ = ٥ + ج ← ج = -٤
← ق(س) = ٣س² + ٢س - ٤
∫ق(س) دس = ∫٣س² + ٢س - ٤ دس ← ق(س) = س³ + س² - ٤س + ج
ق(١) = ١ + ١ - ٤ + ج
٥ = -٢ + ج ← ج = ٧
← ق(س) = س³ + س² - ٤س + ٧

• 2021 دور أول / إذا كان تسارع جسم (ت) بعد (ن) من الثواني يعطى بالعلاقة ت = ٦ن + ٨
ما المسافة التي قطعها الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن سرعته الابتدائية تساوي
٤ أمتار وأن الجسم قطع مسافة ٦٠ متر أول ٣ ثواني من بدء الحركة

الحل / سرعته الابتدائية = ع(٠) = ٤ ، ف(٣) = ٦٠
ت = ٦ن + ٨ ← ∫ت دن = ∫٦ن + ٨ دن ← ع = ٣ن² + ٨ن + ج
ع(٠) = ج ← ج = ٤
← ع = ٣ن² + ٨ن + ٤ ← ∫ع دن = ∫٣ن² + ٨ن + ٤ دن
ف = ن³ + ٤ن² + ٤ن + ج
ف(٣) = ٢٧ + ٣٦ + ١٢ + ج
٦٠ = ٧٥ + ج ← ج = -١٥
← ف = ن³ + ٤ن² + ٤ن - ١٥
ف(٢) = ٨ + ٤(٤) + ٤×٢ - ١٥ ← ف(٢) = ١٧ متر
← ف(٢) = ١٧ متر

• 2021 دور ثاني / إذا كان ق'(س) = ٩س² - ٣ما قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن المستقيم
س + ص = ٤ مماس لمنحنى الاقتران عند (١، ق(١))

الحل / س + ص = ٤ ← ١ + ص = ٤ ← ص = ٣ ← ميل المماس = -١ = ق'(١)
ق'(س) = ٩س² - ٣ما ← ق'(١) = ٩ - ٣ما ← -١ = ٩ - ٣ما ← ٣ما = ١٠ ← ما = ١٠/٣

$ق'(س) = ٣س^٢ - ٣س^٤$

$\int ق'(س)\,دس = \int ٣س^٢ - ٣س^٤\,دس$

$ق(س) = س^٣ - س^٥ + ج$

$ق(١) = ١ - ١ + ج \Leftarrow ٣ = ج$

$\Leftarrow ق(س) = س^٣ - س^٥ + ٣$

• $(١، ق(١))$ تقع على المماس:

$س + ص = ٤$

$١ + ق(١) = ٤$

$ق(١) = ٣$

• 2022 دور أول/ ليكن $ق(س) + هـ^{٣س} = جاس$ وكان $ق(٠) = \frac{١}{٢}$ ما قاعدة $ق(س)$

الحل/ $\int ق(س) + هـ^{٣س}\,دس = \int جاس\,دس$

$ق(س) + \frac{١}{٣}هـ^{٣س} = -جتاس + ج$

$ق(٠) + \frac{١}{٣}هـ^{٠} = -جتا(٠) + ج \Leftarrow \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} = -١ + ج \Leftarrow ج = \frac{٥}{٦}$

$\Leftarrow ق(س) + \frac{١}{٣}هـ^{٣س} = -جتاس + \frac{٥}{٦} \Leftarrow ق(س) = -جتاس - \frac{١}{٣}هـ^{٣س} + \frac{٥}{٦}$

• 2022 دور ثاني/ إذا كان ميل المماس لمنحنى $ق(س)$ عند أي نقطة يساوي $٢ + ب س^٢$ وكان ميله عند النقطة $(١، ٢)$ يساوي ٥ ما صيغة $ق(س)$

الحل/ ميل المماس عند $(١، ٢) = ٥ \Leftarrow ق'(١) =$ ميل المماس $= ٥$

$ق(١) = ٢$

ميل المماس $= ق'(س) = ٢ + ب س^٢$

$ق'(١) = ٢ + ب \Leftarrow ٥ = ٢ + ب \Leftarrow ب = ٣$

$ق'(س) = ٢ + ٣س^٢$

$\int ق'(س)\,دس = \int ٢ + ٣س^٢\,دس \Leftarrow ق(س) = ٢س + س^٣ + ج$

$ق(١) = ٢ + ١ + ج$

$٢ = ٣ + ج \Leftarrow ج = -١$

$\Leftarrow ق(س) = ٢س + س^٣ - ١$

• 2023 دور ثالث/ إذا كان $ق(س)$ اقتران متصل بحيث $ق(س)$ جاس $- ق(س)$ جتاس $= ٠$ ما قاعدة $ق(س)$ حيث $ق(\frac{\pi}{٣}) = \sqrt{٣}$ و $ق(س) > ٠$

الحل/ $ق(س)$ جاس $- ق(س)$ جتاس $= ٠ \Leftarrow ق(س)$ جاس $= ق(س)$ جتاس

$\Leftarrow \frac{ق(س)}{ق(س)} = \frac{جتاس}{جاس} \Leftarrow \int \frac{ق'(س)}{ق(س)}\,دس = \int \frac{جتاس}{جاس}\,دس$

$\Leftarrow لو_هـ|ق(س)| = لو_هـ|جاس| + ج \Leftarrow لو_هـ|ق(\frac{\pi}{٣})| = لو_هـ|جا\frac{\pi}{٣}| + ج \Leftarrow لو_هـ|\sqrt{٣}| = ج$

$\Leftarrow \ln|ق(س)| = \ln|جاس| + \ln 2 \Leftarrow \ln[ق(س)] = \ln|جاس \times 2| = \ln|2 جاس|$

$ق(س) > 0$

$\ln ق(س) = \ln|2 جاس| \Leftarrow ق(س) = 2|جاس|$

• 2023 دور ثالث/ إذا كان ميل المماس لمنحنى $ق(س)$ عند أي نقطة يساوي $س + \frac{1}{س^2}$ وما قاعدة الاقتران $ق(س)$ علماً بأن منحنى $ق(س)$ يمر بالنقطة $(1, \frac{5}{3})$

الحل/ $ق(س)$ يمر بـ $(1, \frac{5}{3}) \Leftarrow ق(1) = \frac{5}{3}$

ميل المماس $= ق'(س) = س + \frac{1}{س^2} \Leftarrow ق(س) = \frac{س^2}{2} + \frac{س^{-1}}{-1}$

$* \int ق'(س) ds = \int س + س^{-2} ds \Leftarrow ق(س) = \frac{س^2}{2} + \frac{س^{-1}}{-1} + ج \Leftarrow ق(س) = \frac{1}{2}س^2 - \frac{1}{س} + ج$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{1}{2}س^2 - \frac{1}{س} + 2$

$ق(1) = \frac{1}{2} - 1 + ج \Leftarrow \frac{5}{3} = \frac{1}{2} - 1 + ج \Leftarrow ج = 2$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{1}{2}س^2 - \frac{1}{س} + 2$

• 2024 دور أول/ إذا كان $ص = س + 2$ جس منحنى $ق(س)$ عند $(س = 0)$ وكان $ق'(س) = 6س$ وما قاعدة $ق(س)$

الحل/ $ص = س + 2 \Leftarrow ص' = 1 =$ ميل المماس $\Leftarrow 1 = ق'(0)$

وأيضاً $ص = 0 + 2 = 2 \Leftarrow ق(0) = 2$

$* ق'(س) = 6س \Leftarrow \int ق'(س) ds = \int 6س ds \Leftarrow ق(س) = 3س^2 + ج$

$\Leftarrow ق(0) = ج \Leftarrow 1 = ج$

$* ق'(س) = 3س^2 + 1 \Leftarrow \int ق'(س) ds = \int 3س^2 + 1 ds$

$ق(س) = س^3 + س + ج$

$ق(0) = ج \Leftarrow 2 = ج$

$\Leftarrow ق(س) = س^3 + س + 2$

• 2025 دور أول/ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق(س)$ عند النقطة $(1, 8)$ يساوي (4) وكانت $ق'(س) = 12س - 2$ هي قاعدة الاقتران $ق(س)$

الحل/ ميل المماس عند $(1, 8) = 4 \Leftarrow ق'(1) = 4 =$ ميل المماس

$ق(1) = 8$

$ق'(س) = 12س - 2 \Leftarrow \int ق'(س) ds = \int 12س - 2 ds \Leftarrow ق(س) = 6س^2 - 2س + ج$

$ق(1) = 6 - 2 + ج \Leftarrow 4 = 4 + ج \Leftarrow ج = 0$

$ق'(س) = ٦س^٢ - ٢س$

$\int ق'(س)\,دس = \int ٦س^٢ - ٢س\,دس \Leftarrow ق(س) = \frac{٦}{٣}س^٣ - \frac{٢}{٢}س^٢ + ج$

$ق(١) = ٢(١)^٣ - (١)^٢ + ج$

$٨ = ٢ - ١ + ج \Leftarrow ج = ٧$

$\Leftarrow ق(س) = ٢س^٣ - س^٢ + ٧$

• 2020 سلفية / إذا كان $ه(س) = س\,ق(س)$ حيث $ق(س) \neq ٠$ وكان $ه(هـ) = ٥$ أوجد قاعدة الاقتران $ق(س)$

الحل/ $ه(س) = س\,ق(س) \Leftarrow \frac{ه(س)}{س} = ق(س) \Leftarrow \int \frac{١}{س}ه(س)\,دس = \int ق(س)\,دس$

$\Leftarrow \frac{(ه(س))^٢}{٢} + ج = ق(س)$ (لأن $(ه(س))' = \frac{١}{س}$ بجانبها نطبق قاعدة $\int ق^ن(س)\,ق'(س)\,دس = \frac{ق^{ن+١}(س)}{(ن+١)} + ج$)

$\Leftarrow ق(س) = \frac{١}{٢}(ه(س))^٢ + ج \Leftarrow ق(هـ) = \frac{١}{٢}(ه(هـ))^٢ + ج$

$٥ = \frac{١}{٢}(٢ه(هـ))^٢ + ج \Leftarrow ٥ = \frac{١}{٢}(ج)^٢ + ج$

$\Leftarrow ٥ = ٢ + ج \Leftarrow ج = ٣$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{١}{٢}(ه(س))^٢ + ٣$

طريقة (٢)/ نفرض $ه(س) = ص \Leftarrow \frac{١}{س}دس = دص \Leftarrow دس = س\,دص$

$\Leftarrow ق(س) = \int \frac{١}{س} \times ص \times س\,دص = \int ص\,دص = \frac{ص^٢}{٢} + ج = \frac{(ه(س))^٢}{٢} + ج$

ثم نكمل ونجد ج

• 2020 الخليل/ يتحرك جسم تسارع $ت = ٢ن^{\frac{٢}{٣}}$ إذا علمت أن الجسم بدأ الحركة من السكون ما سرعة الجسم بعد مرور ٣ ثوانٍ.

الحل/ بدأ الجسم الحركة من السكون $\Leftarrow ع(٠) = ٠$

$ت = ٢ن^{\frac{٢}{٣}} \Leftarrow \int ت\,دن = \int ٢ن^{\frac{٢}{٣}}\,دن \Leftarrow ع = \frac{٢ن^{\frac{٢}{٣}+١}}{\frac{٢}{٣}+١} + ج$

$\Leftarrow ع = ٢ن^{\frac{٥}{٣}} \times \frac{٣}{٥} + ج$

$ع = \frac{٦}{٥}ن^{\frac{٥}{٣}} + ج \Leftarrow ع(٠) = ج \Leftarrow$ صفر $= ج \Leftarrow ع = \frac{٦}{٥}ن^{\frac{٥}{٣}}$

$ع(٣) = \frac{٦}{٥}(٣)^{\frac{٥}{٣}} = \frac{٦}{٥}\sqrt[٣]{٣^٥} \Leftarrow ع(٣) = ٢٤٣\frac{٦}{٥}$

• 2022 قباطية / يتحرك جسم تسارعه ت = (جتا٢ن - جا٢ن) م/ث² اذا علمت أن الجسم بدأ الحركة من السكون عند نقطة الأصل جد بعد الجسم بعد مرور $\frac{\pi}{2}$ ثانية .

الحل / بدأ الجسم الحركة من السكون عند نقطة الأصل ← ع(٠) = ٠ ، ف(٠) = ٠

ت = جتا٢ن - جا٢ن ← ت = ع(٢ن) ← ع = ∫ جتا(٢ن) دن

← ع = $\frac{1}{2}$ جا(٢ن) + جـ ← ع(٠) = $\frac{1}{2}$ جا(٠) + جـ ← ٠ = جـ

← ع = $\frac{1}{2}$ جا(٢ن) ← ف = ∫ ع دن = ∫ $\frac{1}{2}$ جا(٢ن) دن = $\frac{1}{2}$ × $\frac{-\text{جتا}(٢ن)}{2}$ + جـ

ف(٠) = $-\frac{1}{4}$ جتا(٠) + جـ ← ٠ = $-\frac{1}{4}$ + جـ ← جـ = $\frac{1}{4}$

ف(ن) = $-\frac{1}{4}$ جتا(٢ن) + $\frac{1}{4}$ ← ف($\frac{\pi}{2}$) = $-\frac{1}{4}$ جتا(π) + $\frac{1}{4}$ = $-\frac{1}{4}$ × -١ + $\frac{1}{4}$

ف($\frac{\pi}{2}$) = $\frac{1+1}{4}$ = $\frac{2}{4}$ = $\frac{1}{2}$ متر

• 2022 سلفيت / إذا كان قـ(س) = ظاس قـ(س) حيث قاعدة قـ(س) صحيحة قـ(٠) = هـ²

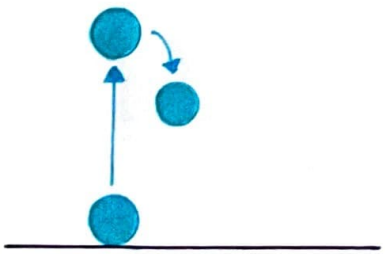
الحل / قـ(س) = ظاس قـ(س) ← $\frac{\text{قـ}'(س)}{\text{قـ}(س)}$ = ظاس ← ∫ $\frac{\text{قـ}'(س)}{\text{قـ}(س)}$ دس = ∫ ظاس دس

← لو$_{هـ}$ |قـ(س)| = ∫ قاس - ١ دس ← لو$_{هـ}$ |قـ(س)| = ظاس - س + جـ

← لو$_{هـ}$ |قـ(٠)| = ظا(٠) - ٠ + جـ ← لو$_{هـ}$ |هـ²| = جـ ← ٢ لو$_{هـ}$ هـ = جـ ← ٢ = جـ

← لو$_{هـ}$ |قـ(س)| = ظاس - س + ٢ ← |قـ(س)| = هـ$^{(ظاس - س + ٢)}$

• 2023 القدس الشريف / قذف جسم رأسيًا لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٣٠ م/ث وتسارع مقداره -١٠ م/ث² إذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانية واحدة من بدء الحركة يساوي ٨٠ متر جد أقصى ارتفاع يصله الجسم



الحل / ع(٠) = ٣٠ ، ف(١) = ٨٠ متر

ت = -١٠ ← ع = ∫ ت دن = ∫ -١٠ دن

ع = -١٠ن + جـ ← ع(٠) = جـ ← جـ = ٣٠

ع(ن) = -١٠ن + ٣٠

ف = ∫ ع دن = ∫ -١٠ن + ٣٠ دن

ف = -٥ن² + ٣٠ن + جـ ← ف(١) = -٥ + ٣٠ + جـ ← ٨٠ = ٢٥ + جـ ← جـ = ٥٥

ف = -٥ن² + ٣٠ن + ٥٥ ← الجسم مقذوف من بدء الحركة ارتفاعه ٥٥ م

ع = -١٠ن + ٣٠ = ٠ ⇐ ١٠ن = ٣٠ ⇐ ن = ٣ ثانية ← زمن الوصول لأقصى ارتفاع

ف(٣) = -٥(٣)^٢ + ٣٠ × ٣ + ٥٥ = ١٠٠ متر ← أقصى ارتفاع للصبي

• 2023 القدس/ إذا كان ص = ق(س) كلما كان ص = ٢ جتا(٢س) ومعادلة المماس عند (٠، ١٦٠) هي ص = س + ١

الحل/ ص = س + ١ ⇐ ص = ١ = ق(٠) ، ق(٠) = ١

ق(س) = ٢ جتا(٢س) ⇐ ∫ ق(س) دس = ∫ ٢ جتا(٢س) دس

⇐ ق(س) = ٢ × جا(٢س)/٢ + جـ ⇐ ق(٠) = جا(٠) + جـ ⇐ ١ = جـ

ق(س) = جا(٢س) + ١ ⇐ ∫ ق(س) دس = ∫ جا(٢س) + ١ دس

ق(س) = -١/٢ جتا(٢س) + س + جـ

ق(٠) = -١/٢ جتا(٠) + ٠ + جـ ⇐ ١ = -١/٢ + جـ ⇐ جـ = ٣/٢

ق(س) = -١/٢ جتا(٢س) + س + ٣/٢

• 2025 شمال الخليل/ إذا كان ق(س) = ظتاس ، ق(π/٤) = -١ ، ق(π/٢) = ٤ جد قاعدة ق(س)

الحل/ ∫ ق(س) دس = ∫ ظتاس دس

ق(س) دس = -لتاس + جـ ⇐ ق(π/٤) = -لتا(π/٤) + جـ

-١ = -١ + جـ ⇐ صفر = جـ

⇐ ق(س) = -لتاس

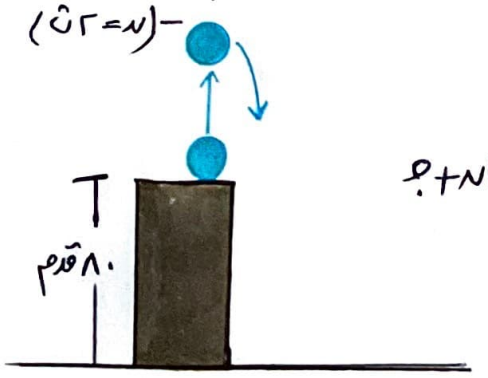
∫ ق(س) دس = ∫ -ظتاس دس ⇐ ق(س) = -∫ جتاس/جاس دس

⇐ ق(س) = -لو_هـ |جاس| + جـ

ق(π/٢) = -لو_هـ |جا π/٢| + جـ ⇐ ٤ = -لو_هـ (١) + جـ ⇐ جـ = ٤

ق(س) = -لو_هـ |جا(س)| + ٤

• 2025 شمال الخليل/ قذف جسم رأسيًا لأعلى من قمة برج ارتفاعه (٨٠ قدم) من سطح الأرض بسرعة ابتدائية (٦٤ قدم/ث) وكان تسارعه في أي لحظة يساوي (-٣٢ قدم/ث^٢) جد أقصى ارتفاع يصله الجسم عن سطح الأرض



الحل/ باعتبار نقطة الاسناد هي الأرض:

ت = -٣٢ ⇐ ∫ ت دن = ∫ -٣٢ دن ⇐ ع = -٣٢ن + جـ

سرعته الابتدائية = ع(٠) = ٦٤ ⇐ ع(٠) = جـ

جـ = ٦٤

⇐ ع(ن) = -٣٢ن + ٦٤

$\leftarrow ع = -٣٢ن + ٦٤ \leftarrow ع(ن) = -١٦ن^{٢} + ٦٤ن + ج \leftarrow ف = -\frac{١٦}{٣}ن^{٣} + ٣٢ن^{٢} + جن + د$

$ف(٠) = ٨٠ \leftarrow د = ٨٠$

$\leftarrow ف(ن) = -\frac{١٦}{٣}ن^{٣} + ٣٢ن^{٢} + ٨٠$

$\Leftarrow ع = ٠ \leftarrow -٣٢ن + ٦٤ = ٠ \leftarrow ٣٢ن = ٦٤ \leftarrow ن = ٢$ "زمن الوصول لأقصى ارتفاع"

$ف(٢) = -\frac{١٦}{٣} \times ٨ + ٣٢ \times ٤ + ٨٠$

ف(٢) = ١٤٤ قدم "أقصى ارتفاع للجسم عن الأرض"

• خارجي/ إذا تحرك جسم في خط مستقيم وكان تسارعه يعطى بالعلاقة $\left(\frac{ن}{ن+١}\right)$ م/ث^{٢} وسرعته الابتدائية (٣ م/ث) ما سرعة الجسم عندما (ن = ٢).

الحل/ ع(٠) = ٣

$ت = \frac{ن}{ن+١} \leftarrow ع = \int ت\,دن = \int \frac{ن}{ن+١}\,دن = \int \frac{ن+١-١}{ن+١}\,دن$

$ع = \int \frac{ن+١}{ن+١} - \frac{١}{ن+١}\,دن = \int ١\,دن - \int \frac{١}{ن+١}\,دن$

$\leftarrow ع = ن - لو_{هـ}|ن+١| + ج$

$ع(٠) = ٠ - لو_{هـ}|١| + ج \leftarrow ج = ٣$

$ع(ن) = ن - لو_{هـ}|ن+١| + ٣ \leftarrow ع(٢) = ٢ - لو_{هـ}|٢+١| + ٣$

ع(٢) = ٥ - لو_{هـ}(٣) م/ث

الدرس الرابع | طرق التكامل - التعويض

• القسم الأول | ما ناتج $\int (3س+4)^{5}$ دس

أ/ $\frac{(3س+4)^{6}}{6}+ج$ ب/ $15(3س+4)^{4}+ج$ ج/ $\frac{(3س+4)^{6}}{3}+ج$ د/ $\frac{(3س+4)^{6}}{18}+ج$

الحل/ $\int (3س+4)^{5}$ دس $= \frac{(3س+4)^{6}}{6\times 3}+ج = \frac{(3س+4)^{6}}{18}+ج$ S

• ملاحظة/ $\int (أس+ب)^{ن}$ دس $= \frac{(أس+ب)^{ن+1}}{أ(ن+1)}+ج$

• 2020 دور أول/ ما قيمة $\int \frac{لو_{هـ} س}{س}$ دس

أ/ $لو_{هـ}^{3} س+ج$ ب/ $(لو_{هـ} س)^{2}+ج$ ج/ $\frac{لو_{هـ} س}{2}+ج$ د/ $\frac{(لو_{هـ} س)^{2}}{2}+ج$

الحل/ $\int \frac{لو_{هـ} س}{س}$ دس $= \int \frac{1}{س} لو_{هـ} س$ دس $= \frac{(لو_{هـ} س)^{2}}{2}+ج$

ملاحظة/ $\int$ ق(س) ق'(س) دس $= \frac{ق(س)^{ن+1}}{ن+1}+ج$

طريقة (2)/ $\int \frac{1}{س} لو_{هـ} س$ دس

نفرض $لو_{هـ} س = ص \Leftarrow \frac{1}{س}$ دس $=$ دص $\Leftarrow$ دس $= س$ دص

$\Leftarrow \int \frac{1}{س} لو_{هـ} س$ دس $= \int \frac{1}{س} \times ص \times س$ دص $= \int ص$ دص $= \frac{ص^{2}}{2}+ج = \frac{(لو_{هـ} س)^{2}}{2}+ج$ S

• 2021 دور ثاني/ ما قيمة $\int$ قتا^{4}س ظتاس دس

أ/ $-\frac{1}{5}$ قتا^{5}س$+ج$ ب/ $-\frac{1}{3}$ قتا^{3}س$+ج$ ج/ $-\frac{1}{4}$ قتا^{4}س$+ج$ د/ $\frac{1}{3}$ قتا^{3}س$+ج$

الحل/ $\int$ قتا^{4}س ظتاس دس $= \int$ قتا^{3}س $\times$ قتاس ظتاس دس $= -\int$ قتا^{3}س $\times$ $-$قتاس ظتاس دس

$= -\frac{قتا^{4}س}{4}+ج$

طريقة (2): نفرض $-$قتاس $= ص \Leftarrow -$قتاس ظتاس دس $=$ دص $\Leftarrow$ دس $= \frac{دص}{-قتاس ظتاس}$

$\Leftarrow \int ص^{4} \times ظتاس \times \frac{دص}{-قتاس ظتاس} = -\int ص^{4}$ دص $= -\frac{ص^{5}}{5}+ج = -\frac{قتا^{5}س}{5}+ج$

قُمْ للهِ لا تركن إلى الدنيا

• 2022 دور أول/ ما ناتج $\int (3+2س)^8 \, دس$

أ/ $\frac{(3+2س)^9}{18}+ج$ ب/ $\frac{(3+2س)^9}{9}+ج$ ج/ $16(3+2س)^7+ج$

د/ $\frac{(3+2س)^9}{16}+ج$

الحل/ $\int (3+2س)^8 \, دس = \frac{(3+2س)^9}{9\times 2}+ج$ أ $\frac{(3+2س)^9}{18}+ج$

• 2022 دور أول/ ما قيمة $\int قا^4 س \, ظا س \, دس$

أ/ $-\frac{1}{5}قا^5 س+ج$ ب/ $-\frac{1}{3}قا^3 س+ج$ ج/ $\frac{1}{4}قا^4 س+ج$ د/ $\frac{قا^3 س}{3}+ج$

الحل/

$\int قا^4 س ظا س = \int قا^3 س \times قا س ظا س \, دس = \frac{قا^4 س}{4}+ج$ ج

طريقة (2)/ $\int قا^4 س ظا س \, دس$

نفرض $قا س = ص \leftarrow قا س ظا س \, دس = دص \Leftarrow دس = \frac{دص}{قا س ظا س}$

$\Leftarrow \int ص^4 ظا س \times \frac{دص}{قا س ظا س} = \int ص^4 \frac{دص}{ص} = \int ص^3 \, دص = \frac{1}{4}ص^4+ج$

$= \frac{1}{4}(قا س)^4+ج$

• 2022 دور ثاني/ ما ناتج $\int \frac{1}{\sqrt{2س+1}} \, دس$

أ/ $2\sqrt{2س+1}+ج$ ب/ $\frac{1}{4}\sqrt{2س+1}+ج$ ج/ $\sqrt{2س+1}+ج$ د/ $\frac{1}{2}\sqrt{2س+1}+ج$

الحل/

$\int \frac{1}{\sqrt{2س+1}} \, دس = \int (\sqrt{2س+1})' \, دس = \sqrt{2س+1}+ج$ ج

---

* طريقة (2): نفرض $\sqrt{2س+1} = ص \leftarrow 2س+1 = ص^2$

$دس = 2ص \, دص$

$\Leftarrow \int \frac{1}{ص} \times 2ص \, دص = \int 2 \, دص = 2ص+ج = \sqrt{2س+1}+ج$

• 2020 سلفية/ إذا كان $\int (1-س)^3 \, دس = P(1-س)^4+ج$ فإن قيمة الثابت P

أ/ 4 ب/ -4 ج/ $\frac{1}{4}$ د/ $-\frac{1}{4}$

الحل/ $\int (1-س)^3 \, دس = \frac{(1-س)^4}{-1\times 4}+ج = -\frac{1}{4}(1-س)^4+ج$

$\Leftarrow P(1-س)^4 + جـ = \frac{-1}{4}(1-س)^4 + جـ \Leftarrow P = \frac{-1}{4}$ ك

طريقة (2)/ $\int (1-س)^3 دس = P(1-س)^4 + جـ$ نشتق الطرفين

$(1-س)^3 = 4P(1-س)^3 \times -1$

بالمقارنة $1 = -4P \Leftarrow P = \frac{-1}{4}$

- 2020 سلعية / ما قيمة $\int \frac{لو_هـ س^3}{س} دس$

أ/ $\frac{3}{2}(لو_هـ س)^2 + جـ$ ب/ $3س^3 + جـ$ جـ/ $3لو_هـ س + جـ$ د/ $P/3 + جـ$

الحل/

$\int \frac{لو_هـ س^3}{س} دس = \int \frac{3لو_هـ س}{س} دس = \int \frac{3}{س} لو_هـ س دس = 3\int \frac{1}{س} لو_هـ س دس$

مكرر 2020

$= \frac{3}{2}(لو_هـ س)^2 + جـ$ ك

- 2020 سلعية / ما قيمة $\int ظا_هـ س \times قا^2 س دس$

أ/ $ظا_هـ س + جـ$ ب/ $قا_هـ س + جـ$ جـ/ $قا_هـ س ظا س + جـ$ د/ $ظا_هـ س ظا س + جـ$

الحل/

$\int ظا_هـ س \times قا^2 س دس = \int (ظا_هـ س)' دس = ظا_هـ س + جـ$ P

طريقة (2)/ نفرض $ظا س = ص \Rightarrow قا^2 س دس = دص \Leftarrow دس = \frac{دص}{قا^2 س}$

$\Leftarrow \int ص_هـ \times قا^2 س \times \frac{دص}{قا^2 س} = \int ص_هـ دص = ص_هـ + جـ$

$= ظا_هـ س + جـ$

- خارجي / أي المقادير الآتية تساوي $\int 4ظتا(2س) دس$

أ/ $2لو_هـ |قتا(2س)| + جـ$ ب/ $لو_هـ |جتا(2س)| + جـ$ جـ/ $2لو_هـ |قا(2س)| + جـ$

د/ $2لو_هـ |جا(2س)| + جـ$

الحل/ $\int 4ظتا(2س) دس = \int 4 \frac{جتا(2س)}{جا(2س)} دس = \int 2 \times \frac{2جتا(2س)}{جا(2س)} دس$

$= 2لو_هـ |جا(2س)| + جـ$ ك

.. إن لبلاد الشام مع رفع كلمة الإسلام موعدًا لن تُخلفه .. أحمد السيد

• خارجي/ إذا كان الاقتران م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ف(س) ، فإن ∫ ٢م(س) ف(س) س =
أ/ (م(س))٢ + جـ ب/ م(س) + جـ جـ/ ف(س) + جـ د/ م(س) ف(س) + جـ

الحل/

∫ ٢م(س) ف(س) س = ∫ ٢م(س) مَ(س) س = ∫ (م٢(س))َ س = م٢(س) + جـ أ

طريقة(٢)/ م(س) اقتران أصلي لـ ف(س) ← مَ(س) = ف(س)

⇐ ∫ ٢م(س) ف(س) س = ∫ ٢م(س) مَ(س) س

نفرض م(س) = ص ← مَ(س) س = ص س ⇐ س = ص / مَ(س)

⇐ ∫ ٢ص مَ(س) × ص / مَ(س) = ∫ ٢ص ص = ص٢ + جـ = م٢(س) + جـ

• القسم الثاني/ جد كل من التكاملات الآتية :

١/ ∫ (٦س + ١) / √(٣س٢ + س) س

الحل/ نفرض √(٣س٢ + س) = ص ← ٣س٢ + س = ص٢ نشتق

(٦س + ١) س = ٢ص س ص

⇐ س = ٢ص س ص / (٦س + ١)

ل = ∫ (٦س + ١) / √(٣س٢ + س) س = ∫ (٦س + ١) / ص × ٢ص س ص / (٦س + ١) = ∫ ٢ س ص = ٢ص + جـ

ل = ٢√(٣س٢ + س) + جـ

طريقة(٢)/ ∫ (٦س + ١) / √(٣س٢ + س) س = ∫ (٦س + ١) / (٣س٢ + س)^(١/٢) س = ٢ √(٣س٢ + س) + جـ

٢/ ∫ (س + ٢)٤ (س − ١)٦ س

الحل/ ل = ∫ (س + ٢)٤ (س − ١)٦ س

نفرض س − ١ = ص ← س = س ص

⇐ س = ص + ١

ل = ∫ (ص + ١ + ٢)٤ × ص٦ ص س = ∫ (ص + ٣)٤ ص٦ ص س = ∫ (ص٤ + ١٢ص٣ + ٩ص٢) ص٦ ص س

ل = ∫ ص٨ + ١٢ص٧ + ٩ص٦ ص س

$$ل = \frac{1}{9}ص^9 + \frac{6}{8}ص^8 + \frac{9}{7}ص^7 + ج = \frac{1}{9}(س-1)^9 + \frac{3}{4}(س-1)^8 + \frac{9}{7}(س-1)^7 + ج$$

---

١٣ $\int (جتاس + قاس)^2 \, دس$

الحل / $ل = \int (جتاس + قاس)^2 \, دس = \int (جتا^2س + 2جتاس قاس + قا^2س) \, دس$

$$ل = \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}جتا(2س)) + 2جتاس \times \frac{1}{جتاس} + قا^2س \, دس$$

$$ل = \frac{1}{2}س + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}جا(2س) + 2س + ظاس + ج$$

$$\leftarrow ل = \frac{5}{2}س + \frac{1}{4}جا(2س) + ظاس + ج$$

---

١٤ $\int \frac{ظاس}{\sqrt{قاس}} \, دس$

الحل / نفرض $\sqrt{قاس} = ص \leftarrow قاس = ص^2$ نشتق

$$قاس ظاس \, دس = 2ص \, دص \leftarrow دس = \frac{2ص \, دص}{قاس ظاس}$$

$$ل = \int \frac{ظاس}{\sqrt{قاس}} \, دس = \int \frac{ظاس}{ص} \times \frac{2ص \, دص}{قاس ظاس} = \int \frac{2 \, دص}{ص^2} = \frac{-2}{ص} + ج$$

$$ل = \frac{-2}{\sqrt{قاس}} + ج$$

---

١٥ $\int \sqrt[3]{س^5 - س^3} \, دس$

الحل / $ل = \int \sqrt[3]{س^5 - س^3} \, دس = \int \sqrt[3]{س^3(س^2-1)} \, دس = \int \sqrt[3]{س^3} \times \sqrt[3]{س^2-1} \, دس$

$$ل = \int س \sqrt[3]{س^2-1} \, دس$$

نفرض $\sqrt[3]{س^2-1} = ص \leftarrow س^2 - 1 = ص^3$ نشتق

$$2س \, دس = 3ص^2 \, دص \leftarrow دس = \frac{3ص^2 \, دص}{2س}$$

$$\leftarrow ل = \int س \times ص \times \frac{3ص^2 \, دص}{2س} = \int \frac{3}{2}ص^3 \, دص = \frac{3}{2} \times \frac{ص^4}{4} + ج$$

$$ل = \frac{3}{8}(س^2-1)^{\frac{4}{3}} + ج$$

---

١٦ $\int جتا^3س \, دس$

الحل / $\int جتا^3س \, دس = \int جتا^2س \, جتاس \, دس = \int (1 - جا^2س) \, جتاس \, دس$

$$ل = \int جتاس - جا^2س \, جتاس \, دس = جاس - \frac{جا^3س}{3} + ج$$

نلاحظ $(جاس)' = جتاس$

طريقة (٢) / $\int$ جا^{٣}س جتا^{٣}س دس

نفرض جاس = ص ← جتاس دس = دص ← دس = $\frac{دص}{جتاس}$

← $\int$ جا^{٣}س جتا^{٣}س دس = $\int$ ص^{٣} × جتا^{٣}س × $\frac{دص}{جتاس}$ = $\int$ ص^{٣} دص = $\frac{١}{٣}$ ص^{٣} + ج = $\frac{جا^{٣}س}{٣}$ + ج

---

١٧ $\int \frac{٤}{(٣س-١)^{\frac{١}{٥}}}$ دس − $\int \frac{٣س-١}{ع-٣س}$ دس

الحل / ل = $\int \frac{٤}{(٣س-١)^{\frac{١}{٥}}}$ دس − $\int \frac{٣س-١-(٤-٣س)}{ع-٣س}$ دس

ل = $\int ٤(٣س-١)^{-\frac{١}{٥}}$ دس − $\int \frac{٣س-١-٤+٣س}{ع-٣س}$ دس

ل = $\frac{٤}{\frac{٤}{٥}}(٣س-١)^{\frac{٤}{٥}}$ − $\frac{ع}{٣}$ − ٣س + ج

← ل = ٥ (٣س−١)$^{\frac{٤}{٥}}$ − $\frac{١}{٤}$ ع$^{٣س-٥}$ + ج

---

١٨ $\int$ جا^{٣}س دس

الحل / ل = $\int$ جا^{٣}س دس = $\int$ جا^{٢}س × جاس دس = $\int$ (١ − جتا^{٢}س) جاس دس

ل = $\int$ جاس − جاس جتا^{٢}س دس

= − جتاس + $\frac{جتا^{٣}س}{٣}$ + ج

$\int$ ق^{ن}(س) ق′(س) دس = $\frac{ق^{ن+١}(س)}{(ن+١)}$ + ج

طريقة (٢) / $\int$ جاس جتا^{٣}س دس

نفرض جتاس = ص ← − جاس دس = دص ← دس = $\frac{دص}{-جاس}$

← $\int$ جاس × ص^{٣} × $\frac{دص}{-جاس}$ = − $\int$ ص^{٣} دص = − $\frac{١}{٣}$ ص^{٣} + ج = − $\frac{١}{٣}$ جتا^{٣}س + ج

---

١٩ $\int$ س^{٤} جا(س^{٥}) دس

الحل / نفرض س^{٥} = ص ← ٥س^{٤} دس = دص ← دس = $\frac{دص}{٥س^{٤}}$

ل = $\int$ س^{٤} جا(ص) × $\frac{دص}{٥س^{٤}}$ = $\int \frac{١}{٥}$ جا(ص) دص = $\frac{١}{٥}$ × − جتا(ص) + ج

← ل = − $\frac{١}{٥}$ جتا(س^{٥}) + ج

١٠/ $\int \frac{س-١}{(س+١)^{٥}}\,دس$

الحل/ $ل=\int \frac{س-١}{(س+١)^{٥}}\,دس=\int \frac{س+١-٢}{(س+١)^{٥}}\,دس=\int \frac{(س+١)}{(س+١)^{٥}}-\frac{٢}{(س+١)^{٥}}\,دس$

$\Leftarrow ل=\int (س+١)^{-٤}-٢(س+١)^{-٥}\,دس=\frac{(س+١)^{-٣}}{-٣}-\frac{٢(س+١)^{-٤}}{-٤}+ج$

$ل=\frac{-١}{٣(س+١)^{٣}}+\frac{١}{٢(س+١)^{٤}}+ج$

• طريقة (٢)/ نفرض $ص=س+١\leftarrow دص=دس$

$\Leftarrow س=ص-١$

$ل=\int \frac{ص-١-١}{ص^{٥}}\,دص=\int \frac{ص-٢}{ص^{٥}}\,دص=\int \frac{ص}{ص^{٥}}-\frac{٢}{ص^{٥}}\,دص$

$ل=\int \frac{١}{ص^{٤}}-٢ص^{-٥}\,دص=\frac{ص^{-٣}}{-٣}-\frac{٢ص^{-٤}}{-٤}+ج$

$ل=\frac{-١}{٣(س+١)^{٣}}+\frac{١}{٢(س+١)^{٤}}+ج$

١١/ $\int س^{٥}(س^{٣}+٢)^{٣}\,دس$

الحل/ نفرض $ص=س^{٣}+٢\leftarrow دص=٣س^{٢}دس\Leftarrow دس=\frac{دص}{٣س^{٢}}$

$\Leftarrow ل=\int س^{٥}\times ص^{٣}\times \frac{دص}{٣س^{٢}}=\frac{١}{٣}\int س^{٣}ص^{٣}\,دص=\frac{١}{٣}\int (ص-٢)ص^{٣}\,دص$

$\Leftarrow ل=\frac{١}{٣}\int ص^{٤}-٢ص^{٣}\,دص$

$ل=\frac{١}{٣}\left(\frac{ص^{٥}}{٥}-\frac{٢ص^{٤}}{٤}\right)+ج=\frac{١}{١٥}(س^{٣}+٢)^{٥}-\frac{١}{٦}(س^{٣}+٢)^{٤}+ج$

١٢/ $\int ٦٠س^{٤}(س-١)^{٣}\,دس$

الحل/ $ل=\int ٦٠س^{٤}(س-١)^{٣}\,دس$

نفرض $ص=س-١\Leftarrow س=ص+١$

$دس=دص$

$ل=\int ٦٠(ص+١)^{٤}\times ص^{٣}\,دص=\int ٦٠(ص^{٤}+٤ص^{٣}+٦ص^{٢}+٤ص+١)ص^{٣}\,دص$

$ل=\int ٦٠ص^{٧}+٤٠ص^{٦}+٦٠ص^{٥}+٤٠ص^{٤}+٦٠ص^{٣}\,دص$

$ل=٦٠\left(\frac{ص^{٨}}{٨}+\frac{٤٠ص^{٧}}{٧}+\frac{٦٠ص^{٦}}{٦}+\frac{٤٠ص^{٥}}{٥}+\frac{٦٠ص^{٤}}{٤}\right)+ج$

$ل=١٠(س-١)^{٨}+٤٢(س-١)^{٧}+١٥(س-١)^{٦}+٨(س-١)^{٥}+١٥(س-١)^{٤}+ج$

١٣/ $\int$ قا^{5}س ظا س ds

الحل/ $\int$ قا^{5}س ظا س = $\int$ قا^{4}س × قا س ظا س ds = $\frac{\text{قا}^5\text{س}}{5}$ + جـ

مشتقة قاس بجانبها

طريقة (٢)/ $\int$ قا^{5}س ظا س ds

نفرض قاس = ص ← قاس ظا س ds = dص

$\Leftarrow$ ds = $\frac{\text{dص}}{\text{ص ظا س}}$

$\Leftarrow$ ل = $\int$ ص^5 ظا س × $\frac{\text{dص}}{\text{ص ظا س}}$ = $\int$ ص^4 dص = $\frac{\text{ص}^5}{5}$ + جـ = $\frac{\text{قا}^5\text{س}}{5}$ + جـ

١٤/ $\int \frac{1}{1-\text{جا س}}$ ds

الحل/ ل = $\int \frac{1}{1-\text{جا س}}$ ds = $\int \frac{1+\text{جا س}}{(1-\text{جا س})(1+\text{جا س})}$ ds = $\int \frac{1+\text{جا س}}{1-\text{جا}^2\text{س}}$ ds

ل = $\int \frac{1+\text{جا س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$ ds = $\int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} + \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$ ds = $\int$ قا^{2}س + $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \times \frac{1}{\text{جتا س}}$ ds

ل = $\int$ قا^{2}س + ظا س قا س ds = ظا س + قا س + جـ

١٥/ $\int$ ١٦ (٢س+١)^3 + جا س + ٥ ds

الحل/ ل = $\int$ ١٦ (٢س+١)^3 ds + $\int$ جا س ds + $\int$ ٥ ds

ل = $\frac{16(2س+1)^4}{4 \times 2}$ + − جتا س + ٥س + جـ ⇐ ل = (٢س+١)^4 − جتا س + ٥س + جـ

١٦/ $\int$ (٢س+١)(س^2+س−٥)^3 ds

الحل/ نفرض س^2+س−٥ = ص

(٢س+١) ds = dص ⇐ ds = $\frac{\text{dص}}{(2س+1)}$

ل = $\int$ (٢س+١) ص^3 × $\frac{\text{dص}}{(2س+1)}$ = $\int$ ص^3 dص + جـ = $\frac{1}{4}$ (س^2+س−٥)^4 + جـ

١٧/ $\int \frac{2س-2}{س^2+3س-4}$ ds

ل = $\int \frac{2(س-1)}{(س-1)(س+4)}$ = $\int \frac{2}{س+4}$ ds = ٢ لو |س+٤| + جـ

١٨/ $\int (س+3)(س-1)^8 \, دس$

الحل/ $\int (س+3)(س-1)^8 \, دس = \int (س-1+4)(س-1)^8 \, دس = \int (س-1)^9 + 4(س-1)^8 \, دس$

$= \int (س-1)^8 + 3(س-1)^7 \, دس$

$= \frac{(س-1)^9}{9} + \frac{3(س-1)^8}{8} + ث$

$\leftarrow = \frac{1}{9}(س-1)^9 + \frac{1}{2}(س-1)^8 + ث$

طريقة (٢)/ $\int (س+3)(س-1)^8 \, دس$

نفرض $س-1 = ص \leftarrow س = ص+1 \leftarrow دس = دص$

$\leftarrow = \int (ص+1+3) ص^8 \, دص = \int (ص+4) ص^8 \, دص = \int ص^9 + 4ص^8 \, دص$

$= \frac{1}{9}ص^9 + \frac{4}{8}ص^8 + ث = \frac{1}{9}(س-1)^9 + \frac{1}{2}(س-1)^8 + ث$

١٩/ $\int س\sqrt{س^2+4} \, دس$

الحل/ نفرض $\sqrt{س^2+4} = ص \leftarrow س^2+4 = ص^2$

$2س \, دس = 2ص \, دص \leftarrow س \, دس = ص \, دص$

$\leftarrow = \int س \times ص \times \frac{ص \, دص}{س} = \int ص^2 \, دص = \frac{1}{3}ص^3 + ث = \frac{1}{3}(س^2+4)^{\frac{3}{2}} + ث$

٢٠/ $\int \frac{3س+1}{\sqrt{2س^2+س}} \, دس$

الحل/ $\int \frac{(3س+1)}{\sqrt{2س^2+س}} \, دس = \int \frac{(3س+1)}{\sqrt{8س^2+4س}} \, دس = \frac{1}{2}\int (8س^2+4س)^{-\frac{1}{2}} \, دس$

$= \sqrt{8س^2+4س} + ث$

طريقة (٢)/ $\int \frac{3س+1}{\sqrt{2س^2+س}} \, دس$

$\sqrt{2س^2+س} = ص \leftarrow 2س^2+س = ص^2 \leftarrow (4س+1) \, دس = 2ص \, دص$

$\leftarrow دس = \frac{2ص \, دص}{(4س+1)}$

$\leftarrow = \int \frac{(4س+1)}{ص} \times \frac{2ص \, دص}{(4س+1)} = 2\int دص = 2ص + ث = 2\sqrt{2س^2+س} + ث$

٣١/ $\int \frac{\text{ظا}\theta \text{حا}^3\theta}{\sqrt{1+\text{جا}\theta}}\, d\theta$

الحل/ نفرض $\sqrt{1+\text{جا}\theta} = ص \Leftarrow 1+\text{جا}\theta = ص^2$

$\text{حتا}\theta\, d\theta = 2ص\, dص \Leftarrow d\theta = \frac{2ص\, dص}{\text{حتا}\theta}$

$\Leftarrow ل = \int \frac{\text{ظا}\theta \text{حا}^3\theta}{ص} \times \frac{2ص\, dص}{\text{حا}\theta\text{حتا}\theta} = \int \text{جا}\theta\, d\theta = \int ص^2 - 1\, dص$

$ل = \frac{ص^3}{3} - ص + ج \Leftarrow ل = \frac{1}{3}(1+\text{جا}\theta)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+\text{جا}\theta} + ج$

٣٢/ $\int \text{حتا}(2س)(\text{جا}س + \text{حتا}س)^{13}\, dس$

الحل/ $ل = \int \text{حتا}(2س)(\text{جا}س + \text{حتا}س)^{13}\, dس = \int (\text{حتا}^2س - \text{جا}^2س)(\text{جا}س + \text{حتا}س)^{13}\, dس$

$ل = \int (\text{حتا}س - \text{جا}س)(\text{حتا}س + \text{جا}س)(\text{جا}س + \text{حتا}س)^{13}\, dس$

$ل = \int (\text{حتا}س - \text{جا}س)(\text{حا}س + \text{حتا}س)^{14}\, dس$

نفرض $\text{حا}س + \text{حتا}س = ص$

$(\text{حتا}س - \text{جا}س)\, dس = dص \Leftarrow dس = \frac{dص}{(\text{حتا}س - \text{جا}س)}$

$\Leftarrow ل = \int (\text{حتا}س - \text{جا}س) \times ص^{14} \times \frac{dص}{(\text{حتا}س - \text{جا}س)} = \int ص^{14}\, dص = \frac{1}{15}ص^{15} + ج$

$\Leftarrow ل = \frac{1}{15}(\text{حا}س + \text{حتا}س)^{15} + ج$

طريقة (٢)/ $\int \text{حتا}(2س)(\text{جا}س + \text{حتا}س)^{13}\, dس = \int \text{حتا}(2س)(\text{حا}س + \text{حتا}س)^{13}(\text{حا}س + \text{حتا}س)\, dس$

$\Leftarrow ل = \int \text{حتا}(2س)(\text{حا}^2س + \text{حتا}^2س + 2\text{حا}س\text{حتا}س)^{\frac{13}{2}}\, dس$

$= \int \text{حتا}(2س)(1+\text{جا}(2س))^{\frac{13}{2}}\, dس$

نفرض $1+\text{جا}(2س) = ص \longleftarrow 2\,\text{حتا}(2س)\, dس = dص \Leftarrow dس = \frac{dص}{2\,\text{حتا}(2س)}$

$\Leftarrow ل = \int \text{حتا}(2س) \times ص^{\frac{13}{2}} \times \frac{dص}{2\,\text{حتا}(2س)} = \frac{1}{2}\int ص^{\frac{13}{2}}\, dص = \frac{1}{2} \times \frac{ص^{\frac{15}{2}}}{\frac{15}{2}} + ج$

$ل = \frac{1}{15}ص^{\frac{15}{2}} + ج = \frac{1}{15}(1+\text{جا}(2س))^{\frac{15}{2}} + ج$

ما العُمرُ دون تعلّم و جهاد؟

٣٣/ $\int جا^3 س \, (2+جتا س)^{\circ} \, دس$

الحل/ نفرض $2+جتا س = ص \leftarrow -جا س \, دس = دص \leftarrow دس = \frac{دص}{-جا س}$

$\leftarrow جتا س = ص - 2$

$$ل = \int جا^3 س \times ص^{\circ} \times \frac{دص}{-جا س} = -\int جا^2 س \, ص^{\circ} \, دص = \int (جتا^2 س - 1) \, ص^{\circ} \, دص$$

$$ل = \int ((ص-2)^2 - 1) \, ص^{\circ} \, دص = \int (ص^2 - 4ص + 3) \, ص^{\circ} \, دص$$

$$ل = \int ص^7 - 4ص^6 + 3ص^{\circ} \, دص = \frac{ص^8}{8} - \frac{4ص^7}{7} + \frac{3ص^6}{6} + ث$$

$$\leftarrow ل = \frac{1}{8}(2+جتا س)^8 - \frac{4}{7}(2+جتا س)^7 + \frac{1}{2}(2+جتا س)^6 + ث$$

٣٤/ $\int \sqrt[3]{س^3 + س^{\circ}} \, دس$

الحل/ $ل = \int \sqrt[3]{س^3 + س^{\circ}} \, دس = \int \sqrt[3]{س^3(1+س^2)} \, دس = \int \sqrt[3]{س^3} \times \sqrt[3]{1+س^2} \, دس$

$$ل = \int س \sqrt[3]{1+س^2} \, دس$$

نفرض $\sqrt[3]{1+س^2} = ص \leftarrow 1+س^2 = ص^3$

$$\leftarrow 2س \, دس = 3ص^2 \, دص \leftarrow دس = \frac{3ص^2 \, دص}{2س}$$

$$\leftarrow ل = \int س \times ص \times \frac{3ص^2 \, دص}{2س} = \frac{3}{2}\int ص^3 \, دص = \frac{3}{2} \times \frac{ص^4}{4} + ث$$

$$\leftarrow ل = \frac{3}{8}(1+س^2)^{\frac{4}{3}} + ث$$

٣٥/ $\int \frac{3+2س}{\sqrt[3]{س^2+س}} \, دس$

الحل/ نفرض $\sqrt[3]{س^2+س} = ص \leftarrow س^2+س = ص^3$

$$(2س+1) \, دس = 3ص^2 \, دص \leftarrow دس = \frac{3ص^2 \, دص}{2(س+1)}$$

$$\leftarrow ل = \int \frac{3(1+س)}{ص} \times \frac{3ص^2 \, دص}{2(س+1)} = \int \frac{9}{2} ص \, دص = \frac{9}{4}ص^2 + ث$$

$$\leftarrow ل = \frac{3}{4}(س^2+س)^{\frac{2}{3}} + ث$$

٣٦/ $\int جا^2 س \, دس$ "أفكر" السؤال -8-

٣٧/ أوجد قاعدة $د(س)$ حيث $قد(س) = 10س(س+1)^9$ علماً بأن $د$ تمر بالنقطة $(-1, 2)$

الحل/ $ق'(س) = 10س(س+1)^9$

$ق(س) = \int 10س(س+1)^9 \, دس$ ، $ق(1) = 0$

$\Leftarrow ق(س) = \int 10(س+1-1)(س+1)^9 \, دس = \int 10((س+1)^{10} - (س+1)^9) \, دس$

$\Leftarrow ق(س) = 10\left(\frac{(س+1)^{11}}{11} - \frac{(س+1)^{10}}{10}\right) + ج$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{10}{11}(س+1)^{11} - (س+1)^{10} + ج$

$ق(س)$ يمر بـ $(-1, 2) \Leftarrow ق(-1) = 2 \Leftarrow 2 = \frac{10}{11}(-1+1)^{11} - (-1+1)^{10} + ج \Leftarrow ج = 2$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{10}{11}(س+1)^{11} - (س+1)^{10} + 2$

طريقة (2)/ $ق(س) = \int 10س(س+1)^9 \, دس$

نفرض $س+1 = ص \leftarrow دس = دص$

$س = ص - 1$

$ق(س) = \int 10(ص-1)ص^9 \, دص = \int 10(ص^{10} - ص^9) \, دص = \int 10ص^{10} - 10ص^9 \, دص$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{10}{11}ص^{11} - \frac{10}{10}ص^{10} + ج$

$ق(س) = \frac{10}{11}(س+1)^{11} - (س+1)^{10} + ج$ ثم نعوض ج

28/ إذا كان $ق(س)$ اقتراناً متصلاً و بحيث $\int \frac{ق(س)}{جا^2 س} \, دس = \frac{1}{2}ظا^2(س) + ج$ و $س \in]0, \frac{\pi}{4}[$

جد $\int ق(س) \, دس$

الحل/ $\int \frac{ق(س)}{جا^2 س} \, دس = \frac{1}{2}ظا^2(س) + ج$ نشتق الطرفين.

$\frac{ق(س)}{جا^2(س)} = \frac{1}{2} \times 2ظا(س) \times قا^2(س) \Leftarrow ق(س) = ظا(س) قا(س) \times جا^2(س)$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{جا(س)}{جتا(س)} \times \frac{1}{جتا(س)} \times جا^2(س)$

$\Leftarrow ق(س) = جا(س) ظا(س)$

$\Leftarrow \int ق(س) \, دس = \int جا(س) ظا(س) \, دس = \int \frac{جا^2(س)}{جتا(س)} \, دس = \int \frac{1 - جتا^2(س)}{جتا(س)} \, دس$

$= \int قا(س) - جتا(س) \, دس = \ln|قا(س) + ظا(س)| - جا(س) + ج$

29/ $\int \frac{جا(س)}{قتا(2س)} \, دس$

الحل/ $\int \frac{جا(س)}{قتا(2س)} \, دس = \int جا(س) \times جا(2س) \, دس = \int جا(س) \times 2جا(س)جتا(س) \, دس$

$ل = \int 2جا^2(س)جتا(س) \, دس$

نفرض $جا(س) = ص \Leftarrow جتا(س) \, دس = دص \Leftarrow دس = \frac{دص}{جتا(س)}$

$L = \int 2ص^2 \times \frac{جتاس \, ص ص}{جتاس} = \int 2ص^2 \, ص ص = \frac{2}{3} ص^3 + ج$

$\Leftarrow L = \frac{2}{3} جا^3 س + ج$

٣٠/ $\int (س+1) \sqrt{س^2+5+2س} \, س س$

الحل/ نفرض $ص = \sqrt{س^2+5+2س} \Leftarrow ص^2 = س^2+5+2س$

$(2س+2) س س = 2ص ص س \Leftarrow س س = \frac{2ص ص س}{2(س+1)}$

$\Leftarrow L = \int (س+1) \times ص \times \frac{ص ص س}{(س+1)} = \int ص^2 ص ص = \frac{1}{3} ص^3 + ج$

$\Leftarrow L = \frac{1}{3} (س^2+5+2س)^{\frac{3}{2}} + ج$

٣١/ $\int \frac{ظاس}{جتاس^2} س س$

الحل/ $\int \frac{ظاس}{جتاس^2} س س = \int ظاس قا^2 س س = L$

نفرض $ظاس = ص \Leftarrow قا^2 س س = ص ص \Leftarrow س س = \frac{ص ص}{قا^2 س}$

$\Leftarrow L = \int ص \times قا^2 س \times \frac{ص ص}{قا^2 س} = \int ص ص = \frac{1}{2} ص^2 + ج = \frac{1}{2} ظا^2 س + ج$

طريقة (٢)/ $\int ظاس قا^2 س س = \int ظاس قاس \times قاس س س$

نفرض $قاس = ص \Leftarrow قاس ظاس س س = ص ص \Leftarrow س س = \frac{ص ص}{قاس ظاس}$

$L = \int ظاس قاس \times ص \times \frac{ص ص}{قاس ظاس} = \int ص ص = \frac{ص^2}{2} + ج = \frac{1}{2} قا^2 س + ج$

٣٢/ $\int (2س+3) \sqrt{س^2+5+3س} \, س س$

الحل/ نفرض $ص = \sqrt{س^2+5+3س} \Leftarrow ص^2 = س^2+5+3س$

$(2س+3) س س = 2ص ص س \Leftarrow س س = \frac{2ص ص}{(2س+3)}$

$\Leftarrow L = \int (2س+3) \times ص \times \frac{2ص ص}{(2س+3)} = \int 2ص^2 ص ص = \frac{2}{3} ص^3 + ج = \frac{2}{3} (س^2+5+3س)^{\frac{3}{2}} + ج$

٣٣/ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق(س)$ عند أي نقطة تقع عليه يعطى بالقاعدة $\frac{س^5}{(س^3-1)^2}$ وجد قاعدة $ق(س)$ علماً بأنه يمر بالنقطة $(1، 3)$.

الحل/ ميل العمودي = $\frac{س^{-5}}{(1-\sqrt{س})^2}$ ⇐ ق(س) = ميل المماس = $\frac{-(1-\sqrt{س})^2}{س^5}$

ق(س) = $-\frac{(1-\sqrt{س})^2}{س^5}$ اضرب $\sqrt{س}$ كعامل مشترك .

$\int ق(س)\,دس = \int -\frac{(س)^2(1-\frac{1}{\sqrt{س}})^2}{س^5}\,دس = \int -س^{-5}(1-س^{-\frac{1}{2}})^2\,دس$

$\Leftarrow ق(س) = \int -س^{-\frac{3}{2}}(1-س^{-\frac{1}{2}})^2\,دس$

نفرض $1-س^{-\frac{1}{2}} = ص \Leftarrow -(\frac{1}{2}س^{-\frac{3}{2}})دس = دص \Leftarrow دس = \frac{2دص}{س^{-\frac{3}{2}}}$

$\Leftarrow ق(س) = \int -س^{-\frac{3}{2}} \times ص^2 \times \frac{2دص}{س^{-\frac{3}{2}}} = \int -2ص^2\,دص = -\frac{2}{3}ص^3 + ج$

$\Leftarrow ق(س) = -\frac{2}{3}(1-س^{-\frac{1}{2}})^3 + ج = -\frac{2}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{س}})^3 + ج$

ق(س) يمر بـ (16,3) ⇐ ق(1) = 3 ⇐ $-\frac{2}{3}(1-\frac{1}{1})^3 + ج = 3$

$ج = 3$

$\Leftarrow ق(س) = -\frac{2}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{س}})^3 + 3$

34/ $\int (س-1)^3\sqrt{س^4-2س-3}\,دس$

الحل/ نفرض $(\sqrt{س^4-2س-3} = ص)^2 \Leftarrow س^4-2س-3 = ص^2$

$س^4+2س = ص^2+3$

$(2س-2)دس = ص \times 2دص \Leftarrow دس = \frac{2ص\,دص}{2(س-1)}$

$\Leftarrow ل = \int (س-1)^3 \times ص \times \frac{ص\,دص}{(س-1)} = \int (س-1)^2 ص^2\,دص = \int (س^2-2س+1)ص^2\,دص$

$ل = \int (ص^2+3+1)ص^2\,دص = \int ص^4+2ص^2\,دص = \frac{1}{5}ص^5 + \frac{2}{3}ص^3 + ج$

$ل = \frac{1}{5}(س^2-2س-3)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(س^2-2س-3)^{\frac{3}{2}} + ج$

35/ إذا كان ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) عند أي نقطة تقع عليه يساوي $\frac{\sqrt{س}+1}{س^2+س}$ و ق(1) = -2.4

جد قاعدة الاقتران ق(س) .

الحل/ ميل المماس = ق(س) = $\frac{\sqrt{س}+1}{س^2+س}$ ⇐ $\int ق(س)\,دس = \int \frac{\sqrt{س}+1}{س^2+س}\,دس$

نفرض $(\sqrt{س}+1 = ص)^2 \Leftarrow س+1 = ص^2$

$\Leftarrow دس = 2ص\,دص$ ، $\frac{1}{\sqrt{س}}دس = 2دص$

$$ق(س) = \int \frac{ص}{س(1+س)} \times -2ص^2 \, س ص = -\int 2ص^2 \times \frac{س}{(1+س)} \, ص ص$$

- ص: الفرض:
$$ص = \frac{1}{س} + 1$$
$$ص^2 = \frac{1+س}{س}$$
$$\frac{س}{1+س} = \frac{1}{ص^2}$$

$$ق(س) = -\int 2ص^2 \times \frac{1}{ص^2} \, ص ص = -\int 2 \, ص ص$$

$$ق(س) = -2ص + ج = -2\left|1+\frac{1}{س}\right| + ج$$

$$\Leftarrow ق(س) \text{ يمر بـ } (1, -2\sqrt{2}) \Leftarrow ق(1) = -2\sqrt{2}$$

$$\Leftarrow ق(1) = -2\sqrt{1+1} + ج$$

$$-2\sqrt{2} = -2\sqrt{2} + ج \leftarrow \text{صفر} = ج$$

$$\Leftarrow ق(س) = -2\left|1+\frac{1}{س}\right|$$

٣٦/ إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى $ق(س)$ عند أي نقطة تقع عليه يعطى بالقاعدة $(جا^٧ س \, قتا^٧ س)$ و $س \in]0, \frac{\pi}{4}[$ و جد قاعدة $ق(س)$ حيث أنه يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{8})$

الحل/

$$\text{ميل المماس} = ق'(س) \Leftarrow \frac{-1}{\text{ميل العمودي}} = ق'(س) \Leftarrow \frac{-1}{جا^٧ س \, قتا^٧ س}$$

$$\Leftarrow ق'(س) = \frac{-1}{جا^٥ س \times جا^٢ س} \times \frac{-جتا^٧ س}{جا^٧ س} = \frac{1}{جا^٨ س} \times جتا^٧ س = ق'(س)$$

$$\Leftarrow ق'(س) = -ظتا^٧ س \, قتا^٢ س$$

$$ق(س) = \int -ظتا^٧ س \, قتا^٢ س \, س س$$

نفرض $ظتا س = ص \Leftarrow -قتا^٢ س \, س س = ص ص \Leftarrow س س = \frac{ص ص}{-قتا^٢ س}$

$$\Leftarrow ق(س) = \int -ص^٧ \, قتا^٢ س \times \frac{ص ص}{-قتا^٢ س} = \int ص^٧ ص ص = \frac{1}{٨} ص^٨ + ج$$

$$ق(س) = \frac{1}{٨} ظتا^٨ س + ج \Leftarrow ق(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{٨} \text{ و } ق \text{ يمر بـ } (\frac{\pi}{4}, \frac{1}{٨})$$

$$\frac{1}{٨} = \frac{1}{٨} ظتا^٨ (\frac{\pi}{4}) + ج \Leftarrow \frac{1}{٨} = \frac{1}{٨} + ج \Leftarrow \text{صفر} = ج$$

$$\Leftarrow ق(س) = \frac{1}{٨} ظتا^٨ (س)$$

٣٧/ جد $\int \frac{\sqrt{س+1}}{\sqrt{س^٣}} \, س س$

الحل/

$$\int \frac{\sqrt{س+1}}{\sqrt{س^٣ \times س}} \, س س = \int \frac{\sqrt{س+1}}{س \sqrt{س}} \, س س = \int \sqrt{\frac{س+1}{س}} \times \frac{1}{س^٢} \, س س$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\,dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\sqrt{1+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}\,dx$$

نفرض $u = 1+\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftarrow u^2 = 1+\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftarrow 2u\,du = -\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\Leftarrow dx = -2\sqrt{x}\,2u\,du$$

$$\Leftarrow I = \int \sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot u\cdot -2\sqrt{x}\,2u\,du = -4\int u^2\sqrt{x}\,du = -\frac{4}{3}u^3 + c = -\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + c$$

٣٨/ جد $\int \frac{(x+\sqrt{x+1})^6}{\sqrt{x+1}}\,dx$

الحل/

$$u = x+\sqrt{x+1} \Leftarrow du = dx + \frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} \Leftarrow du = dx + \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

$$\Leftarrow \frac{u}{x+\sqrt{x+1}}\,du = dx \Leftarrow \frac{u}{\sqrt{x+1}}\,du = \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

$$\Leftarrow I = \int \frac{\sqrt{x+1}}{u}\cdot\frac{u^6}{\sqrt{x+1}}\,du = \int u^5\,du = \frac{1}{6}u^6 + c$$

$$I = \frac{1}{6}(x+\sqrt{x+1})^6 + c$$

٣٩/ إذا كان الاقتران $m(x)$ اقتران أصلي للاقتران المتصل $f(x)$ وكان منحنى $m(x)$ يمر بالنقطة $(3,1)$ حيث قيمة $m(3) = f(x) = 2x$.

الحل/

$m(x)f(x) = 2x$ و $m(x)$ اقتران أصلي لـ $f \Leftarrow m(x) = f(x)$

$m(x)m'(x) = 2x$

$$* \int m(x)m'(x)\,dx = \int 2x\,dx$$

نفرض $m(x) = u \Leftarrow m'(x)\,dx = du \Leftarrow dx = \frac{du}{m'(x)}$

$$\Leftarrow * \int u\,m'(x)\frac{du}{m'(x)} = x^2 + c \Leftarrow \int u\,du = x^2 + c$$

$$\Leftarrow \frac{u^2}{2} = x^2 + c \Leftarrow u^2 = 2x^2 + c$$

$\Leftarrow m(x)$ يمر بـ $(3,1) \Leftarrow m(1) = 3 \Leftarrow 9 = 2+c \Leftarrow c = 7$

$$\Leftarrow m^2(x) = 2x^2 + 7 \Leftarrow m^2(3) = 25 \Leftarrow m(3) = \pm 5$$